雲粒落下テスト

雲粒落下過程を導入する為に, 以下の 3 つの場合についてテスト計算を行ない, 得られた数値解と解析解の比較を行なった. 本文書ではそれぞれの問題設定とその解析解について記述する.

1. 落下速度一定の場合

方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_s}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_s V_{term}\right), & (1)\\ V_{term} &= V_0 = \mathrm{const.} & (2) \end{aligned}$$

を初期条件

$$\rho_s(z, t=0) = f(z) \tag{3}$$

の下で解く. この場合の解析解は

$$\rho_s(z, t) = f(z + V_0 t) \tag{4}$$

となる. テスト計算では

$$f(z) = 2.0 \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-5000}{1000}\right)^2\right] \tag{5}$$

とし, $V_0 = 10.0$ の場合について数値解と解析解の比較を行なっている.

2. Stokes 則に関する簡単な問題

方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_s}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_s V_{term}\right), & (6)\\ V_{term} &= \alpha r_d^2, & (7)\\ r_d &= \left(\beta + \gamma\rho_s\right)^{1/3} & (8) \end{aligned}$$

を初期条件

$$\rho_s(z, t=0) = f(z) \tag{9}$$

の下で解く. 但し α, β, γ は定数とする. この場合の解析解は

$$\begin{aligned} \rho_s(z,t) &= f(z+Ut), \qquad (10)\\ U(z,t) &= V_{term} + \frac{2}{3}\alpha\gamma\frac{\rho_s}{r_d} \qquad (11) \end{aligned}$$

となる. テスト計算では

$$f(z) = 1.0 \times 10^{-4} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-5000}{1000}\right)^2\right] \qquad (12)$$

とし, $\alpha = 2.0 \times 10^8$, $\beta = 10^{-21}$, $\gamma = 3.0 \times 10^{-11}$ の場合について数値解と解析解の比較を行なっている.

3. Cunningham 補正を加えた Stokes 則に関する簡単な問題

方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_s}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_s V_{term}\right), \qquad (13)\\ V_{term} &= \alpha r_d^2 C_{sc}, \qquad (14)\\ r_d &= \left(\beta + \gamma\rho_s\right)^{1/3}, \qquad (15)\\ C_{sc} &= 1 + \delta K_n, \qquad (16)\\ K_n &= \frac{\lambda}{r_d} \qquad (17) \end{aligned}$$

を初期条件

$$\rho_s(z, t=0) = f(z) \qquad (18)$$

の下で解く. 但し $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda$ は定数とする. この場合の解析解は

$$\begin{aligned} \rho_s(z,t) &= f(z+Ut), \qquad (19)\\ U(z,t) &= V_{term} - \frac{1}{3}\alpha\gamma\delta\lambda\frac{\rho_s}{r_d^2} + \frac{2}{3}\alpha\gamma\frac{\rho_s}{r_d}\left(1+\delta K_n\right) \qquad (20) \end{aligned}$$

となる. テスト計算では

$$f(z) = 1.0 \times 10^{-4} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-5000}{1000}\right)^2\right] \qquad (21)$$

とし, $\alpha = 2.0 \times 10^8$, $\beta = 10^{-21}$, $\gamma = 3.0 \times 10^{-11}$, $\delta = 4/3$, $\lambda = 10^{-5}$ の場合について数値解と解析解の比較を行なっている.

付録 A: 解析解の導出

非線形移流方程式の解析解の導出

非線形移流方程式

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} = U(\rho_s)\frac{\partial \rho_s}{\partial z} \tag{A.1}$$

の解は f を z, t の任意関数として $\rho_s(z,t) = f(z+Ut)$ となることを示す. $f(z+Ut) \equiv f(\zeta)$ を z で偏微分すると,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial (z+Ut)}{\partial z}\frac{df}{d\zeta} = \frac{df}{d\zeta}. \tag{A.2}$$

また $f(z+Ut) \equiv f(\zeta)$ を t で偏微分すると,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial (z+Ut)}{\partial t}\frac{df}{d\zeta} = U\frac{df}{d\zeta}. \tag{A.3}$$

以上より f は (A.1) を満たすので, $\rho_s(z,t) = f(z+Ut)$ は (A.1) の解である.

