流体力学 授業資料 (2026-11-02)

3. 等方ニュートン流体の方程式

3.1 等方ニュートン流体の構成方程式

3.1.1 等方ニュートン流体とは

以上の仮定を満たす流体を等方ニュートン流体という.

- 速度勾配が十分小さい. つまり, 応力は 速度勾配テンソル (velocity gradient tensor) $u_{kl} \equiv \dfrac{\partial v_k}{\partial x_l}$ の 1 次関数で表現できる.
- 流体が等方的である.

3.1.2 σ_{ij} の速度勾配テンソル u_{kl} による展開

速度勾配が小さいので, σ_{ij} を u_{kl} で展開し, 2 次以上の項を微小として無視する.

$$\sigma_{ij} = (\sigma_{ij})_0 + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial u_{kl}} u_{kl} + O(u_{kl}^2). \tag{1}$$

速度勾配テンソル u_{kl} を対称部分と反対称部分に分ける.

$$u_{kl} = \frac{1}{2} \cdot e_{kl} + \frac{1}{2} \cdot \Omega_{kl}, \tag{2}$$

ただし

$$e_{kl} \equiv \frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k}, \tag{3}$$

$$\Omega_{kl} \equiv \frac{\partial v_k}{\partial x_l} - \frac{\partial v_l}{\partial x_k} = -\varepsilon_{klm} \cdot \omega_m. \tag{4}$$

ここで, ε_{klm} はエディントンのイプシロンである.
e_{kl} は変型速度テンソル (rate-of-deformation tensor) あるいはひずみ速度テンソル (strain rate tensor) と呼ばれる. Ω_{kl} はスピンテンソルと呼ばれる. ω_m は 渦度ベクトルと呼ばれる (数回後の授業で扱う). したがって (1) は次のように表わされる.

$$\sigma_{ij} = (\sigma_{ij})_0 + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial u_{kl}} \left(\frac{1}{2} e_{kl} - \frac{1}{2} \epsilon_{klm} \omega_m \right) + O(u_{kl}^2) = (\sigma_{ij})_0 + a_{ijkl} e_{kl} + b_{ijm} \omega_m + O(u_{kl}^2). \tag{5}$$

ただし, $a_{ijkl} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial u_{kl}}, b_{ijm} = -\dfrac{1}{2} \dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial u_{kl}} \epsilon_{klm}$ である.

3.1.3 応力テンソルの表式

- $(\sigma_{ij})_0$ の表式

  流体が静止している場合を考える. 流体中に働く応力は圧力 p のみ. よって, 応力テンソルは $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ となるべき. 一方, 速度勾配による σ の展開式 (5) において静止流体 $(e_{kl} = 0, \omega_m = 0)$ を考えると $\sigma_{ij} = (\sigma_{ij})_0$. よって,

$$(\sigma_{ij})_0 = -p\delta_{ij}. \tag{6}$$

- b_{ijm} の表式

  流体が剛体回転している場合を考える. 速度のずれによる応力は存在せず, 圧力のみ. 応力テンソルは $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ となるべき. 今, 流体が x_1 軸を回転軸として角速度 $\mathbf{\Omega}$ で剛体回転しているとする (図 1). 剛体回転の速度場は,

$$\boldsymbol{v} = (0, \Omega \cdot x_3, -\Omega \cdot x_2) \tag{7}$$

$$\Omega = \mid \mathbf{\Omega} \mid . \tag{8}$$

  この速度分布では $e_{kl} = \dfrac{\partial v_k}{\partial x_l} + \dfrac{\partial v_l}{\partial x_k} = 0$, $\omega_1 = -2\Omega$, $\omega_2 = \omega_3 = 0$ である. したがって, 応力テンソル $\sigma_{ij} = (\sigma_{ij})_0 + a_{ijkl}e_{kl} + b_{ijm}\omega_m$ は

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} - b_{ij1} \cdot 2\Omega \tag{9}$$

  となる. したがって, $b_{ij1} = 0$ である. 同様に, x_2 軸, x_3 軸回転について考えると, ω_m の係数 b_{ijm} はすべて 0 となる.

$$b_{ijm} = 0. \tag{10}$$

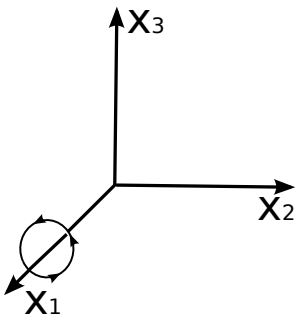


図 1: x_1 軸まわりの剛体回転.

