DCPAM4

第1部　数理モデル化

地球流体電脳倶楽部

2008年6月10日 (DCPAM4-20080609-1)

目 次

1 この文書について 1
1.1 この文書について 1

2 座標系 2
2.1 座標系 2

3 支配方程式・力学過程 3
3.1 はじめに 3
3.2 支配方程式 4
3.2.1 連続の式 4
3.2.2 静水圧の式 4
3.2.3 運動方程式 4
3.2.4 熱力学の式 4
3.2.5 水蒸気の式 4
3.2.6 境界条件 5
3.3 水平拡散項 6
3.3.1 波数依存型 6
3.3.2 波数非依存型 6
3.4 文献 6

4 積雲パラメタリゼーション 7
4.1 はじめに 7
4.2 湿潤対流調節 8
4.2.1 はじめに 8
4.2.2 水蒸気が少ないという近似を行う場合 8
4.2.3 温度と比湿の調節量の計算方法 8
4.2.4 水蒸気が少ないという近似をしない場合 11

5 放射 17
5.1 はじめに 17
5.2 入射放射 18
5.2.1 入射フラックス分布 18
5.2.2 年平均日射の場合 18
5.2.3 同期回転惑星の場合の入射フラックス 18
5.2.4 日変化あり・季節変化ありの場合 19
5.3 短波放射 21
5.3.1 短波放射フラックス 21

5.4 長波放射 22

6 地表面過程 23

6.1 はじめに 23

8 鉛直フィルター 24

8.1 背景と目的 24
8.2 基本的な手続き 24
8.3 調節のための基本温度場 24
8.4 調節する部分の決定 24
8.5 調節および誤差の補正 25

A 支配方程式系の導出 1

A.1 設定 1
A.2 基礎方程式系の導出 2
A.2.1 状態方程式 2
A.2.2 連続の式 2
A.2.3 水蒸気の式 3
A.2.4 運動方程式 3
A.2.5 熱力学の式 3
A.3 回転系への変換 5
A.3.1 回転系への変換公式 5
A.3.2 スカラーの変換公式 5
A.3.3 ベクトルの変換公式 5
A.3.4 回転系への変換 6
A.4 球座標への変換 7
A.4.1 直交曲線座標系における微分 7
A.4.2 球座標系における微分 7
A.4.3 球座標への変換 8
A.5 z-座標プリミティブ方程式 9
A.5.1 静力学平衡近似 9
A.5.2 薄い球殻近似 9
A.6 σ-座標プリミティブ方程式 11
A.6.1 σ-座標変換公式 11
A.6.2 σ-座標プリミティブ方程式系 12
A.6.3 境界条件 13
A.6.4 傾向方程式 14
A.7 モデル支配方程式 15
A.7.1 渦度方程式と発散方程式 15
A.7.2 変数変換 15

B 地球定数 19

B.1 飽和比湿 19

B.1.1 Tetens の式 19

B.1.2 Nakajima et al. (1992) で用いられた式 19

B.1.3 参考文献 20

B.2 地球大気の物理定数 21

C 謝辞 22

C 謝辞 22

C.1 ライセンス規定 22

C.2 使用上の注意 22

C.3 開発グループメンバー 22

C.3.1 2007 年度 22

第1章　この文書について

1.1　この文書について

この文書は, 地球流体電脳倶楽部惑星大気モデル (DCPAM) の数理モデルを解説したものである.

DCPAM は開発中であり, 本文書の内容とソースコードとは必ずしも一致しない.

2005/04/04 石渡正樹

第 2 章　座標系

2.1　座標系

座標系は, 水平方向には緯度 ϕ, 経度 λ を, 鉛直方向には σ をとる.

手順は,

1. 地球中心, 北極の向き, 赤道面内の経度 0 度の方向を決めて, 極座標系 (r, λ, ϕ) をとる[1].
2. 各緯度経度において, 地表面気圧 p_s をとる位置 r を決める.
3. 鉛直座標軸をとり直す. 気圧を p として, $\sigma = \dfrac{p}{p_s}$ を鉛直座標とする.

である.

91/10/31 保坂征宏

[1]数学での極座標系は緯度でなく余緯度をとる.

第 3 章　支配方程式・力学過程

3.1　はじめに

ここでは支配方程式を記し, 特に力学過程[1]について詳細を記す.

まず支配方程式の中で力学過程と認知される部分・項を示す. ついで各々の詳細を述べる.

91/12/10 沼口敦・保坂征宏

[1]力学過程という単語が適切かどうかは不明である. 実態は, モデルにおいて各格子点で計算されない部分を指す.

3.2 支配方程式

ここでは支配方程式を順に示す. この方程式の詳細に関しては, Haltiner and Williams (1980) もしくは第 A 章 を参照せよ.

3.2.1 連続の式

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \boldsymbol{v}_H \cdot \nabla_\sigma \pi = -\nabla_\sigma \cdot \boldsymbol{v}_H - \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} \tag{3.1}$$

3.2.2 静水圧の式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = -\frac{RT_v}{\sigma} \tag{3.2}$$

3.2.3 運動方程式

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial VA}{\partial \lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial UA}{\partial \mu} + \mathcal{D}(\zeta) \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial UA}{\partial \lambda} + \frac{1}{a}\frac{\partial VA}{\partial \mu} - \nabla_\sigma^2(\Phi + R\bar{T}\pi + KE) + \mathcal{D}(D) \tag{3.4}$$

3.2.4 熱力学の式

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= -\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial UT'}{\partial \lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial VT'}{\partial \mu} + T'D \\ &\quad -\dot{\sigma}\frac{\partial T}{\partial \sigma} + \kappa T\left(\frac{\partial \pi}{\partial t} + \boldsymbol{v}_H \cdot \nabla_\sigma \pi + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\right) + \frac{Q}{C_p} + \mathcal{D}(T) + \mathcal{D}'(\boldsymbol{v}) \end{aligned} \tag{3.5}$$

3.2.5 水蒸気の式

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} &= -\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial Uq}{\partial \lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial Vq}{\partial \mu} + qD \\ &\quad -\dot{\sigma}\frac{\partial q}{\partial \sigma} + S_q + \mathcal{D}(q) \end{aligned} \tag{3.6}$$

ここで,

$$\theta \equiv T\,(p/p_0)^{-\kappa} \tag{3.7}$$

$$\kappa \equiv R/C_p \tag{3.8}$$

$$\Phi \equiv gz \tag{3.9}$$

$$\pi \equiv \ln p_S \tag{3.10}$$

93/06/16 沼口敦・保坂征宏
2005/04/04 石渡正樹

$$
\begin{aligned}
\dot{\sigma} &\equiv \frac{d\sigma}{dt} && (3.11)\\
\mu &\equiv \sin\varphi && (3.12)\\
T_v &\equiv T(1+\epsilon_v q) && (3.13)\\
U &\equiv u\cos\varphi && (3.14)\\
V &\equiv v\cos\varphi && (3.15)\\
\zeta &\equiv \frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial V}{\partial \lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial U}{\partial \mu} && (3.16)\\
D &\equiv \frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial U}{\partial \lambda} + \frac{1}{a}\frac{\partial V}{\partial \mu} && (3.17)\\
UA &\equiv (\zeta+f)V - \dot{\sigma}\frac{\partial U}{\partial \sigma} - \frac{RT'}{a}\frac{\partial \pi}{\partial \lambda} + \mathcal{F}_\lambda \cos\varphi && (3.18)\\
VA &\equiv -(\zeta+f)U - \dot{\sigma}\frac{\partial V}{\partial \sigma} - \frac{RT'}{a}(1-\mu^2)\frac{\partial \pi}{\partial \mu} + \mathcal{F}_\varphi \cos\varphi && (3.19)\\
KE &\equiv \frac{U^2+V^2}{2(1-\mu^2)} && (3.20)\\
T &\equiv \bar{T}(\sigma) + T' && (3.21)\\
\boldsymbol{v}_H\cdot\nabla &\equiv \frac{u}{a\cos\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_\sigma + \frac{v}{a}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)_\sigma \\
&= \frac{U}{a(1-\mu^2)}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_\sigma + \frac{V}{a}\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\right)_\sigma && (3.22)\\
\nabla^2_\sigma &\equiv \frac{1}{a^2(1-\mu^2)}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu}\right]. && (3.23)
\end{aligned}
$$

ただし, $\mathcal{D}(\zeta), \mathcal{D}(D), \mathcal{D}(T), \mathcal{D}(q)$ は水平拡散項であり, 3.3 で説明される. $\mathcal{F}_\lambda, \mathcal{F}_\varphi$ は小規模運動過程による力である. Q は放射, 凝結, 小規模運動過程等による加熱・温度変化, S_q は凝結, 小規模運動過程等による水蒸気ソース項, $\mathcal{D}'(\boldsymbol{v})$ は摩擦熱である.

3.2.6 境界条件

鉛直流に関する境界条件は

$$
\dot{\sigma} = 0 \quad at \quad \sigma = 0,\ 1. \tag{3.24}
$$

である. よって (3.1) から, 地表気圧の時間変化式と σ 系での鉛直速度 $\dot{\sigma}$ を求める診断式

$$
\frac{\partial \pi}{\partial t} = -\int_0^1 \boldsymbol{v}_H\cdot\nabla_\sigma \pi d\sigma - \int_0^1 D d\sigma, \tag{3.25}
$$

$$
\dot{\sigma} = -\sigma\frac{\partial \pi}{\partial t} - \int_0^\sigma D d\sigma - \int_0^\sigma \boldsymbol{v}_H\cdot\nabla_\sigma \pi d\sigma, \tag{3.26}
$$

が導かれる.

ただし熱的境界条件については 6 章において記述する.

[2]

3.3 水平拡散項

3.3.1 波数依存型

水平拡散項は, 次のように ∇^{N_D} の形で計算されるのが普通である.

$$\mathcal{D}(\zeta) = -K_{HD}\left[(-1)^{N_D/2}\nabla^{N_D} - \left(\frac{2}{a^2}\right)^{N_D/2}\right]\zeta, \tag{3.27}$$

$$\mathcal{D}(D) = -K_{HD}\left[(-1)^{N_D/2}\nabla^{N_D} - \left(\frac{2}{a^2}\right)^{N_D/2}\right]D, \tag{3.28}$$

$$\mathcal{D}(T) = -(-1)^{N_D/2}K_{HD}\nabla^{N_D}T, \tag{3.29}$$

$$\mathcal{D}(q) = -(-1)^{N_D/2}K_{HD}\nabla^{N_D}q. \tag{3.30}$$

この水平拡散項は計算の安定化のための意味合いが強い. 小さなスケールに選択的な水平拡散を表すため, N_D としては, 4∼16 を用いる.

3.3.2 波数非依存型

水平拡散を波数に依存しない一様な値にすることもできる. 詳細省略.

3.4 文献

Haltiner, G.J. and Williams, R.T., 1980: Numerical Prediction and Dynamic Meteorology (2nd ed.). *John Wiley & Sons*, 477pp.

93/06/16 沼口敦・保坂征宏
[2](2005/4/4 石渡) 力学過程という節が昔存在していたが, 必要か???

第4章　積雲パラメタリゼーション

4.1　はじめに

大気大循環モデルにおいては積雲を様に表現するだけの分解能を持たないので, 雲の発生する条件並びに雲が大気大循環に与える影響については何らかの方法で評価せざるを得ない. 雲が発生する条件および雲が大気大循環に与える影響のうちの熱・運動量輸送効果については[1], 大規模場の速度や熱力学的諸量から評価することが多い. この評価方法は一般に積雲パラメタリゼーションと呼ばれ, 特に以下の型のものが良く用いられる.

- 湿潤対流調節
- クオスキーム
- 浅い積雲[2]
- 荒川シューバートスキーム[3]

また, そもそも大気が過飽和状態にあれば降水が起こる. これを大規模凝結という.

以下では各種パラメタリゼーション並びに大規模凝結について解説する.