(11) の導出

(6) に (7), (8) を代入すると,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_s}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha\rho_s r_d^2\right) \\
&= \alpha r_d^2\frac{\partial \rho_s}{\partial z} + 2\alpha\rho_s r_d\frac{\partial r_d}{\partial z} \\
&= V_{term}\frac{\partial \rho_s}{\partial z} + 2\alpha\rho_s r_d\cdot\frac{1}{3}\frac{\gamma}{r_d^2}\frac{\partial \rho_s}{\partial z} \\
&= \left(V_{term} + \frac{2}{3}\alpha\gamma\frac{\rho_s}{r_d}\right)\frac{\partial \rho_s}{\partial z}. \qquad \text{(A.4)}
\end{aligned}$$

(A.1) の解が $\rho_s(z,t) = f(z+Ut)$ となることを用いると, (A.4) の解は

$$\rho_s(z,t) = f(z+Ut), \tag{A.5}$$

$$U = V_{term} + \frac{2}{3}\alpha\gamma\frac{\rho_s}{r_d} \tag{A.6}$$

となる.

(20) の導出

(13) に (14), (15), (16), (17) を代入すると,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_s}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha\rho_s r_d^2 C_{sc}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial z}\left[\alpha\rho_s r_d^2\left(1+\delta K_n\right)\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial z}\left[\alpha\rho_s r_d^2\left(1+\delta\frac{\lambda}{r_d}\right)\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial z}\left[\alpha\rho_s\left(r_d^2+\delta\lambda r_d\right)\right] \\
&= \alpha\left(r_d^2+\delta\lambda r_d\right)\frac{\partial \rho_s}{\partial z}+\alpha\rho_s\left(2r_d+\delta\lambda\right)\frac{\partial r_d}{\partial z} \\
&= V_{term}\frac{\partial \rho_s}{\partial z}+\alpha\rho_s\left(2r_d+\delta\lambda\right)\cdot\frac{1}{3}\frac{\gamma}{r_d^2}\frac{\partial \rho_s}{\partial z} \\
&= V_{term}\frac{\partial \rho_s}{\partial z}+\left[-\frac{1}{3}\alpha\rho_s\delta\lambda\frac{\gamma}{r_d^2}+2\alpha\rho_s\left(r_d+\delta\lambda\right)\cdot\frac{1}{3}\frac{\gamma}{r_d^2}\right]\frac{\partial \rho_s}{\partial z} \\
&= V_{term}\frac{\partial \rho_s}{\partial z}+\left[-\frac{1}{3}\alpha\gamma\delta\lambda\frac{\rho_s}{r_d^2}+\frac{2}{3}\alpha\gamma\frac{\rho_s}{r_d}\left(1+\delta\frac{\lambda}{r_d}\right)\right]\frac{\partial \rho_s}{\partial z} \\
&= \left[V_{term}-\frac{1}{3}\alpha\gamma\delta\lambda\frac{\rho_s}{r_d^2}+\frac{2}{3}\alpha\gamma\frac{\rho_s}{r_d}\left(1+\delta K_n\right)\right]\frac{\partial \rho_s}{\partial z} \qquad \text{(A.7)}
\end{aligned}
$$

となる. (A.1) の解が $\rho_s(z,t)=f(z+Ut)$ となることを用いると, (A.7) の解は

$$
\begin{aligned}
\rho_s(z,t) &= f(z+Ut), \qquad \text{(A.8)} \\
U &= V_{term}-\frac{1}{3}\alpha\gamma\delta\lambda\frac{\rho_s}{r_d^2}+\frac{2}{3}\alpha\gamma\frac{\rho_s}{r_d}\left(1+\delta K_n\right) \qquad \text{(A.9)}
\end{aligned}
$$

となる.