- a_{ijkl} の表式

  流体が等方的であるという仮定により, e_{kl} の係数 a_{ijkl} は 4 階の等方性テンソルとなる. 4 階の等方テンソルは次の形をもつ (次節参照).

$$a_{ijkl} = A\delta_{ij}\delta_{kl} + B\delta_{ik}\delta_{jl} + C\delta_{il}\delta_{jk}. \tag{11}$$

3.1.4 等方テンソルの表式の導出

等方テンソルの形の導出の例を以下に示す.

1. 1 階の等方性テンソル

   座標の回転による座標変換を考える. 変換行列を β_{ji} とすると, 1 階テンソルの変換則により, ベクトル t_j は

   $$t'_j = \beta_{ji} t_i \tag{12}$$

   と変換される. t_j が等方だすると t'_j は t_j に等しい. 回転変換として, x_1 軸まわりの 180° 回転 (x_2 軸と x_3 軸がひっくり返る) を考えると

   $$\beta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

   となるので,

   $$t'_1 = t_1, \;\; t'_2 = -t_2, \;\; t'_3 = -t_3 \tag{14}$$

   が得られる. よって, 等方性の条件 $t'_j = t'_j$ から

   $$t_2 = 0, \;\; t_3 = 0 \tag{15}$$

   が得られる. 同様に, x_2 軸まわりの 180° 回転を考えると $t_1 = 0$ が得られる. よって, $t_i = 0$ となる.

   更に, 任意の座標回転に対して $(0, 0, 0)$ は形を変えない. したがって 1 階の等方性テンソルは $t_i = 0$ である.

2. 2 階の等方性テンソル

   計算の便宜上, a_{ij} を成分とするテンソルを $\boldsymbol{T}_2$ と書くことにすると,

   $$\boldsymbol{T}_2 = a_{ij} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j, \tag{16}$$

   と表すことができる . ここで $\boldsymbol{e}_i$ は x_i 軸に平行な単位ベクトルであり, $\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j$ はテンソルの基底である. 座標系を任意の向きに回転させるとき, 等方性テンソルの成分は回転前後で不変である. この条件を満たすように成分 a_{ij} を定める.

   アインシュタインの規約を用いずに (16) を書き下すと,

   $$\begin{aligned} \boldsymbol{T}_2 = {} & a_{xx} \boldsymbol{e}_x \boldsymbol{e}_x + a_{xy} \boldsymbol{e}_x \boldsymbol{e}_y + a_{xz} \boldsymbol{e}_x \boldsymbol{e}_z + a_{yx} \boldsymbol{e}_y \boldsymbol{e}_x + a_{yy} \boldsymbol{e}_y \boldsymbol{e}_y + a_{yz} \boldsymbol{e}_y \boldsymbol{e}_z \\ & + a_{zx} \boldsymbol{e}_z \boldsymbol{e}_x + a_{zy} \boldsymbol{e}_z \boldsymbol{e}_y + a_{zz} \boldsymbol{e}_z \boldsymbol{e}_z \end{aligned} \tag{17}$$

   となる. 座標系を x 軸について反時計回りに π rad 回転させる. このとき $\boldsymbol{T}_2$ は (17) において単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_y \to -\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z \to -\boldsymbol{e}_z$ と置き換えたもので表現される. すなわち

   $$\begin{aligned} \boldsymbol{T}_2 = {} & a_{xx} \boldsymbol{e}_x \boldsymbol{e}_x - a_{xy} \boldsymbol{e}_x \boldsymbol{e}_y - a_{xz} \boldsymbol{e}_x \boldsymbol{e}_z - a_{yx} \boldsymbol{e}_y \boldsymbol{e}_x + a_{yy} \boldsymbol{e}_y \boldsymbol{e}_y + a_{yz} \boldsymbol{e}_y \boldsymbol{e}_z \\ & - a_{zx} \boldsymbol{e}_z \boldsymbol{e}_x + a_{zy} \boldsymbol{e}_z \boldsymbol{e}_y + a_{zz} \boldsymbol{e}_z \boldsymbol{e}_z \end{aligned} \tag{18}$$