93/03/18 保坂征宏
97/02/13 堀之内武

[1]雲が大気大循環に与える他の効果として放射が知られる.
[2]dennou モデルには Tiedtke による, 係数を増やす形のものがある.
[3]dcpam には現在存在しない.

4.2 湿潤対流調節

4.2.1 はじめに

連続した 2 つのレベルの間の層において, 次の条件が満たされる時調節を行う.

1. 温度減率が湿潤断熱減率よりも大きい
2. 飽和もしくは過飽和.

4.2.2 水蒸気が少ないという近似を行う場合

上記の条件 (1) に関して,

$$\frac{ds}{dz} < 0 \tag{4.1}$$

の条件を, 「水蒸気が少ない」という近似をふんだんに用いて書きかえると

$$\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{RT}{c_p p}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{L}{c_p}\frac{\partial q^*}{\partial z} < 0 \tag{4.2}$$

となる.
上記の条件 (2) に関しては, そのまま使う.
これらを用いて温度と比湿を調節するのが dcpam のデフォルトの湿潤対流調節スキームである.
以下, スキームの定式化の説明を行う. (差分法と混ざった話になってしまっているので, あとでちゃんと整理が必要だとおもう).

4.2.3 温度と比湿の調節量の計算方法

比湿と温度を, $(\hat{q}, \hat{T})$ から (q, T) へ調節するものとする.
条件式は以下の通りである.

$$q_{k-1} = q^*(T_{k-1}, p_{k-1}), \tag{4.3}$$

$$q_k = q^*(T_k, p_k) \tag{4.4}$$

$$T_{k-1} - T_k + \frac{L}{C_p}\left\{q^*(T_{k-1}, p_{k-1}) - q^*(T_k, p_k)\right\} - \frac{R}{C_p}\frac{\Delta p_{k-1/2}}{p_{k-1/2}}\frac{T_{k-1} + T_k}{2} = 0 \tag{4.5}$$

$$(c_p T_k + L q_k)\Delta p_k + (c_p T_{k-1} + L q_{k-1})\Delta p_{k-1} = (c_p \hat{T}_k + L\hat{q}_k)\Delta p_k + (c_p \hat{T}_{k-1} + L\hat{q}_{k-1})\Delta p_{k-1} \tag{4.6}$$

解は以下のようになる (で, 良いんだっけかな?)

- q_k, q_{k-1} ($q \ll 1$ は使っていない)

  ΔT_k, ΔT_{k-1} が求められたとすると, 「飽和するべし」という条件から,

  $$q_k = q^*(\hat{T}_k, p_k) + \left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{\hat{T}_k} \cdot \Delta T_k, \tag{4.7}$$

  $$q_{k-1} = q^*(\hat{T}_{k-1}, p_{k-1}) + \left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{\hat{T}_{k-1}} \cdot \Delta T_{k-1} \tag{4.8}$$

  によって計算できる.

2006/10/27 石渡正樹

- T_{k-1} ($q \ll 1$ は使っていない)

  ΔT_k がわかったとすると,

$$q_k = q^*(\hat{T}_k, p_k) + \left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{\hat{T}_k} \cdot \Delta T_k \tag{4.9}$$

  もわかる.

  $\sum h = 0$ より

$$\begin{aligned}(c_p T_{k-1} + L q_{k-1})\Delta p_{k-1} - (c_p \hat{T}_{k-1} + L\hat{q}_{k-1})\Delta p_{k-1} &= -(c_p T_k + L q_k)\Delta p_k + (c_p \hat{T}_k + L\hat{q}_k)\Delta p_k, \\ \left\{\Delta T_{k-1} + \frac{L}{c_p}(q_{k-1} - \hat{q}_{k-1})\right\}\Delta p_{k-1} &= -\left\{\Delta T_k + \frac{L}{c_p}(q_k - \hat{q}_k)\right\}\Delta p_k,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left[\Delta T_{k-1} + \frac{L}{c_p}\left\{q^*(\hat{T}_{k-1}) + \left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k-1}\Delta T_{k-1} - \hat{q}_{k-1}\right\}\right]\Delta p_{k-1} \\ &= -\left[\Delta T_k + \frac{L}{c_p}\left\{q^*(T_k) + \left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_k \Delta T_k - \hat{q}_k\right\}\right]\Delta p_k, \\ &\left\{1 + \frac{L}{c_p}\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k-1}\right\}\Delta T_{k-1}\Delta p_{k-1} + \frac{L}{c_p}\left\{q^*(\hat{T}_{k-1}) - \hat{q}_{k-1}\right\}\Delta p_{k-1} \\ &= -\left[1 + \frac{L}{c_p}\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_k\right]\Delta T_k \Delta p_k - \frac{L}{c_p}\left\{q^*(\hat{T}_k) - \hat{q}_k\right\}\Delta p_k,\end{aligned}$$

  ここで

$$\gamma_k \equiv \frac{L}{c_p}\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_k \tag{4.10}$$

  とおくと,

$$\begin{aligned}&\{1 + \gamma_{k-1}\}\Delta T_{k-1}\Delta p_{k-1} \\ &= -(1+\gamma_k)\Delta T_k \Delta p_k + \frac{L}{c_p}\left[\left\{\hat{q}_{k-1} - q^*(\hat{T}_{k-1})\right\}\Delta p_{k-1} + \left\{\hat{q}_k - q^*(\hat{T}_k)\right\}\Delta p_k\right]\end{aligned} \tag{4.11}$$

  となる. ここで,

$$\Delta\hat{Q} \equiv \left\{\hat{q}_{k-1} - q^*(\hat{T}_{k-1})\right\}\Delta p_{k-1} + \left\{\hat{q}_k - q^*(\hat{T}_k)\right\}\Delta p_k \tag{4.12}$$

  とおき, ΔT_{k-1} について解けば,

$$\begin{aligned}\{1 + \gamma_{k-1}\}\Delta T_{k-1}\Delta p_{k-1} &= -(1+\gamma_k)\Delta T_k \Delta p_k + \frac{L}{c_p}\Delta\hat{Q}, \\ \Delta T_{k-1} &= -\frac{1+\gamma_k}{1+\gamma_{k-1}}\frac{\Delta p_k}{\Delta p_{k-1}}\Delta T_k + \frac{1}{1+\gamma_{k-1}}\frac{L}{c_p}\Delta\hat{Q}\frac{1}{\Delta p_{k-1}}\end{aligned} \tag{4.13}$$

  となる.

- T_k

  断熱条件

$$\frac{\partial S}{\partial z} = 0 \tag{4.14}$$

の式より (最初の $q(T_{k-1},p_{k-1})$ って $q^*(T_{k-1},p_{k-1})$ とするのが正しい???),

$$
\begin{aligned}
&T_{k-1}-T_k+\frac{L}{c_p}\left\{q(T_{k-1},p_{k-1})-q^*(T_k,p_k)\right\}-\frac{R}{c_p}\frac{\Delta p_{k-1/2}}{p_{k-1/2}}\frac{T_{k-1}+T_k}{2}=0,\\
&\hat{T}_{k-1}+\Delta T_{k-1}-\left(\hat{T}_k+\Delta T_k\right)+\frac{L}{c_p}\left\{q^*(\hat{T}_{k-1})+\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k-1}\Delta T_{k-1}-q^*(\hat{T}_k)-\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k}\Delta T_k\right\}\\
&\quad-\frac{R}{c_p}\frac{\Delta p_{k-1/2}}{p_{k-1/2}}\frac{\hat{T}_{k-1}+\Delta T_{k-1}+\hat{T}_k+\Delta T_k}{2}=0,\\
&\hat{T}_{k-1}-\hat{T}_k+\frac{L}{c_p}\left\{q^*(\hat{T}_{k-1})-q^*(\hat{T}_k)\right\}-\frac{R}{c_p}\frac{\Delta p_{k-1/2}}{p_{k-1/2}}\frac{\hat{T}_{k-1}+\hat{T}_k}{2}\\
&\quad+\Delta T_{k-1}-\Delta T_k+\frac{L}{c_p}\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k-1}\Delta T_{k-1}-\frac{L}{c_p}\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k}\Delta T_k-\frac{R}{c_p}\frac{\Delta p_{k-1/2}}{p_{k-1/2}}\frac{\Delta T_{k-1}+\Delta T_k}{2}
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

ここで,

$$
St\equiv\hat{T}_{k-1}-\hat{T}_k+\frac{L}{c_p}\left\{q^*(\hat{T}_{k-1})-q^*(\hat{T}_k)\right\}-\frac{R}{c_p}\frac{\Delta p_{k-1/2}}{p_{k-1/2}}\frac{\hat{T}_{k-1}+\hat{T}_k}{2}
\tag{4.16}
$$

とおくと,

$$
\begin{aligned}
&\Delta T_{k-1}-\Delta T_k+\gamma_{k-1}\Delta T_{k-1}-\gamma_k\Delta T_k-\frac{R}{c_p}\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}\Delta T_{k-1}-\frac{R}{c_p}\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}\Delta T_k\\
&\quad=-St,\\
&\left(-1-\gamma_k-\frac{R}{c_p}\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}\right)\Delta T_k+\left(1+\gamma_{k-1}-\frac{R}{c_p}\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}\right)\Delta T_{k-1}=-St
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

げー, ノートが間違っているような気がする. 分母に入っている $p_{k-1/2}$ が p_{k-1} になってしまっている....

ここで ΔT_{k-1} の表式を代入する.

$$
\begin{aligned}
&\left(-1-\gamma_k-\frac{R}{c_p}\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}\right)\Delta T_k\\
&+\left(1+\gamma_{k-1}-\frac{R}{c_p}\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}\right)\left(-\frac{1+\gamma_k}{1+\gamma_{k-1}}\frac{\Delta p_k}{\Delta p_{k-1}}\Delta T_k+\frac{1}{1+\gamma_{k-1}}\frac{L}{c_p}\Delta\hat{Q}\frac{1}{\Delta p_{k-1}}\right)\\
&=-St
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

$\kappa=\frac{R}{c_p}$ を使うと (もっと前から使おうよ...)

$$
\begin{aligned}
&\left(-1-\gamma_k-\kappa\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}\right)\Delta T_k\\
&+\left(1+\gamma_{k-1}-\kappa\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}\right)\left(-\frac{1+\gamma_k}{1+\gamma_{k-1}}\frac{\Delta p_k}{\Delta p_{k-1}}\Delta T_k+\frac{1}{1+\gamma_{k-1}}\frac{L}{c_p}\Delta\hat{Q}\frac{1}{\Delta p_{k-1}}\right)\\
&=-St
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

この式を ΔT_k について解く.

$$
\begin{aligned}
&\left[(-1-\gamma_k)-\kappa\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}+\left(1+\gamma_{k-1}-\kappa\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}\right)\left(-\frac{1+\gamma_k}{1+\gamma_{k-1}}\frac{\Delta p_k}{\Delta p_{k-1}}\right)\right]\Delta T_k\\
&=-St-\left(1+\gamma_{k-1}-\kappa\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}\right)\frac{1}{1+\gamma_{k-1}}\frac{L}{c_p}\Delta\hat{Q}\frac{1}{\Delta p_{k-1}}
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Delta T_k \\
&= \frac{-St - \left(1+\gamma_{k-1} - \kappa\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}\right)\frac{1}{1+\gamma_{k-1}}\frac{L}{c_p}\Delta\hat{Q}\frac{1}{\Delta p_{k-1}}}{(-1-\gamma_k) - \kappa\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}} + \left(1+\gamma_{k-1} - \kappa\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}\right)\left(-\frac{1+\gamma_k}{1+\gamma_{k-1}}\frac{\Delta p_k}{\Delta p_{k-1}}\right)} \\
&= \frac{St + \left(1+\gamma_{k-1} - \kappa\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}\right)\frac{1}{1+\gamma_{k-1}}\frac{L}{c_p}\Delta\hat{Q}\frac{1}{\Delta p_{k-1}}}{(1+\gamma_k) + \kappa\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}} + \left(1+\gamma_{k-1} - \kappa\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}\right)\frac{1+\gamma_k}{1+\gamma_{k-1}}\frac{\Delta p_k}{\Delta p_{k-1}}} \\
&= \frac{(1+\gamma_{k-1})\Delta p_{k-1}St + \left(1+\gamma_{k-1} - \kappa\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}\right)\frac{L}{c_p}\Delta\hat{Q}}{(1+\gamma_k)(1+\gamma_{k-1})\Delta p_{k-1} + \kappa\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}(1+\gamma_{k-1})\Delta p_{k-1} + \left(1+\gamma_{k-1} - \kappa\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}\right)(1+\gamma_k)\Delta p_k} \\
&= \frac{(1+\gamma_{k-1})\Delta p_{k-1}St + \left(1+\gamma_{k-1} - \kappa\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}\right)\frac{L}{c_p}\Delta\hat{Q}}{(1+\gamma_k)(1+\gamma_{k-1})(\Delta p_{k-1}+\Delta p_k) + \kappa\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}\left\{(1+\gamma_{k-1})\Delta p_{k-1} - (1+\gamma_k)\Delta p_k\right\}}
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