となる. (17), (18) の $\boldsymbol{T}_2$ の各成分は互いに等しくなければならないので,

$$a_{xy} = 0, \quad a_{xz} = 0, \quad a_{yx} = 0, \quad a_{zx} = 0 \tag{19}$$

が得られる. 同様に座標系を y 軸について反時計周りに π rad 回転させると, $\boldsymbol{T}_2$ は (17) において単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_x \to -\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_z \to -\boldsymbol{e}_z$ と置き換えることで表現されるので,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}_2 = {} & a_{xx}\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x - a_{xy}\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_y + a_{xz}\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_z - a_{yx}\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_x + a_{yy}\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_y - a_{yz}\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_z \\ & + a_{zx}\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_x - a_{zy}\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_y + a_{zz}\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z\end{aligned} \tag{20}$$

となる. (17), (20) の各成分は互いに等しくなければならないので,

$$a_{yz} = 0, \quad a_{zy} = 0 \tag{21}$$

が得られる. また座標系を y 軸について反時計周りに $\pi/2$ rad 回転させた後, 新たな x 軸について時計周りに $\pi/2$ rad 回転させる. このとき $\boldsymbol{T}_2$ は (17) において単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_x \to \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_y \to \boldsymbol{e}_z, \boldsymbol{e}_z \to \boldsymbol{e}_x$ と置き換えることで表現されるので,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}_2 = {} & a_{xx}\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_y + a_{xy}\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_z + a_{xz}\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_x + a_{yx}\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_y + a_{yy}\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z + a_{yz}\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_x \\ & + a_{zx}\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_y + a_{zy}\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_z + a_{zz}\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x \qquad (22) \\ = {} & a_{zz}\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x + a_{zx}\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_y + a_{zy}\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_z + a_{xz}\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_x + a_{xx}\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_y + a_{xy}\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_z \\ & + a_{yz}\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_x + a_{yx}\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_y + a_{yy}\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z \qquad (23)\end{aligned}$$

となる. (17), (23) の各成分は互いに等しくなければならないので,

$$a_{xx} = a_{yy} = a_{zz} \tag{24}$$

が得られる. $a_{xx} = a_{yy} = a_{zz} = A$ と置くと, (19), (21), (24) より,

$$a_{ij} = A\delta_{ij} \tag{25}$$

となる.

逆に, (25) なら任意の回転に対して不変となることが示せる. よって, (25) が 2 階の等方テンソルである.

3. 4 階の等方性テンソルの導出

a_{ijkl} を成分とするテンソルを $\boldsymbol{T}_4$ と書くことにすると,

$$\boldsymbol{T}_4 = a_{ijkl}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l \tag{26}$$

と表すことができる. 座標系の回転に対してテンソルの成分は回転前後で不変となるように成分 a_{ijkl} を定める.

成分を以下のように分類する.

(a) 添字が全て等しいもの. a_{xxxx} など 3 成分が該当する.

(b) 添字の種類が 2 種類で, 一方の添字が 2 つのみ現れるもの. a_{xxyy} など 18 成分が該当する.

(c) 添字が奇数回現れるもの. a_{xxyx}, a_{xxyz} など 60 成分が該当する.

座標系を 1 つの軸の周りに π rad 回転させるとき, 単位ベクトルは $(\boldsymbol{e}_x \to -\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y \to -\boldsymbol{e}_y)$, $(\boldsymbol{e}_x \to -\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_z \to -\boldsymbol{e}_z)$, $(\boldsymbol{e}_y \to -\boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z \to -\boldsymbol{e}_z)$ のように置き換わる. この回転操作により, テンソルの基底は $\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_y \to -\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_y$ のように変換され, 1 つの添字が奇数回現れる成分は自身に負号をつけたものと等しくなる. 従って 3. に分類される成分は全てゼロとなる.