4.2.4 水蒸気が少ないという近似をしない場合

l が一定の場合,

$$
\begin{aligned}
\frac{ds}{dt} &= -R_d\frac{d}{dt}(\ln p_d) + \left(1+\frac{q}{1-q}\right)c_p\frac{d}{dt}(\ln T) + l\frac{d}{dt}\frac{r}{T} \\
&= -R_d\frac{d}{dt}\left\{\ln(p(1-q))\right\} + \frac{1}{1-q}c_p\frac{d}{dt}(\ln T) + l\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{T}\frac{q}{1-q}\right)
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

全部 q を使って書き換えた. 更に変形すると

$$
\frac{ds}{dt} = -R_d\frac{1}{p(1-q)}\frac{d}{dt}\left\{p(1-q)\right\} + \frac{1}{1-q}\frac{c_p}{T}\frac{dT}{dt} + l\left[-\frac{1}{T^2}\frac{dT}{dt}\frac{q}{1-q} + \frac{1}{T}\frac{d}{dt}\left(\frac{q}{1-q}\right)\right] \tag{4.23}
$$

これより, $\frac{dS}{dz} = 0$ となる条件は

$$
-\frac{R_d}{p(1-q)}\frac{d}{dz}\left\{p(1-q)\right\} + \frac{1}{1-q}\frac{c_p}{T}\frac{dT}{dz} - \frac{l}{T^2}\frac{q}{1-q}\frac{dT}{dz} + \frac{l}{T}\frac{d}{dz}\left(\frac{q}{1-q}\right) = 0 \tag{4.24}
$$

$dS = 0$ の式をどのような形にするのが best なのかはよくわからない. とりあえず, 扱いが容易かなと思った分母を全部払った形にしてみる.

$$
\begin{aligned}
-\frac{R_d}{p(1-q)}\frac{d}{dz}\left\{p(1-q)\right\} + \frac{1}{1-q}\frac{c_p}{T}\frac{dT}{dz} - \frac{l}{T^2}\frac{q}{1-q}\frac{dT}{dz} + \frac{l}{T}\frac{\frac{dq}{dz}(1-q) - q\frac{d}{dz}(1-q)}{(1-q)^2} &= 0, \\
-\frac{R_d}{p(1-q)}\frac{d}{dz}\left\{p(1-q)\right\} + \frac{1}{1-q}\frac{c_p}{T}\frac{dT}{dz} - \frac{l}{T^2}\frac{q}{1-q}\frac{dT}{dz} + \frac{l}{T}\frac{1}{(1-q)}\frac{dq}{dz} + \frac{l}{T}\frac{q}{(1-q)^2}\frac{dq}{dz} &= 0
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

この式の両辺に $T^2(1-q)^2$ をかける.

$$
\begin{aligned}
-\frac{R_d}{p}T^2(1-q)\frac{d}{dz}\left\{p(1-q)\right\} + c_pT(1-q)\frac{dT}{dz} - lq(1-q)\frac{dT}{dz} + lT(1-q)\frac{dq}{dz} + lTq\frac{dq}{dz} &= 0, \\
-\frac{R_d}{p}T^2(1-q)\frac{d}{dz}\left\{p(1-q)\right\} + c_pT(1-q)\frac{dT}{dz} - lq(1-q)\frac{dT}{dz} + lT\frac{dq}{dz} &= 0
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

更に dz をかければ

$$
-\frac{R_d}{p}T^2(1-q)d\left\{p(1-q)\right\} + c_pT(1-q)dT - lq(1-q)dT + lTdq = 0, \tag{4.27}
$$

近似をせずに, 分母を払った形の式をそのまま離散化する.

$$
\begin{aligned}
-\frac{R_d}{p_{k-1/2}}T_{k-1/2}^2(1-q_{k-1/2})\left[p_{k-1}(1-q_{k-1})-p_k(1-q_k)\right]+c_p(1-q_{k-1/2})T_{k-1/2}(T_{k-1}-T_k) \\
-lq_{k-1/2}(1-q_{k-1/2})(T_{k-1}-T_k)+lT_{k-1/2}(q_{k-1}-q_k)=0, \qquad (4.28)
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
T_{k-1/2} &= \frac{T_{k-1}+T_k}{2}, && (4.29)\\
q_{k-1/2} &= \frac{q_{k-1}+q_k}{2} && (4.30)
\end{aligned}
$$

とすると (これ, 本当は良くないのだろう. $T_{k-1/2}$ については Arakawa and Suarez (1983) の正しい補間式を使うべきなような気がする. しかし, agcm5 時代に, サブルーチンの引数を変えるのが嫌だったのでこうしている. dcpam ではサブルーチン内で $T_{k-1/2}$ を作るのでも良いかもしれない),

$$
\begin{aligned}
&-\frac{R_d}{p_{k-1/2}}\left(\frac{T_{k-1}+T_k}{2}\right)^2\left(1-\frac{q_{k-1}+q_k}{2}\right)\left[p_{k-1}(1-q_{k-1})-p_k(1-q_k)\right]\\
&\quad+c_p\left(1-\frac{q_{k-1}+q_k}{2}\right)\frac{T_{k-1}+T_k}{2}(T_{k-1}-T_k)\\
&\quad-l\frac{q_{k-1}+q_k}{2}\left(1-\frac{q_{k-1}+q_k}{2}\right)(T_{k-1}-T_k)\\
&\quad+l\frac{T_{k-1}+T_k}{2}(q_{k-1}-q_k)=0,\\
&-\frac{R_d}{c_p}\left(\frac{T_{k-1}+T_k}{2}\right)^2\left(1-\frac{q_{k-1}+q_k}{2}\right)\left[\frac{p_{k-1}}{p_{k-1/2}}(1-q_{k-1})-\frac{p_k}{p_{k-1/2}}(1-q_k)\right]\\
&\quad+\left(1-\frac{q_{k-1}+q_k}{2}\right)\frac{T_{k-1}+T_k}{2}(T_{k-1}-T_k)\\
&\quad-\frac{L}{c_p}\frac{q_{k-1}+q_k}{2}\left(1-\frac{q_{k-1}+q_k}{2}\right)(T_{k-1}-T_k)\\
&\quad+\frac{L}{c_p}\frac{T_{k-1}+T_k}{2}(q_{k-1}-q_k)=0 \qquad (4.31)
\end{aligned}
$$

潜熱が大文字になっちゃった... 最初から L にしておくべき.
ΔT_{k-1} などを使って書き換える.

$$
\begin{aligned}
&-\frac{R_d}{c_p}\frac{1}{4}\left(\hat{T}_{k-1}+\Delta T_{k-1}+\hat{T}_k+\Delta T_k\right)^2\\
&\quad\times\left\{1-\frac{1}{2}\left(q^*(\hat{T}_{k-1})+\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k-1}\Delta T_{k-1}+q^*(\hat{T}_k)+\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_k\Delta T_k\right)\right\}\\
&\quad\times\left[\frac{p_{k-1}}{p_{k-1/2}}\left(1-q^*(\hat{T}_{k-1})-\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k-1}\Delta T_{k-1}\right)-\frac{p_k}{p_{k-1/2}}\left(1-q^*(\hat{T}_k)-\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_k\Delta T_k\right)\right]\\
&+\left\{1-\frac{1}{2}\left(q^*(\hat{T}_{k-1})+\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k-1}\Delta T_{k-1}+q^*(\hat{T}_k)+\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_k\Delta T_k\right)\right\}\\
&\quad\times\frac{1}{2}\left(\hat{T}_{k-1}+\Delta T_{k-1}+\hat{T}_k+\Delta T_k\right)(\hat{T}_{k-1}+\Delta T_{k-1}-\hat{T}_k-\Delta T_k)\\
&-\frac{L}{c_p}\frac{1}{2}\left(q^*(\hat{T}_{k-1})+\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k-1}\Delta T_{k-1}+q^*(\hat{T}_k)+\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_k\Delta T_k\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\times\left\{1-\frac{1}{2}\left(q^*(\hat{T}_{k-1})+\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k-1}\Delta T_{k-1}+q^*(\hat{T}_k)+\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_k\Delta T_k\right)\right\}\\
&\times(\hat{T}_{k-1}+\Delta T_{k-1}-\hat{T}_k-\Delta T_k)\\
&+\frac{L}{c_p}\frac{1}{2}\left(\hat{T}_{k-1}+\Delta T_{k-1}+\hat{T}_k+\Delta T_k\right)\\
&\times\left(q^*(\hat{T}_{k-1})+\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k-1}\Delta T_{k-1}-q^*(\hat{T}_k)-\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_k\Delta T_k\right)=0 \qquad (4.32)
\end{aligned}
$$

ここで, 以下の変数達を導入する.

$$MM \equiv 1-\frac{1}{2}q^*(\hat{T}_{k-1})-\frac{1}{2}q^*(\hat{T}_k), \qquad (4.33)$$

$$D_{k-1} \equiv \left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k-1}, \qquad (4.34)$$

$$D_{k-1} \equiv \left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k}, \qquad (4.35)$$

$$TP \equiv \hat{T}_{k-1}+\hat{T}_k, \qquad (4.36)$$

$$TM \equiv \hat{T}_{k-1}-\hat{T}_k, \qquad (4.37)$$

$$M_{k-1} \equiv 1-q^*(\hat{T}_{k-1}), \qquad (4.38)$$

$$M_k \equiv 1-q^*(\hat{T}_k), \qquad (4.39)$$

$$F \equiv \frac{R_d}{c_p}, \qquad (4.40)$$

$$E \equiv \frac{L}{c_p}, \qquad (4.41)$$

$$QP \equiv q^*(\hat{T}_{k-1})+q^*(\hat{T}_k), \qquad (4.42)$$

$$QM \equiv q^*(\hat{T}_{k-1})-q^*(\hat{T}_k), \qquad (4.43)$$

$$P_{k-1} \equiv \frac{p_{k-1}}{p_{k-1/2}}, \qquad (4.44)$$

$$P_k \equiv \frac{p_k}{p_{k-1/2}} \qquad (4.45)$$

これらの記号を用いて, 先程の式を書き換えると以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
&-\frac{F}{4}\left(TP+\Delta T_{k-1}+\Delta T_k\right)^2\left\{MM-\frac{1}{2}D_{k-1}\Delta T_{k-1}-\frac{1}{2}D_k\Delta T_k\right\}\\
&\times\left[P_{k-1}\left(M_{k-1}-D_{k-1}\Delta T_{k-1}\right)-P_k\left(M_k-D_k\Delta T_k\right)\right]\\
&+\frac{1}{2}\left\{MM-\frac{1}{2}\left(D_{k-1}\Delta T_{k-1}+D_k\Delta T_k\right)\right\}\left(TP+\Delta T_{k-1}+\Delta T_k\right)\left(TM+\Delta T_{k-1}-\Delta T_k\right)\\
&-\frac{E}{2}\left(QP+D_{k-1}\Delta T_{k-1}+D_k\Delta T_k\right)\left\{MM-\frac{1}{2}\left(D_{k-1}\Delta T_{k-1}+D_k\Delta T_k\right)\right\}\\
&\times(TM+\Delta T_{k-1}-\Delta T_k)\\
&+\frac{E}{2}\left(TP+\Delta T_{k-1}+\Delta T_k\right)\left(QM+D_{k-1}\Delta T_{k-1}-D_k\Delta T_k\right)=0 \qquad (4.46)
\end{aligned}
$$

この式をまともに解くことは大変なので, やむをえず近似する. Δ が 2 つ以上かかった項を無視することにする. おそらく「1 次近似」と言って良いのだろう, とは思っているが, この近似の妥当性に関して現段階ではまったく検討していない.

式を展開しつつ「2 次以上の項」を順次無視していくと, 以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
&-\frac{F}{4}\left\{TP^2+2TP\cdot(\Delta T_{k-1}+\Delta T_k)\right\}\left(MM-\frac{1}{2}D_{k-1}\Delta T_{k-1}-\frac{1}{2}D_k\Delta T_k\right)\\
&\quad\times(P_{k-1}M_{k-1}-P_{k-1}D_{k-1}\Delta T_{k-1}-P_kM_k+P_kD_k\Delta T_k)\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(MM-\frac{1}{2}D_{k-1}\Delta T_{k-1}-\frac{1}{2}D_k\Delta T_k\right)\{TP\cdot TM+(\Delta T_{k-1}+\Delta T_k)TM+(\Delta T_{k-1}-\Delta T_k)TP\}\\
&\quad-\frac{E}{2}(QP+D_{k-1}\Delta T_{k-1}+D_k\Delta T_k)\\
&\quad\times\left\{MM\cdot TM+(\Delta T_{k-1}-\Delta T_k)MM+\left(-\frac{1}{2}D_{k-1}\Delta T_{k-1}-\frac{1}{2}D_k\Delta T_k\right)TM\right\}\\
&\quad+\frac{E}{2}\{TP\cdot QM+(D_{k-1}\Delta T_{k-1}-D_k\Delta T_k)TP+(\Delta T_{k-1}+\Delta T_k)QM\}=0
\end{aligned}
\tag{4.47}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{F}{4}\left\{TP^2\cdot MM-\frac{1}{2}TP^2(D_{k-1}\Delta T_{k-1}+D_k\Delta T_k)+2TP\cdot MM(\Delta T_{k-1}+\Delta T_k)\right\}\\
&\quad\times\{(P_{k-1}M_{k-1}-P_kM_k)-P_{k-1}D_{k-1}\Delta T_{k-1}+P_kD_k\Delta T_k\}\\
&+\frac{1}{2}\{MM\cdot TP\cdot TM+\{(\Delta T_{k-1}+\Delta T_k)TM+(\Delta T_{k-1}-\Delta T_k)TP\}MM\\
&\quad-TP\cdot TM\left(\frac{1}{2}D_{k-1}\Delta T_{k-1}+\frac{1}{2}D_k\Delta T_k\right)\bigg\}\\
&-\frac{E}{2}\left\{QP\cdot MM\cdot TM+MM\cdot QP(\Delta T_{k-1}-\Delta T_k)+TM\cdot QP\left(-\frac{1}{2}D_{k-1}\Delta T_{k-1}-\frac{1}{2}D_k\Delta T_k\right)\right.\\
&\quad+MM\cdot TM(D_{k-1}\Delta T_{k-1}+D_k\Delta T_k)\}\\
&+\frac{E}{2}\{TP\cdot QM+(TP\cdot D_{k-1}+QM)\Delta T_{k-1}+(-TP\cdot D_k+QM)\Delta T_k\}=0
\end{aligned}
\tag{4.48}
$$

更に第 1 項を展開する.

$$
\begin{aligned}
&-\frac{F}{4}\left[TP^2\cdot MM(P_{k-1}M_{k-1}-P_kM_k)+TP^2\cdot MM\{-P_{k-1}D_{k-1}\Delta T_{k-1}+P_kD_k\Delta T_k\}\right.\\
&\quad\left.+(P_{k-1}M_{k-1}-P_kM_k)\left\{-\frac{1}{2}TP^2(D_{k-1}\Delta T_{k-1}+D_k\Delta T_k)+2TP\cdot MM(\Delta T_{k-1}+\Delta T_k)\right\}\right]\\
&+\frac{1}{2}\{MM\cdot TP\cdot TM+\{(\Delta T_{k-1}+\Delta T_k)TM+(\Delta T_{k-1}-\Delta T_k)TP\}MM\\
&\quad-TP\cdot TM\left(\frac{1}{2}D_{k-1}\Delta T_{k-1}+\frac{1}{2}D_k\Delta T_k\right)\bigg\}\\
&-\frac{E}{2}\left\{QP\cdot MM\cdot TM+MM\cdot QP(\Delta T_{k-1}-\Delta T_k)+TM\cdot QP\left(-\frac{1}{2}D_{k-1}\Delta T_{k-1}-\frac{1}{2}D_k\Delta T_k\right)\right.\\
&\quad+MM\cdot TM(D_{k-1}\Delta T_{k-1}+D_k\Delta T_k)\}\\
&+\frac{E}{2}\{TP\cdot QM+(TP\cdot D_{k-1}+QM)\Delta T_{k-1}+(-TP\cdot D_k+QM)\Delta T_k\}=0
\end{aligned}
\tag{4.49}
$$

この式を ΔT_{k-1} の項と ΔT_k の項にまとめていく. まずばらす.

$$
\begin{aligned}
&-\frac{F}{4}\left[TP^2\cdot MM(P_{k-1}M_{k-1}-P_kM_k)-TP^2\cdot MMP_{k-1}D_{k-1}\Delta T_{k-1}+TP^2\cdot MMP_kD_k\Delta T_k\right.\\
&\quad-\frac{1}{2}(P_{k-1}M_{k-1}-P_kM_k)TP^2D_{k-1}\Delta T_{k-1}-\frac{1}{2}(P_{k-1}M_{k-1}-P_kM_k)TP^2D_k\Delta T_k\\
&\quad+2(P_{k-1}M_{k-1}-P_kM_k)TP\cdot MM\Delta T_{k-1}+2(P_{k-1}M_{k-1}-P_kM_k)TP\cdot MM\Delta T_k]\\
&+\frac{1}{2}\{MM\cdot TP\cdot TM+TM\cdot MM\Delta T_{k-1}+TM\cdot MM\Delta T_k+TP\cdot MM\Delta T_{k-1}-TP\cdot MM\Delta T_k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad -TP\cdot TM\frac{1}{2}D_{k-1}\Delta T_{k-1} - TP\cdot TM\frac{1}{2}D_k\Delta T_k\Big\} \\
&-\frac{E}{2}\Big\{QP\cdot MM\cdot TM + MM\cdot QP\Delta T_{k-1} - MM\cdot QP\Delta T_k - TM\cdot QP\frac{1}{2}D_{k-1}\Delta T_{k-1} - TM\cdot QP\frac{1}{2}D_k\Delta T_k \\
&\quad +MM\cdot TMD_{k-1}\Delta T_{k-1} + MM\cdot TMD_k\Delta T_k\Big\} \\
&+\frac{E}{2}\left\{TP\cdot QM + (TP\cdot D_{k-1}+QM)\Delta T_{k-1} + (-TP\cdot D_k + QM)\Delta T_k\right\} = 0
\end{aligned}
\tag{4.50}
$$

ついで, まとめる.

$$
\begin{aligned}
&-\frac{F}{4}TP^2\cdot MM\,(P_{k-1}M_{k-1}-P_kM_k) \\
&-\frac{F}{4}\left\{-TP^2\cdot MM\cdot P_{k-1}\cdot D_{k-1} + (P_{k-1}M_{k-1}-P_kM_k)\left(-\frac{1}{2}TP^2\cdot D_{k-1} + 2TP\cdot MM\right)\right\}\Delta T_{k-1} \\
&-\frac{F}{4}\left\{TP^2\cdot MM\cdot P_k\cdot D_k + (P_{k-1}M_{k-1}-P_kM_k)\left(-\frac{1}{2}TP^2\cdot D_k + 2TP\cdot MM\right)\right\}\Delta T_k \\
&+\frac{1}{2}MM\cdot TP\cdot TM \\
&+\frac{1}{2}\left\{TM\cdot MM + TP\cdot MM - \frac{1}{2}TP\cdot TM\cdot D_{k-1}\right\}\Delta T_{k-1} \\
&+\frac{1}{2}\left\{TM\cdot MM - TP\cdot MM - \frac{1}{2}TP\cdot TM\cdot D_k\right\}\Delta T_k \\
&-\frac{E}{2}QP\cdot MM\cdot TM \\
&-\frac{E}{2}\left(MM\cdot QP - \frac{1}{2}TM\cdot QP\cdot D_{k-1} + MM\cdot TM\cdot D_{k-1}\right)\Delta T_{k-1} \\
&-\frac{E}{2}\left(-MM\cdot QP - \frac{1}{2}TM\cdot QP\cdot D_k + MM\cdot TM\cdot D_k\right)\Delta T_k \\
&+\frac{E}{2}TP\cdot QM + \frac{E}{2}(TP\cdot D_{k-1}+QM)\Delta T_{k-1} + \frac{E}{2}(-TP\cdot D_k+QM)\Delta T_k = 0
\end{aligned}
\tag{4.51}
$$

ここで, 以下のように変数をまとめる (前の St とはちゃんと対応しているんだろうね???).

$$
\begin{aligned}
St &\equiv \frac{F}{4}TP^2\cdot MM\,(P_{k-1}M_{k-1}-P_kM_k) - \frac{1}{2}MM\cdot TP\cdot TM \\
&\quad +\frac{E}{2}QP\cdot MM\cdot TM - \frac{E}{2}TP\cdot QM && (4.52) \\
B &\equiv -\frac{F}{4}\left\{-TP^2\cdot MM\cdot P_{k-1}\cdot D_{k-1} + (P_{k-1}M_{k-1}-P_kM_k)\left(-\frac{1}{2}TP^2\cdot D_{k-1} + 2TP\cdot MM\right)\right\} \\
&\quad +\frac{1}{2}\left\{TM\cdot MM + TP\cdot MM - \frac{1}{2}TP\cdot TM\cdot D_{k-1}\right\} \\
&\quad -\frac{E}{2}\left(MM\cdot QP - \frac{1}{2}TM\cdot QP\cdot D_{k-1} + MM\cdot TM\cdot D_{k-1}\right) + \frac{E}{2}(TP\cdot D_{k-1}+QM) && (4.53) \\
C &\equiv -\frac{F}{4}\left\{TP^2\cdot MM\cdot P_k\cdot D_k + (P_{k-1}M_{k-1}-P_kM_k)\left(-\frac{1}{2}TP^2\cdot D_k + 2TP\cdot MM\right)\right\} \\
&\quad +\frac{1}{2}\left\{TM\cdot MM - TP\cdot MM - \frac{1}{2}TP\cdot TM\cdot D_k\right\} \\
&\quad -\frac{E}{2}\left(-MM\cdot QP - \frac{1}{2}TM\cdot QP\cdot D_k + MM\cdot TM\cdot D_k\right) + \frac{E}{2}(-TP\cdot D_k+QM) && (4.54)
\end{aligned}
$$

これより,

$$B\Delta T_{k-1} + C\Delta T_k = St \tag{4.55}$$

となる. ここで, $\sum h = 0$ より得られる

$$\begin{aligned}\Delta T_{k-1} &= -\frac{1+\gamma_k}{1+\gamma_{k-1}}\frac{\Delta p_k}{\Delta p_{k-1}}\Delta T_k + \frac{1}{1+\gamma_{k-1}}\frac{L}{c_p}\Delta\hat{Q}\frac{1}{\Delta p_{k-1}} &(4.56)\\ &\equiv \alpha\Delta T_k + \beta &(4.57)\end{aligned}$$

を代入すると

$$B\left(\alpha\Delta T_k + \beta\right) + CT_k = St \tag{4.58}$$

これを, ΔT_k について解けば

$$T_k = \frac{St - \beta B}{C + \alpha B} \tag{4.59}$$

第 5 章　放射

5.1　はじめに

放射過程としては太陽から射出された短波放射と地球において射出された長波放射とに分けてとり扱う.