座標系を 1 つの軸の周りに $\pi/2$ rad 回転させるとき, 単位ベクトルは $(\boldsymbol{e}_x \to -\boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_y \to \boldsymbol{e}_x)$, $(\boldsymbol{e}_y \to -\boldsymbol{e}_z, \boldsymbol{e}_z \to \boldsymbol{e}_y)$, $(\boldsymbol{e}_z \to -\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_x \to \boldsymbol{e}_z)$ のように置き換わる. この回転操作により, テンソルの基底は $\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_y \to \boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x$ のように変換されるので, 2. に分類される成分に関して以下の関係が得られる.

$$a_{xxyy} = a_{yyxx}, \quad a_{yyzz} = a_{zzyy}, \quad a_{zzxx} = a_{xxzz}, \tag{27}$$
$$a_{xyxy} = a_{yxyx}, \quad a_{yzyz} = a_{zyzy}, \quad a_{zxzx} = a_{xzxz}, \tag{28}$$
$$a_{xyyx} = a_{yxxy}, \quad a_{yzzy} = a_{zyyz}, \quad a_{zxxz} = a_{xzzx}. \tag{29}$$

座標系を 1 つの軸の周りに $\pi/2$ rad 回転させた後, 新たな座標系におけるある軸の周りに $-\pi/2$ rad 回転させるとき, 単位ベクトルは $(\boldsymbol{e}_x \to \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_y \to \boldsymbol{e}_z, \boldsymbol{e}_z \to \boldsymbol{e}_x)$ と置き換わる. この回転操作により, テンソルの基底は $\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_y \to \boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x \to \boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_y$ のように変換される. 従って, 各成分に関して以下の関係が得られる.

$$a_{xxyy} = a_{yyzz} = a_{zzxx}, \tag{30}$$
$$a_{xyxy} = a_{yzyz} = a_{zxzx}, \tag{31}$$
$$a_{xyyx} = a_{yzzy} = a_{zxxz}, \tag{32}$$
$$a_{xxxx} = a_{yyyy} = a_{zzzz}. \tag{33}$$

(27) – (32) をまとめると,

$$a_{xxyy} = a_{yyzz} = a_{zzxx} = a_{yyxx} = a_{zzyy} = a_{xxzz} \equiv B, \tag{34}$$
$$a_{xyxy} = a_{yzyz} = a_{zxzx} = a_{yxyx} = a_{zyzy} = a_{xzxz} \equiv C, \tag{35}$$
$$a_{xyyx} = a_{yzzy} = a_{zxxz} = a_{yxxy} = a_{zyyz} = a_{xzzx} \equiv D \tag{36}$$

となる. 但し B, C, D はスカラー量である.

更に z 軸の周りに微小角度 $\delta\theta$ だけ回転させる場合について考える. この場合は $\pi/2$ rad, π rad 回転させる場合とは異なり, 基底を単純に置き換えることによって議論することが困難である. そこでテンソルの定義に立ち戻って, テンソルの変換法則を導く. 4 階のテンソル a_{ijkl} について, 回転変換した後のテンソルを a'_{pqrs} とする. このときテンソルの定義より, a_{ijkl} と a'_{pqrs} の間には以下の関係式が成り立つ.

$$a'_{pqrs}(x', y', z') = a_{ijkl}(x, y, z)\beta_{pi}\beta_{qj}\beta_{rk}\beta_{sl}. \tag{37}$$

但し x', y', z' は回転後の座標であり, β_{pi} は回転行列の成分である. z 軸の周りに角度 $\delta\theta$ だけ回転させる場合,

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\delta\theta) & \sin(\delta\theta) & 0 \\ -\sin(\delta\theta) & \cos(\delta\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{38}$$

となる. (38) において, $\sin(\delta\theta)$, $\cos(\delta\theta)$ を $\delta\theta = 0$ の周りで展開し, $|\delta\theta| \ll 1$ であるとして $\delta\theta$ の 2 次以上の項を無視すると,

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & \delta\theta & 0 \\ -\delta\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{39}$$