93/03/18 保坂征宏

惑星名	A_{ins}	B_{ins}	A_ζ	B_ζ
地球	0.127	0.183	0.410	0.590

表 5.1: 各惑星における A_{ins}, B_{ins}, A_ζ, B_ζ の値

5.2 入射放射

この節では大気上端における中心星 (太陽系惑星の場合は太陽) からの入射放射を与える式についての解説をおこなう.

5.2.1 入射フラックス分布

大気上端における入射放射フラックスの分布の式を書きくだす.
入射フラックス F_S^I は, 太陽定数を S_0, 太陽地球間の距離の, その時間平均値との比を r_S, 入射角を ζ とすると,

$$F_S^I(\lambda, \varphi) = -S_0 r_S^{-2} \cos\zeta. \tag{5.1}$$

ζ は次の式で与えられる.

$$\cos\zeta = \cos\varphi \cos\delta_S \cos H + \sin\varphi \sin\delta_S \tag{5.2}$$

δ_S は太陽の赤経, H は時角 (地方時から π を引いたもの) である.

5.2.2 年平均日射の場合

年平均入射量および年平均入射角は, 近似的に, 次のようになる.

$$\overline{F_S^I}(\varphi) \simeq -S_0(A_{ins} + B_{ins}\cos^2\varphi), \tag{5.3}$$

$$\overline{\cos\zeta} \simeq A_\zeta + B_\zeta \cos^2\varphi. \tag{5.4}$$

大気上端におけるアルベド $\mathcal{A}$ を考慮すると

$$\overline{F_S^I}(\varphi) \simeq -S_0(1-\mathcal{A})(A_{ins} + B_{ins}\cos^2\varphi) \tag{5.5}$$

となる. また, モデルで使用する場合 $\overline{\cos\zeta}$ よりも $\overline{\sec\zeta}$ の方が便利である. [1] $\overline{\sec\zeta}$ の式は

$$\overline{\sec\zeta} \simeq \frac{1}{A_\zeta + B_\zeta\cos^2\varphi}. \tag{5.6}$$

A_{ins}, B_{ins}, A_ζ, B_ζ の値を 表 5.1 に示す.

5.2.3 同期回転惑星の場合の入射フラックス

δ を外から与える. これは太陽直下点の緯度. 次に太陽直下点の経度 (degree) $\lambda_{subsolar}$ を与える. これにより時角は

$$H = \lambda - \lambda_{subsolar} * \frac{180}{\pi} \tag{5.7}$$

2007-05-23 石渡正樹
[1](2007-05-23 石渡) なんでだっけ?

となる.

$$\cos\zeta = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cdot\sqrt{1-\sin^2\delta}\cdot\cos H \tag{5.8}$$

入射フラックス分布は

$$F_S^I(\lambda,\varphi) = -S_0(1-\mathcal{A})\cos\zeta \tag{5.9}$$

5.2.4 日変化あり・季節変化ありの場合

ここでは, 日変化も季節変化もある場合の入射フラックスの式を書き下す.
この場合はまだ dcpam3 に実装されていない.
黄経は春分点を 0 度にしてはかる. 理科年表 (1995) によれば, 地球の昇交点黄経は 354.865 度.
時角 H は, 太陽直下点から考えている点まで測った経度方向の角度のようだ.
太陽傾斜角 δ は太陽直下点の緯度. 太陽傾斜角は以下の式で与えられる.

$$\sin\delta = \sin\theta_p\sin(\Phi_0+\Phi) \tag{5.10}$$

θ_p は赤道傾斜角 (いわゆる自転軸の傾き), $\Phi_0+\Phi$ は春分点から測った惑星の位置をあらわす角度である (Φ_0 は春分点から測った近日点での角度, Φ は近日点から測った惑星の位置をあらわす角度). これって黄経で良いの?????
agcm5 においては, 1 年の最初の日が 0 度, 最後の日が 360 度になるように日付けを角度 Φ_{date} に換算し, $\sin\delta$ の計算を

$$\sin\delta = \sin\theta_p\sin\left\{(\Phi_{date}-\Phi_{eqn})\frac{\pi}{180}\right\} \tag{5.11}$$

と行っていた. なお, 離心率を真面目に考えるとこの単純な式ではダメである.
agcm5 における Φ_{eqn} [2] のデフォルト値 の 110 度は何月何日か?

$$110/360*365 = 111 \tag{5.12}$$

1 月 1 日から 111 日目は 4 月 21 日. これ, AGCM5 のバグじゃないか? 変数名から考えても Φ_{eqn} (agcm5 における変数 EQNORB) は春分点の位置だと思う. でもまだ, 符号があってないと思う.
春分点で考えれば, どっちにしろ

$$\sin\delta = 0 \tag{5.13}$$

太陽の天頂角 ζ は, 考えている点において天頂から太陽まで測った角度. 天頂角 ζ は以下の式で与えられる (佐藤ノートの (1) 式).

$$\cos\zeta = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cdot\sqrt{1-\sin^2\delta}\cdot\cos H \tag{5.14}$$

時角 H は以下の式で与えられる. [3]

$$H = TimeRad*2\pi - \pi + \lambda \tag{5.15}$$

[2](2007-05-23 石渡) agcm5 における変数 EQNORB. agcm5 のソースのコメントには昇降点黄経と書かれていたけど, 正しいか?
[3](2007-5-23 石渡) 佐藤ノートでは式与えられていないようだ. この時角の式, 正しいか?

以上の緒量を用いて入射フラックス分布は次のように与えられる.

$$F_S^I(\lambda, \varphi) = -S_0(1 - \mathcal{A})\cos\zeta \tag{5.16}$$

地球の場合の軌道パラメータの値は以下の通り.

赤道傾斜角 θ_p 地球の場合 23 度

$\cos\zeta > 0$ の場合 $(-pi/2 \leq \zeta \leq < \pi/2)$, 太陽は「昇っている」ので昼間. よって, 日射量は

$$F_S = -S_0(1 - \mathcal{A})\cos\zeta \tag{5.17}$$

$\cos\zeta < 0$ の場合, 太陽は「沈んでいる」ので夜間. よって, 日射量は

$$F_S = 0 \tag{5.18}$$

5.3 短波放射

5.3.1 短波放射フラックス

短波放射過程においては, 水蒸気とそれ以外の大気による吸収のみを考慮し多重散乱は考慮しない. 吸収係数の異なった N_S 個の波長帯を考える (k-distribution method). F_S は,

$$\begin{aligned} F_S(z) &= \sum_i^{N_S} a_i \left[(1-\alpha_A)F_S^I \exp\left(-\tau_{S,i}(z)\sec\zeta\right)\right. \\ &\quad \left. -\alpha_g(1-\alpha_A)F_S^I \exp\left(-\tau_{S,i}(0)\sec\zeta\right)\exp\left(-(\tau_{S,i}(0)-\tau_i(z))\sec\zeta_0\right)\right] \end{aligned} \tag{5.19}$$

ここで, F_S^I は大気上端からの入射, ζ は入射角, ζ_0 は散乱光の相当入射角で, $\sec\zeta_0 = 1.66$ とする. α_A は大気の散乱によるアルベドであり, 一定値を与える. α_g は地表面のアルベドである. $\tau_{S,i}(z)$ は, 大気上端を 0 とした光学的厚さであり,

$$\tau_{S,i}(z) = \int_z^\infty k_{S,i}\rho q dz + \int_z^\infty \bar{k}_{S,i}\rho dz \tag{5.20}$$

$k_{S,i}$ は波長帯 i の水蒸気に対する吸収係数, $\bar{k}_{S,i}$ は波長帯 i の水蒸気以外の大気に対する吸収係数である. これら吸収係数は z 等に依存しない一定値を与える. a_i は波長帯 i の放射エネルギーの全体に対する割合である.

地表面での吸収は,

$$F_S(0) = \sum_i^{N_S} a_i(1-\alpha_g)(1-\alpha_A)F_S^I \exp(-\tau_{S,i}(0)\sec\zeta), \tag{5.21}$$

で与えられる.

93/03/18 沼口敦・保坂征宏
2007-05-04 石渡正樹

5.4 長波放射

長波放射過程においては, 水蒸気とそれ以外の大気による吸収と射出のみを考慮する. 吸収係数の異なった N_R 個の波長帯を考える (k-distribution method). F_R は,

$$F_R(z) = (\pi B(T_g) - \pi B(T_s))\,\mathcal{T}^f(z,0) + \pi B(T(z_T))\mathcal{T}^f(z,z_T) - \int_0^{z_T} \frac{d\pi B}{d\xi}\mathcal{T}^f(z,\xi)d\xi \tag{5.22}$$

ここで, $\mathcal{T}^f(z_1,z_2)$ は, $z = z_1, z_2$ 間のフラックス透過関数, $\pi B \equiv \sigma_{SB}T^4$ は放射源関数である.

フラックス透過関数,$\mathcal{T}^f(z_1,z_2)$ は,

$$\mathcal{T}^f(z_1,z_2) = \sum_{i=1}^{N_R} b_i \exp\left(-\delta_R|\tau_{R,i}(z_1) - \tau_{R,i}(z_2)|\right) \tag{5.23}$$

$\tau_i(z)$ は, 大気上端を 0 とした光学的厚さであり,

$$\tau_{R,i}(z) = \int_z^\infty k_{R,i}\rho q dz + \int_z^\infty \bar{k}_{R,i}\rho dz \tag{5.24}$$

$k_{R,i}$ は波長帯 i の水蒸気に対する吸収係数, $\bar{k}_{R,i}$ は波長帯 i の水蒸気以外の大気に対する吸収係数である. これら吸収係数は z 等に依存しない一定値を与える. b_i は波長帯 i の放射エネルギーの全体に対する割合であり, 一定値をとると近似する. また, $\delta_R = 1.5$ を用いる.

93/03/18 沼口敦・保坂征宏

第6章　地表面過程

6.1　はじめに

ここでは地表面モデルについてまとめる.

大気大循環モデルにおける地表面のモデルにはいろいろな種類がある. しかし土壌モデル等を含まない現 AGCM5 において, 地表面での過程と言えるものはバルク法による熱や運動量等のやり取りくらいしかない. それでも, 地表面における諸量は幾つもあり, 放射や重力波抵抗等の大気中の現象にも影響を与える. 地表面における諸量には温度, アルベド, 粗度, 熱容量, 湿潤度 (蒸発のしやすさ), 高度分散 (重力波抵抗パラメタリゼーション用) などがある. これらの多くはファイルなどの形でモデルの外から与える必要がある. 地表面の温度は, 海面の場合外から与えられるが, 陸面の場合予報変数である.

93/03/18 保坂征宏
97/02/13 堀之内武

第8章　鉛直フィルター

8.1　背景と目的

太陽定数を増加させた計算を行ったところ 2-grid noise が生じた．このノイズの振幅は非常に大きくなり計算が破綻する．
このノイズを消すためにフィルターをかける．物理的実体は無い．強いて言えば, 重力波でつぶれるかもね, 程度である．

8.2　基本的な手続き

1. 調節のための基本温度場を決める．
2. 調節を行う部分を決める．具体的には, 全層か一部か．一部としたらどの領域か
3. 温度構造を基本場を調節する．その後, 誤差の補正を行う．

8.3　調節のための基本温度場

ギザギザ成分を取り除いた分布を基本場としたい．そこで「基本場」は次で与えられるとする．

$$T_{Bk} = \frac{T_{k+1/2} + T_{k-1/2}}{2} \tag{8.1}$$

ここで, $1 \leq k \leq KMAX$

8.4　調節する部分の決定

1. 全層の場合
   何も考えずに全部やる
2. ギザギザ部分のみ調節する場合
   以下の式を満たす level k はギザギザな点と判定する．

   $$(T_k - T_{k-1}) \cdot (T_{k+1} - T_k) < 0 \tag{8.2}$$

   実際には, こんな凝ったやってないと思う．

2006/12/01 石渡正樹

8.5 調節および誤差の補正

節のタイトルが正しくないような気がする.「誤差の補正」ではないなあ.