となる. (39) はクロネッカーのデルタ記号及びエディントンのイプシロン記号を用いて

$$\beta_{ij} = \delta_{ij} + \delta\theta\varepsilon_{3ij} \tag{40}$$

と表される. (40) を (37) に代入すると,

$$\begin{aligned} a'_{pqrs} &\simeq a_{ijkl}(\delta_{pi} + \delta\theta\varepsilon_{3pi})(\delta_{qj} + \delta\theta\varepsilon_{3qj})(\delta_{rk} + \delta\theta\varepsilon_{3rk})(\delta_{sl} + \delta\theta\varepsilon_{3sl}) && (41) \\ &= a_{ijkl}\delta_{pi}\delta_{qj}\delta_{rk}\delta_{sl} \\ &\quad + (a_{ijkl}\delta_{pi}\delta_{qj}\delta_{rk}\varepsilon_{3sl} + a_{ijkl}\delta_{pi}\delta_{qj}\delta_{sl}\varepsilon_{3rk} + a_{ijkl}\delta_{pi}\delta_{rk}\delta_{sl}\varepsilon_{3qj} \\ &\quad + a_{ijkl}\delta_{qj}\delta_{rk}\delta_{sl}\varepsilon_{3pi})\delta\theta + O\left((\delta\theta)^2\right) && (42) \\ &\simeq a_{pqrs} + (a_{pqrl}\varepsilon_{3sl} + a_{pqks}\varepsilon_{3rk} + a_{pjrs}\varepsilon_{3qj} + a_{iqrs}\varepsilon_{3pi})\delta\theta && (43) \end{aligned}$$

となる. a_{pqrs} が等方性テンソルである為には, $\delta\theta$ に依らず $a'_{pqrs} = a_{pqrs}$ でなければならない. 従って (43) より

$$a_{pqrl}\varepsilon_{3sl} + a_{pqks}\varepsilon_{3rk} + a_{pjrs}\varepsilon_{3qj} + a_{iqrs}\varepsilon_{3pi} = 0 \tag{44}$$

となる. (44) において $p = q = r = 1, s = 2$ と置くと,

$$\begin{aligned} &a_{111l}\varepsilon_{32l} + a_{11k2}\varepsilon_{31k} + a_{1j12}\varepsilon_{31j} + a_{i112}\varepsilon_{31i} \\ &= -a_{1111} + a_{1122} + a_{1212} + a_{2112} = -a_{xxxx} + a_{xxyy} + a_{xyxy} + a_{yxxy} && (45) \\ &= 0 && (46) \end{aligned}$$

となる. (33) – (36) 及び (46) より

$$a_{xxxx} = a_{yyyy} = a_{zzzz} = A + B + C \tag{47}$$

となる. (34) – (36), (47) より,

$$a_{ijkl} = A\delta_{ij}\delta_{kl} + B\delta_{ik}\delta_{jl} + C\delta_{il}\delta_{jk} \tag{48}$$

となる. (48) に関して, 任意の軸の周りの任意の回転に対して不変であることが示される.

3.1.5 等方ニュートン流体の応力テンソル

(6), (10), (11) を (5) に代入することにより, 以下が得られる.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= (\sigma_{ij})_0 + a_{ijkl}e_{kl} + b_{ijm}\omega_m + O(u_{kl}^2) && (49) \\ &= -p\delta_{ij} + \left(A\delta_{ij}\delta_{kl} + B\delta_{ik}\delta_{jl} + C\delta_{il}\delta_{jk}\right)e_{kl} && (50) \\ &= -p\delta_{ij} + A\delta_{ij}e_{kk} + Be_{ij} + Ce_{ji} && (51) \\ &= -p\delta_{ij} + A\delta_{ij}e_{kk} + (B + C)e_{ij}. && (52) \end{aligned}$$

ここであらためて $A = \dfrac{\lambda}{2}, B + C = \mu$ とおく. また, $e_{kk} = 2\dfrac{\partial v_k}{\partial x_k} = 2\mathrm{div}\boldsymbol{v}$ と変型することにより応力テンソルの表現が得られる.