1. 全層で調節を行い, 全層に誤差をばらまく場合.

   これについては未実装である.

   これはもっとも安直な調節方法である. 調節前の温度の値を T_k, 調節後を $\hat{T}_k$ とする.

   何も考えずに調節するなら

   $$\hat{T}_k = T_k + S_{grst}(T_{Bk} - T_k) \tag{8.3}$$

   温度変化量は

   $$\Delta T_k \equiv \hat{T}_k - T_k = S_{grst}(T_{Bk} - T_k) \tag{8.4}$$

   この場合, 全体で

   $$\sum_{k=1}^{KMAX} c_v \Delta T_k \Delta p_k = \sum_{k=1}^{KMAX} c_v S_{grst}(T_{Bk} - T_k)(p_s \Delta\sigma_k) \tag{8.5}$$

   の内部エネルギーをコラムに与えてしまうことになる. これが誤差になる.

   調節の前後で全体の内部エネルギー量に変化がないようにするためには

   $$\sum_{k=1}^{KMAX} \Delta T_k \Delta p_k = 0 \tag{8.6}$$

   としてやらなければいけない. ただし, ここで比熱が一定の場合を仮定した.

   これを解決するもっとも安直な方法は上の誤差を全層にばらまくこと. この場合, 温度の調節量は以下の式で与えられる.

   $$\hat{T}_k = T_k + S_{grst}(T_{Bk} - T_k) - \frac{\sum_{k=1}^{KMAX} S_{grst}(T_{Bk} - T_k)\Delta p_k}{\sum_{k=1}^{KMAX} \Delta p_k} \tag{8.7}$$

   こうすると

   $$\sum_{k=1}^{KMAX} \hat{T}_k \Delta p_k = \sum_{k=1}^{KMAX} \left\{ S_{grst}(T_{Bk} - T_k)\Delta p_k - \frac{\sum_{k=1}^{KMAX} S_{grst}(T_{Bk} - T_k)\Delta p_k}{\sum_{k=1}^{KMAX} \Delta p_k} \Delta p_k \right\} \tag{8.8}$$

   となる.

2. 全層で調節し, 誤差を局所的に解消していく場合

   AGCM5 の場合だと, p2grstA.F

   3 点トリオで考え, そこで生じた誤差をその 3 層にばらまくことにする. 下から順に, 以下の式で温度の調節量を計算していく.

   $$\hat{T}_{k-1} = T_{k-1} + S_{grst}(T_{Bk-1} - T_{k-1}) - \frac{\sum_{k=k-1}^{k+1} S_{grst}(T_{Bk} - T_k)\Delta p_k}{\sum_{k=k-1}^{k+1} \Delta p_k}, \tag{8.9}$$

   $$\hat{T}_k = T_k + S_{grst}(T_{Bk} - T_k) - \frac{\sum_{k=k-1}^{k+1} S_{grst}(T_{Bk} - T_k)\Delta p_k}{\sum_{k=k-1}^{k+1} \Delta p_k}, \tag{8.10}$$

   $$\hat{T}_{k+1} = T_{k+1} + S_{grst}(T_{Bk+1} - T_{k+1}) - \frac{\sum_{k=k-1}^{k+1} S_{grst}(T_{Bk} - T_k)\Delta p_k}{\sum_{k=k-1}^{k+1} \Delta p_k} \tag{8.11}$$

この $\hat{T}$ を用いて, 1 つ上に上がり,

$$
\begin{aligned}
\hat{\hat{T}}_k &= \hat{T}_k + S_{grst}(T_{Bk} - \hat{T}_k) - \frac{\sum_{k=k}^{k+2} S_{grst}(T_{Bk} - \hat{T}_k)\Delta p_k}{\sum_{k=k}^{k+2} \Delta p_k}, \quad (8.12)\\
\hat{\hat{T}}_{k+1} &= \hat{T}_{k+1} + S_{grst}(T_{Bk+1} - \hat{T}_{k+1}) - \frac{\sum_{k=k}^{k+2} S_{grst}(T_{Bk} - \hat{T}_k)\Delta p_k}{\sum_{k=k}^{k+2} \Delta p_k}, \quad (8.13)\\
\hat{T}_{k+2} &= T_{k+1} + S_{grst}(T_{Bk+2} - T_{k+2}) - \frac{\sum_{k=k}^{k+2} S_{grst}(T_{Bk} - \hat{T}_k)\Delta p_k}{\sum_{k=k}^{k+2} \Delta p_k} \quad (8.14)
\end{aligned}
$$

ただし, 右辺 3 項目の分子の和において k が $k+2$ の場合は, $\hat{T}_{k+2}$ ではなく T_{k+2} である (まだ調節を行っていないので).

以上を level を 1 つづつ上がりながら順番に行う.

3. ギザギザ部分だけを調節し誤差を 3 点ごとにばらまく

   下から順に

$$
(T_k - T_{k-1}) \cdot (T_{k+1} - T_k) < 0 \quad (8.15)
$$

   となる部分の 3 点トリオ出 (2) と同じことを行う.

4. ギザギザ部分だけを調節し, 誤差をギザギザ部分全体に均等にばらまく場合

   連続してギザギザ部分になっているところを判定し (1) と同じことをする. 下記のように判定する.

   (a) 下から順に登っていって初めて

$$
(T_k - T_{k-1}) \cdot (T_{k+1} - T_k) < 0 \quad (8.16)
$$

   となったところで, $(k-1)$ level がギザギザ部分の底と判定する.

   (b) ギザギザ部分で登っていって

$$
(T_k - T_{k-1}) \cdot (T_{k+1} - T_k) \geq 0 \quad (8.17)
$$

   となったら, k level がギザギザ部分の天井.

   このように判定されたギザギザ部分全体に誤差をばらまく.

第 A 章　支配方程式系の導出

A.1　設定

全大気は, ともに理想気体である乾燥空気および水蒸気から成る混合大気とする．雲水量は無視する．また, 水蒸気量が全大気に占める割合は小さいと仮定し, 全大気の定圧比熱を乾燥大気の値で近似する．
水蒸気量の保存については, 凝結および蒸発による生成消滅を考慮する．しかし, この量が全大気に与える効果は小さいとし, 全大気の質量保存則, 運動エネルギー保存則, 全エネルギー保存則に影響を及ぼさないとする．
重力加速度は地球中心に向いていると仮定する．また, 運動の水平スケールが鉛直スケールよりもかなり大きい運動を想定し, 静力学平衡近似を行なう．さらに, 運動は地球表面付近に限られることを仮定して近似を行なう．

94/04/13 石渡正樹
97/04/15 赤堀浩司

A.2 基礎方程式系の導出

方程式系は 6 本の予報方程式と 1 本の診断方程式からなる. 予報方程式は, 全質量の連続の式, 水蒸気量の式, 運動方程式 (3 成分), 熱力学の式からなる. これらは, それぞれ, 全質量保存則, 水蒸気量の保存則, 全質量に関する運動量保存則, 全質量に関する全エネルギー保存則から導出する. 診断方程式には, 理想気体の状態方程式を用いる. [1]
!! 注意: この Appendix 中では導出の都合上, 乾燥空気の気体定数を R^d 定圧比熱を c_p^d とし, 全大気の気体定数を R とおいた. しかし, 本文中では, 乾燥空気の気体定数を R, 定圧比熱を c_p と表記している.

A.2.1 状態方程式

乾燥空気, 水蒸気の状態方程式はそれぞれ

$$p^d = \rho^d R^d T, \tag{A.1}$$
$$p^v = \rho^v R^v T, \tag{A.2}$$

である. ここで $\bullet^d$, $\bullet^v$ はそれぞれ乾燥空気および水蒸気に関する量であることを示す. したがって, 全圧 $p = p^d + p^v$ は,

$$p = (\rho^d R^d + \rho^v R^v)T \tag{A.3}$$
$$= \rho R^d (1 + \epsilon_v q)T, \tag{A.4}$$

となる. ここで, $q = \rho_v/\rho$ は比湿, であり, $\epsilon_v \equiv 1/\epsilon - 1$, $\epsilon \equiv R^d/R^v (= 0.622)$ である. したがって, 全大気の状態方程式は,

$$p = \rho R T. \tag{A.5}$$

ただし, $R \equiv R^d(1 + \epsilon_v q)$ である. あるいは, 仮温度 $T_v \equiv T(1 + \epsilon_v q)$ を用いれば,

$$p = \rho R^d T_v. \tag{A.6}$$

A.2.2 連続の式

全大気の質量保存則は, 水蒸気の生成消滅を無視すれば, [2]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) = 0. \tag{A.7}$$

あるいは, ラグランジュ形式で記述すれば,

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0. \tag{A.8}$$

94/04/13 石渡正樹
97/04/15 赤堀浩司
[1] 乾燥空気と水蒸気は, 同じ速度と温度をもつことを暗黙のうちに仮定している. したがって, 水蒸気に関する運動量保存則および全エネルギー保存則および状態方程式を考慮する必要がない.
[2] 次で示すように水蒸気式では生成消滅を含めている. したがって, 全大気の質量保存則は, 水蒸気の生成消滅が起きても全質量が保存するように, 乾燥大気量が変化することを要請していることになる.

A.2.3　水蒸気の式

水蒸気密度 ρ^v に対する質量保存則は, 単位時間単位体積あたりの生成消滅量を S とすれば,

$$\frac{\partial \rho^v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho^v v_j) = S. \tag{A.9}$$

比湿 $q = \rho^v/\rho$ に関する式は, 原理的には式 (A.7) と式 (A.9) から得ることができる. しかし, 今の場合, 式 (A.7) で水蒸気の生成消滅を無視したので, 正しくは得られない. そこで比湿の生成消滅に関する項を改めて S_q と定義する.

$$\frac{dq}{dt} = S_q. \tag{A.10}$$

A.2.4　運動方程式

運動量保存則は, 水蒸気の生成消滅にともなう運動量変化を無視すれば次のように書ける.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho\frac{\partial \Phi^*}{\partial x_i} = F_i'. \tag{A.11}$$

ここで, p は圧力, σ_{ij} は粘性応力テンソル, Φ^* は地球の引力によるポテンシャル[3] , F_i' はその他の外力項である. あるいは連続の式を用いてラグランジュ形式で記述すると

$$\rho\frac{dv_i}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho\frac{\partial \Phi^*}{\partial x_i} = F_i', \tag{A.12}$$

となる. ここで, 粘性項と外力項を F_i とおき, さらにベクトル表示する

$$\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \nabla p + \rho\nabla\Phi^* = \boldsymbol{F}. \tag{A.13}$$

A.2.5　熱力学の式

単位質量あたりの全エネルギーは, 運動エネルギー $\boldsymbol{v}/2$ と内部エネルギー ε およぼポテンシャルエネルギー Φ^* の和で表現される. この時間変化率の式は, 水蒸気の生成消滅による影響を無視すれば,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 + \varepsilon + \Phi^*\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 + \varepsilon + \Phi^*\right)v_j + pv_j - \sigma_{ij}v_i\right] = \rho Q + F_i' v_i, \tag{A.14}$$

である. ここで, Q は外界からの加熱率である. 一方, 運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和の保存式は, 運動量保存式 (A.11) に v_i をかけ連続の式を用いて変形することで得られる. 変形の際には $\frac{\partial \Phi^*}{\partial t} = 0$ であるとしている. [4]

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v_i^2 + \rho\Phi^*\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\rho v_j \boldsymbol{v}^2 + \rho\Phi^* v_j + pv_j - \sigma_{ij}v_i\right) = p\frac{\partial v_j}{\partial x_j} - \sigma_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + F_i' v_i, \tag{A.15}$$

[3] これは遠心力を考慮しない地球の質量にのみ起因したポテンシャル.
[4] 導出の過程を示す. 左辺第 1 項と第 2 項は次のように変形される.

$$\begin{aligned}
v_i\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + v_i\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j v_i) &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i^2) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j v_i^2) - \rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}v_i^2\right) - \rho v_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}v_i^2\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i^2) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j v_i^2) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v_i^2\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}v_i^2\rho v_j\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}v_i^2\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2}v_i^2\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v_i^2\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{1}{2}\rho v_j v_i^2) + \frac{1}{2}v_i^2\left\{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j)\right\}
\end{aligned}$$

となる. 式 (A.14) から式 (A.15) を引き去ると, 次のように内部エネルギーの式が得られる.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\varepsilon v_j) = -p\frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \sigma_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho Q. \tag{A.16}$$

連続の式を用いてラグランジュ形式に書き直せば

$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{p}{\rho}\left(\frac{d\rho}{dt}\right) + \rho Q. \tag{A.17}$$

ここで, 外界からの加熱の項と粘性による加熱の項をまとめて Q^* とおいた.
内部エネルギーを温度を用いて表現すると $\varepsilon = c_v T$ である. さらに状態方程式 (A.5) を用いて式 (A.17) を変形する. $c_p = c_v + R$ であることに注意すれば

$$\frac{dc_pT}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} + Q^*, \tag{A.18}$$

となる. ここで, c_p を乾燥空気の定圧比熱 c_p^d (定数) で近似すると[5] 次の熱力学の式を得る.