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\delta_{ij}\mathrm{div}\boldsymbol{v} + \mu e_{ij} \tag{53}$$

$$= -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \lambda\delta_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}. \tag{54}$$

$$= -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) + (\lambda + \frac{2}{3}\mu)\delta_{ij}\cdot\mathrm{div}\boldsymbol{v} \tag{55}$$

$$= -p\delta_{ij} + \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) + \zeta\delta_{ij}\cdot\mathrm{div}\boldsymbol{v}. \tag{56}$$

μ を粘性係数 (率), λ を第 2 粘性係数 (率) と呼ぶ. $\eta \equiv \mu$ も粘性係数（率）と呼ばれる. $\zeta \equiv \lambda + \dfrac{2}{3}\mu$ は体積粘性率 (bulk viscosity) と言われる.

3.2 ニュートン流体の運動方程式

3.2.1 Navier-Stokes 方程式

流体の運動方程式

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} - \rho\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \tag{57}$$

にニュートン流体の応力テンソルの表現 (56) を代入することにより, Newton 流体の一般的な運動方程式が得られる.

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\zeta\cdot\mathrm{div}\boldsymbol{v}) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\delta_{ik}\right)\right\} - \rho\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}. \tag{58}$$

これを Navier-Stokes 方程式という.

3.2.2 円筒座標・球座標における表現

円筒座標系における応力テンソルの r, ϕ, z 成分は以下の通りである.

$$\sigma_{rr} = -p + 2\eta\frac{\partial v_r}{\partial r}, \tag{59}$$

$$\sigma_{\phi\phi} = -p + 2\eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r}\right), \tag{60}$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\eta\frac{\partial v_z}{\partial z}, \tag{61}$$

$$\sigma_{r\phi} = \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r}\right), \tag{62}$$

$$\sigma_{\phi z} = \eta\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \phi}\right), \tag{63}$$

$$\sigma_{zr} = \eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right). \tag{64}$$

円筒座標系における Navior-Stokes 方程式の 3 成分と連続の式は

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\phi^2}{r}$$
$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} - \frac{v_r}{r^2}\right), \tag{65}$$

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_z\frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{v_r v_\phi}{r}$$
$$= -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \phi} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r^2}\right), \tag{66}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}$$
$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}\right), \tag{67}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0 \tag{68}$$

球座標系における応力テンソルの r, ϕ, θ 成分は以下の通りである.

$$\sigma_{rr} = -p + 2\eta\frac{\partial v_r}{\partial r}, \tag{69}$$

$$\sigma_{\phi\phi} = -p + 2\eta\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta\cot\theta}{r}\right), \tag{70}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -p + 2\eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right), \tag{71}$$

$$\sigma_{r\theta} = \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right), \tag{72}$$

$$\sigma_{\theta\phi} = \eta\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} - \frac{v_\phi\cot\theta}{r}\right), \tag{73}$$

$$\sigma_{\phi r} = \eta\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r}\right). \tag{74}$$

球座標系における Navier-Stokes 方程式の 3 成分と連続の式は

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \\
&\quad = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rv_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right. \\
&\qquad \left. -\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2\cot\theta}{r^2}v_\theta\right], \qquad (75)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2\cot\theta}{r} \\
&\quad = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rv_\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \phi^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right. \\
&\qquad \left. -\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta}\right], \qquad (76)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\phi}{r} + \frac{v_\theta v_\phi\cot\theta}{r} \\
&\quad = -\frac{1}{\rho r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \phi} + \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rv_\phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} - \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta}\right. \\
&\qquad \left. +\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r^2\sin^2\theta}\right], \qquad (77)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{2v_r}{r} + \frac{v_\theta\cot\theta}{r} = 0 \qquad (78)$$

3.2.3 非圧縮の場合の Navier-Stokes 方程式

次の仮定が成り立つ場合を考える.

- 非圧縮流体である: $\dfrac{d\rho}{dt} = 0$
- 粘性率 η が流体中で大きく変化しない.

非圧縮流体の Navier-Stokes 方程式は次のようになる.

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} - \rho\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}. \qquad (79)$$

ベクトル形式で書けば

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\boldsymbol{v}\right) = -\mathrm{grad}p + \eta\nabla^2\boldsymbol{v} - \rho\cdot\mathrm{grad}\Phi. \qquad (80)$$

あるいは ρ で割って

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p + \nu\nabla^2\boldsymbol{v} - \mathrm{grad}\Phi. \qquad (81)$$

$\nu \equiv \dfrac{\eta}{\rho}$ は動粘性係数（率）と呼ばれる.