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{c_p^d\rho}\frac{dp}{dt} + \frac{Q^*}{c_p^d}. \tag{A.19}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v_i^2\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{1}{2}\rho v_j v_i^2).$$

また, 左辺第 4 項は次のように変形される.

$$\begin{aligned} v_i\rho\frac{\partial\Phi^*}{\partial x_i} &= \Phi^*\left\{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i)\right\} + \rho\frac{\partial\Phi^*}{\partial t} + v_i\rho\frac{\partial\Phi^*}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho\Phi^*) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\Phi^* v_i). \end{aligned}$$

[5] この近似には疑問が残る. 状態方程式においては, 気体定数 R を R^d とする近似は (仮温度 T_v を導入することで) 行なわなかった. c_p についてだけ近似するのは近似のレベルに一貫性がないように思われる.

A.3 回転系への変換

A.3.1 回転系への変換公式

方程式系を, 一定の自転角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ で回転する回転系に変換する.

A.3.2 スカラーの変換公式

慣性系における時間微分を添字 a で, 回転系を添字 r で表現する. このとき, 任意のスカラー ψ に対して,

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_{\mathrm{a}} = \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_{\mathrm{r}}, \tag{A.20}$$

が成りたつ. [6]

A.3.3 ベクトルの変換公式

任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ に対する慣性系および回転系での微分は次の関係をもつ.

$$\left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\right)_{\mathrm{a}} = \left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\right)_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{A}. \tag{A.21}$$

(証明) 任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ を, 慣性系では

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}A_x + \boldsymbol{j}A_y + \boldsymbol{k}A_z \tag{A.22}$$

と表し, 回転系では

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}'A'_x + \boldsymbol{j}'A'_y + \boldsymbol{k}'A'_z \tag{A.23}$$

と表す. 時間微分をとると

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\right)_{\mathrm{a}} &= \boldsymbol{i}\left(\frac{dA_x}{dt}\right)_{\mathrm{a}} + \boldsymbol{j}\left(\frac{dA_y}{dt}\right)_{\mathrm{a}} + \boldsymbol{k}\left(\frac{dA_z}{dt}\right)_{\mathrm{a}} \\
&= \boldsymbol{i}'\left(\frac{dA'_x}{dt}\right)_{\mathrm{a}} + \boldsymbol{j}'\left(\frac{dA'_y}{dt}\right)_{\mathrm{a}} + \boldsymbol{k}'\left(\frac{dA'_z}{dt}\right)_{\mathrm{a}} + \left(\frac{d\boldsymbol{i}'}{dt}\right)_{\mathrm{a}}A'_x + \left(\frac{d\boldsymbol{j}'}{dt}\right)_{\mathrm{a}}A'_y + \left(\frac{d\boldsymbol{k}'}{dt}\right)_{\mathrm{a}}A'_z \\
&= \boldsymbol{i}'\left(\frac{dA'_x}{dt}\right)_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{j}'\left(\frac{dA'_y}{dt}\right)_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{k}'\left(\frac{dA'_z}{dt}\right)_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{i}'A'_x + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{j}'A'_y + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{k}'A'_z \\
&= \left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\right)_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{A}.
\end{aligned} \tag{A.24}$$

(証明終り)

ここで $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{r}$ ($\boldsymbol{r}$ は位置ベクトル) とおけば慣性系での速度 $\boldsymbol{v}_a \equiv (d\boldsymbol{r}/dt)_{\mathrm{a}}$ (これまでの $\boldsymbol{v}$) は回転系での速度 $\boldsymbol{v}\equiv(d\boldsymbol{r}/dt)_{\mathrm{r}}$ を用いて次のように表すことができる.

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}. \tag{A.25}$$

94/04/13 石渡正樹
97/04/15 赤堀浩司

[6] これは自明のこととしたい. スカラー ψ の座標変換は座標変換テンソルに依存しない (で同じ値をとる) からである. なお, Pedlosky (1987) では, ベクトルの変換公式を使ってスカラーの変換を証明している. ところがベクトルの変換公式ではスカラーの変換公式を使っているので, 何がなんだかわからない.

一方, ベクトルの座標変換は, 座標変換テンソルとの積で表現される. したがって, 座標変換テンソル自体が時間変化する場合, 当然ベクトルの時間微分は座標変換テンソルの時間微分の影響を受ける.

さらに, 式 (A.21) で $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}$ とおけば, 速度の時間微分項は

$$\frac{d\boldsymbol{v}_a}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}), \tag{A.26}$$

と変換できる.

A.3.4 回転系への変換

変換の式 (A.26) を用いて運動方程式を回転系で記述する.

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) + \nabla\Phi^* + \boldsymbol{F}. \tag{A.27}$$

ここで, 重力加速度 $\boldsymbol{g} \equiv \nabla\Phi^* - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v})$ を定義すれば, 運動方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}, \tag{A.28}$$

となる.

連続の式および熱力学の式においては, ラグランジュ微分が作用している密度および温度は座標変換に無関係なスカラーであるため, その時間微分の形は変わらない. 連続の式は, 速度場の発散を含むが, これは座標変換によっても値は変わらない. したがって, これらの式は形を変えない. [7]

[7] ここで私が気になっているのは, 運動エネルギー保存の式が, 回転系への移行によって形を変えることである.

A.4 球座標への変換

A.4.1 直交曲線座標系における微分

一般の直交曲線座標 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) において, スカラー $\bullet$ およびベクトル $\boldsymbol{A} = (A_1, A_2, A_3)$ は次のように表現される. なお, h_i は各軸方向の規模因子であり, 各軸方向の基底ベクトルは $\boldsymbol{e}_i$ とする.

$$\nabla\bullet = \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial\bullet}{\partial\xi_1}, \frac{1}{h_2}\frac{\partial\bullet}{\partial\xi_2}, \frac{1}{h_3}\frac{\partial\bullet}{\partial\xi_3}\right), \tag{A.29}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial\xi_1}(h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial\xi_2}(h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial\xi_3}(h_1 h_2 A_3)\right], \tag{A.30}$$

$$\nabla^2\bullet = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial\bullet}{\partial\xi_1}\right) + \frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial\bullet}{\partial\xi_2}\right) + \frac{\partial}{\partial\xi_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial\bullet}{\partial\xi_3}\right)\right], \tag{A.31}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \left(\frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial(h_3 A_3)}{\partial\xi_2} - \frac{\partial(h_2 A_2)}{\partial\xi_3}\right], \frac{1}{h_3 h_1}\left[\frac{\partial(h_1 A_1)}{\partial\xi_3} - \frac{\partial(h_3 A_3)}{\partial\xi_1}\right], \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial(h_2 A_2)}{\partial\xi_1} - \frac{\partial(h_1 A_1)}{\partial\xi_2}\right]\right), \tag{A.32}$$

$$\frac{d\bullet}{dt} = \frac{\partial\bullet}{\partial t} + \frac{v_1}{h_1}\frac{\partial\bullet}{\partial\xi_1} + \frac{v_2}{h_2}\frac{\partial\bullet}{\partial\xi_2} + \frac{v_3}{h_3}\frac{\partial\bullet}{\partial\xi_3}, \tag{A.33}$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \sum_{k=1}^{3}\boldsymbol{e}_k\left[\frac{\partial v_k}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3}\frac{v_k}{h_k}\frac{\partial v_k}{\partial\xi_j} + \left(-\frac{v_j}{h_j}\frac{1}{h_k}\frac{\partial h_j}{\partial\xi_k} + \frac{v_k}{h_k}\frac{1}{h_j}\frac{\partial h_k}{\partial\xi_j}\right)v_j\right]. \tag{A.34}$$

A.4.2 球座標系における微分

重力加速度 $\boldsymbol{g}$ が地球中心を向いているとみなして, 方程式系を球座標 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\lambda, \varphi, r)$ に変換する. 回転系に固定した直交直線座標 (x_1, x_2, x_3) との関係は

$$x_1 = r\cos\varphi\cos\lambda, \tag{A.35}$$

$$x_2 = r\cos\varphi\sin\lambda, \tag{A.36}$$

$$x_3 = r\sin\varphi, \tag{A.37}$$

である. ここで, λ は緯度, φ は経度, r は鉛直座標である. また, 基底ベクトルを $(\boldsymbol{e}_\lambda, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_r)$, 速度ベクトルを (u, v, w) で表す.
各方向の規模因子 (scale factor) は

$$h_\lambda = r\cos\varphi, \quad h_\varphi = r, \quad h_r = 1. \tag{A.38}$$

したがって, スカラー $\bullet$ およびベクトル $\boldsymbol{A} = (A_\lambda, A_\varphi, A_r)$ に関する微分表現は次のようになる.

$$\nabla\bullet = \boldsymbol{e}_\lambda\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial\bullet}{\partial\lambda} + \boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial\bullet}{\partial\varphi} + \boldsymbol{e}_r\frac{\partial\bullet}{\partial r}, \tag{A.39}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2\cos\varphi}\left[r\frac{\partial A_\lambda}{\partial\lambda} + r\frac{\partial}{\partial\varphi}(\cos\varphi A_\varphi) + \cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r)\right], \tag{A.40}$$

$$\nabla^2\bullet = \frac{1}{r^2\cos\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial\bullet}{\partial\lambda}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\bullet}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cos\varphi\frac{\partial\bullet}{\partial r}\right)\right], \tag{A.41}$$

94/04/13 石渡正樹
97/04/15 赤堀浩司

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{e}_\lambda\frac{1}{r}\left[\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right]\\ &\quad+\boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r\cos\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\cos\varphi A_\lambda)-\frac{\partial A_r}{\partial\lambda}\right]\\ &\quad+\boldsymbol{e}_r\frac{1}{r\cos\varphi}\left[\frac{\partial A_\varphi}{\partial\lambda}-\frac{\partial}{\partial\varphi}(\cos\varphi A_\lambda)\right],\end{aligned}\tag{A.42}$$

$$\frac{d\bullet}{dt}=\frac{\partial\bullet}{\partial t}+\frac{u}{r\cos\varphi}\frac{\partial\bullet}{\partial\lambda}+\frac{v}{r}\frac{\partial\bullet}{\partial\varphi}+w\frac{\partial\bullet}{\partial r},\tag{A.43}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} &= \boldsymbol{e}_\lambda\left[\frac{\partial A_\lambda}{\partial t}+\frac{u}{r\cos\varphi}\frac{\partial A_\lambda}{\partial\lambda}+\frac{v}{r}\frac{\partial A_\lambda}{\partial\varphi}+w\frac{\partial A_\lambda}{\partial r}+\frac{u}{r}A_r-\frac{u\tan\varphi}{r}A_\varphi\right]\\ &\quad+\boldsymbol{e}_\varphi\left[\frac{\partial A_\varphi}{\partial t}+\frac{u}{r\cos\varphi}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\lambda}+\frac{v}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+w\frac{\partial A_\varphi}{\partial r}+\frac{v}{r}A_r+\frac{u\tan\varphi}{r}A_\lambda\right]\\ &\quad+\boldsymbol{e}_r\left[\frac{\partial A_r}{\partial t}+\frac{u}{r\cos\varphi}\frac{\partial A_r}{\partial\lambda}+\frac{v}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}+w\frac{\partial A_r}{\partial r}-\frac{v}{r}A_\varphi-\frac{u}{r}A_\lambda\right].\end{aligned}\tag{A.44}$$