3.3 等方ニュートン流体のエネルギー保存則

一般的な力学的エネルギーの式と内部エネルギーの式を以下のようなものであった.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho\left[\frac{1}{2}v_i^2+\Phi\right]\right\}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\rho v_k\left[\frac{1}{2}v_i^2+\Phi\right]+pv_k-v_i\sigma'_{ik}\right\}=p\mathrm{div}\boldsymbol{v}-\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}, \tag{82}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon)+\mathrm{div}(\rho\varepsilon\boldsymbol{v})=-p\mathrm{div}\boldsymbol{v}+\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}-\mathrm{div}\boldsymbol{q}+Q. \tag{83}$$

この $\sigma'_{ik}\dfrac{\partial v_i}{\partial x_k}$ の表式を求めておく. これは粘性散逸項である.

3.3.1 粘性散逸項

等方的なニュートン流体の σ_{ik} の表式を用いると次式になる.

$$\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}=\eta\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)+\zeta\delta_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}. \tag{84}$$

(84) の右辺第 1 項は

$$\eta\underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial x_k}}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)=\eta\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) \tag{85}$$

$$=\frac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2+\frac{1}{2}\eta\cdot\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_m}{\partial x_m}\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)}_{\text{前にある}\delta_{ik}\text{をかけると消える}} \tag{86}$$

$$=\frac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2 \tag{87}$$

となる. ここで, 下から 2 つめの式の第 2 項は以下のようにして消える.

$$\frac{1}{2}\eta\cdot\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_m}{\partial x_m}\cdot\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) \tag{88}$$

$$=\frac{1}{2}\eta\cdot\frac{2}{3}\frac{\partial v_m}{\partial x_m}\cdot\left(\delta_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\delta_{ik}\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)=\frac{1}{2}\eta\cdot\frac{2}{3}\frac{\partial v_m}{\partial x_m}\cdot\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_k}-\frac{2}{3}3\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) \tag{89}$$

$$=0. \tag{90}$$

(84) の右辺第 2 項は

$$\zeta\delta_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}=\zeta\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}=\zeta(\mathrm{div}\boldsymbol{v})^2. \tag{91}$$

よって

$$\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}=\frac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2+\zeta(\mathrm{div}\boldsymbol{v})^2. \tag{92}$$

$\eta>0, \zeta>0$ ならともに正定値. 運動エネルギーの散逸を表現している.

3.3.2 熱力学の式

等方 Newton 流体の内部エネルギー, エンタルピー, エントロピーの式は以下の通り.

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\varepsilon\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2 + \zeta(\mathrm{div}\boldsymbol{v})^2 - p\mathrm{div}\boldsymbol{v} - \mathrm{div}\boldsymbol{q} + Q, \tag{93}$$

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho h\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2 + \zeta(\mathrm{div}\boldsymbol{v})^2 - \mathrm{div}\boldsymbol{q} + \frac{dp}{dt} + Q, \tag{94}$$

$$\rho T\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\right)s = \frac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2 + \zeta(\mathrm{div}\boldsymbol{v})^2 - \mathrm{div}\boldsymbol{q} + Q. \tag{95}$$

非圧縮流体の場合,

$$\frac{\partial}{\partial}(\rho\varepsilon) + \mathrm{div}(\rho\varepsilon\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 - \mathrm{div}\boldsymbol{q} + Q, \tag{96}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \mathrm{div}(\rho h\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 - \mathrm{div}\boldsymbol{q} + \frac{dp}{dt} + Q, \tag{97}$$

$$\rho T\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\right)s = \frac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 - \mathrm{div}\boldsymbol{q} + Q. \tag{98}$$

粘性 · 熱流の効果を無視できる場合 ($\eta = 0$, $\zeta = 0$, $\boldsymbol{q} = 0$, $Q = 0$, 圧縮性はあっても良い),

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \mathrm{div}(\rho\varepsilon\boldsymbol{v}) = -p\cdot\mathrm{div}\boldsymbol{v}, \tag{99}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \mathrm{div}(\rho h\boldsymbol{v}) = \frac{dp}{dt}, \tag{100}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\right)s = 0. \tag{101}$$