A.4.3 球座標への変換

自転角速度ベクトルの表現は次のようになる.

$$2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v} = 2\Omega(\boldsymbol{e}_\varphi\cos\varphi+\boldsymbol{e}_r\sin\varphi)\times(u\boldsymbol{e}_\lambda+v\boldsymbol{e}_\varphi+w\boldsymbol{e}_r)\tag{A.45}$$

$$= (2\Omega\cos\varphi w-2\Omega\sin\varphi v)\boldsymbol{e}_\lambda+2\Omega\sin\varphi u\boldsymbol{e}_\varphi-2\Omega\cos\varphi u\boldsymbol{e}_r.\tag{A.46}$$

したがって, 運動方程式は

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho r\cos\varphi}\frac{\partial p}{\partial\lambda}+2\Omega v\sin\varphi-2\Omega w\cos\varphi+\frac{uv}{r}\tan\varphi-\frac{uw}{r}+F_\lambda,\tag{A.47}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\varphi}-2\Omega u\sin\varphi-\frac{u^2}{r}\tan\varphi-\frac{vw}{r}+F_\varphi,\tag{A.48}$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}-g+2\Omega u\cos\varphi+\frac{u^2}{r}+\frac{v^2}{r}+F_r.\tag{A.49}$$

連続の式は

$$\frac{d\rho}{dt}+\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}(u)+\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\cos\varphi v)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2w)=0.\tag{A.50}$$

熱力学の式は

$$\frac{d}{dt}T=\frac{1}{c_p^d\rho}\frac{dp}{dt}+\frac{Q^*}{c_p^d}.\tag{A.51}$$

状態方程式は

$$p=\rho RT.\tag{A.52}$$

水蒸気の式は

$$\frac{dq}{dt}=S_q.\tag{A.53}$$

ここで,

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{u}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}+\frac{v}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}+w\frac{\partial}{\partial r},\tag{A.54}$$

である.

A.5　z-座標プリミティブ方程式

A.5.1　静力学平衡近似

鉛直方向の運動方程式に対し, 静力学平衡近似を行なう.

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g. \tag{A.55}$$

このとき, 運動エネルギーの保存則を考慮して, 水平方向の運動方程式に対しても近似を施す. 運動エネルギーの式は, 運動方程式の各成分にそれぞれ u, v, w をかけることで得られる.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\right) &= u\frac{du}{dt} + v\frac{dv}{dt} + w\frac{dw}{dt} \\
&= u\left\{-\frac{1}{\rho r\cos\varphi}\frac{\partial p}{\partial \lambda} + \underbrace{2v\Omega\sin\varphi}_{(1)} - \underbrace{2w\Omega\cos\varphi}_{(2)} + \underbrace{\frac{uv}{r}\tan\varphi}_{(3)} - \underbrace{\frac{uw}{r}}_{(4)} + F_\lambda\right\} \\
&\quad +v\left\{-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} - \underbrace{2\Omega u\sin\varphi}_{(1)} - \underbrace{\frac{u^2}{r}\tan\varphi}_{(3)} - \underbrace{\frac{vw}{r}}_{(5)} + F_\varphi\right\} \\
&\quad +w\left\{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} - g + \underbrace{2\Omega u\cos\varphi}_{(2)} + \underbrace{\frac{u^2}{r}}_{(4)} + \underbrace{\frac{v^2}{r}}_{(5)} + F_r\right\} \\
&= -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{v}\nabla p - gw - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}.
\end{aligned} \tag{A.56}$$

コリオリの力およびメトリック項は同じ番号のもの同士で打ち消しあって, 運動エネルギーの時間変化に寄与しないことがわかる. [8] したがって, 静力学平衡近似の際に鉛直成分の式から落とした項 (2),(4),(5) に対応した水平成分の式の項も取り除く. これにより, 運動方程式の水平成分は次のようになる.

$$\frac{du}{dt} = \frac{uv\tan\varphi}{r} + fv - \frac{1}{\rho r\cos\varphi}\frac{\partial p}{\partial \lambda} + F_\lambda \tag{A.57}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{u^2\tan\varphi}{a} - fu - \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + F_\varphi. \tag{A.58}$$

ここで, f はコリオリパラメータ $f \equiv 2\Omega\sin\varphi$ である.

A.5.2　薄い球殻近似

大気の層が地球半径に比べて薄いことを仮定し, 方程式中の r を, 代表的な地球半径 a でおきかえる. また, r による微分はすべて海抜高度 z による微分でおきかえる. このとき基礎方程式は次のようになる.

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}, \tag{A.59}$$

$$\frac{dq}{dt} = S_q, \tag{A.60}$$

94/04/13 石渡正樹
97/04/15 赤堀浩司
2005/04/04 石渡正樹

[8] 遠心力を重力加速度から分離してエネルギーの式で考慮すると, この寄与はキャンセルすることなく残る.

$$\frac{du}{dt} = \frac{uv\tan\varphi}{a} + fv - \frac{1}{\rho a\cos\varphi}\frac{\partial p}{\partial\lambda} + F_\lambda, \tag{A.61}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{u^2\tan\varphi}{a} - fu - \frac{1}{\rho a}\frac{\partial p}{\partial\varphi} + F_\varphi, \tag{A.62}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g, \tag{A.63}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{c_p^d\rho}\frac{dp}{dt} + \frac{Q^*}{c_p^d}, \tag{A.64}$$

$$p = \rho R^d T_v. \tag{A.65}$$

ここで,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{v}{a}\frac{\partial}{\partial\varphi} + w\frac{\partial}{\partial z}, \tag{A.66}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} \equiv \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial u}{\partial\lambda} + \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial v}{\partial\varphi}(v\cos\varphi) + \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{A.67}$$

A.6 σ-座標プリミティブ方程式

静力学平衡のもとでは, 気圧 p は鉛直座標 z に対し単調減少する関数である. そこで, 鉛直座標を z から, 地表面気圧 p_s で規格化した気圧座標,

$$\sigma \equiv \frac{p}{p_s}, \tag{A.68}$$

に変換する. σ と z の関係は, 静力学平衡の式を変形して得られる.

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = -\frac{g\sigma}{R^d T_v}. \tag{A.69}$$

A.6.1 σ-座標変換公式

z- 座標から σ- 座標への変換公式を示す.
鉛直微分

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bullet}{\partial z} &= \frac{\partial \sigma}{\partial z}\frac{\partial \bullet}{\partial \sigma} \\
&= -\frac{g\sigma}{R^d T_v}\frac{\partial \bullet}{\partial \sigma}.
\end{aligned} \tag{A.70}$$

水平微分

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \bullet}{\partial \lambda}\right)_z &= \left(\frac{\partial \bullet}{\partial \lambda}\right)_\sigma - \frac{\partial \sigma}{\partial z}\frac{\partial \bullet}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)_\sigma \\
&= \left(\frac{\partial \bullet}{\partial \lambda}\right)_\sigma + \frac{g\sigma}{R^d T_v}\frac{\partial \bullet}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)_\sigma,
\end{aligned} \tag{A.71}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \bullet}{\partial \varphi}\right)_z &= \left(\frac{\partial \bullet}{\partial \varphi}\right)_\sigma - \frac{\partial \sigma}{\partial z}\frac{\partial \bullet}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)_\sigma \\
&= \left(\frac{\partial \bullet}{\partial \varphi}\right)_\sigma + \frac{g\sigma}{R^d T_v}\frac{\partial \bullet}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)_\sigma.
\end{aligned} \tag{A.72}$$

時間微分

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \bullet}{\partial t}\right)_z &= \left(\frac{\partial \bullet}{\partial t}\right)_\sigma - \frac{\partial \sigma}{\partial z}\frac{\partial \bullet}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\sigma \\
&= \left(\frac{\partial \bullet}{\partial t}\right)_\sigma + \frac{g\sigma}{R^d T_v}\frac{\partial \bullet}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\sigma.
\end{aligned} \tag{A.73}$$

ラグランジュ微分はこれらを用いて,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d \bullet}{dt}\right)_z &= \left(\frac{\partial \bullet}{\partial t}\right)_z + \frac{u}{a\cos\varphi}\left(\frac{\partial \bullet}{\partial \lambda}\right)_z + \frac{v}{a}\left(\frac{\partial \bullet}{\partial \varphi}\right)_z + w\left(\frac{\partial \bullet}{\partial z}\right)_z \\
&= \left(\frac{\partial \bullet}{\partial t}\right)_\sigma + \frac{u}{a\cos\varphi}\left(\frac{\partial \bullet}{\partial \lambda}\right)_\sigma + \frac{v}{a}\left(\frac{\partial \bullet}{\partial \varphi}\right)_\sigma + w\left(\frac{\partial \bullet}{\partial z}\right)_\sigma \\
&\quad + \frac{g\sigma}{R^d T_v}\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\sigma + \frac{u}{a\cos\varphi}\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)_\sigma + \frac{v}{a}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)_\sigma - w\right\}\frac{\partial \bullet}{\partial \sigma} \\
&= \left(\frac{d \bullet}{dt}\right)_\sigma.
\end{aligned} \tag{A.74}$$

94/04/13 石渡正樹
97/04/15 赤堀浩司

ここで, σ-座標鉛直速度 $\dot{\sigma}$ を定義する.

$$\dot{\sigma} \equiv \frac{g\sigma}{R^d T_v}\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\sigma + \frac{u}{a\cos\varphi}\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)_\sigma + \frac{v}{a}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)_\sigma - w\right\}. \tag{A.75}$$

A.6.2 σ-座標プリミティブ方程式系

静力学平衡の式

式 (A.69) を重力ポテンシャル $\Phi = gz$ を用いて書けば,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = -\frac{R^d T_v}{\sigma}. \tag{A.76}$$

運動方程式

水平の圧力勾配は, 式 (A.71) および式 (A.72) を p に対して適用し, 式 (A.68) を用いれば次のように変換される.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial \lambda}\right)_z &= \frac{1}{\rho}\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial \lambda}\right)_\sigma + \frac{g\sigma}{R^d T_v}\frac{\partial p}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)_\sigma\right\} \\
&= \frac{R^d T_v}{p_s}\frac{\partial p_s}{\partial \lambda} + \frac{R^d T_v}{p}\frac{g\sigma}{R^d T_v}p_s\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)_\sigma \\
&= R^d T_v\left(\frac{\partial \pi}{\partial \lambda}\right)_\sigma + \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda},
\end{aligned} \tag{A.77}$$

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial \varphi}\right)_z = R^d T_v\left(\frac{\partial \pi}{\partial \varphi}\right)_\sigma + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}. \tag{A.78}$$

ここで $\pi \equiv \ln p_s$ である. したがって, 運動方程式の水平成分は,

$$\frac{du}{dt} - fv - \frac{uv}{a}\tan\varphi = -\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - \frac{R^d T_v}{a\cos\varphi}\frac{\partial \pi}{\partial \lambda} + F_\lambda, \tag{A.79}$$

$$\frac{dv}{dt} + fu + \frac{u^2}{a}\tan\varphi = -\frac{1}{a}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{R^d T_v}{a}\frac{\partial \pi}{\partial \varphi} + F_\varphi. \tag{A.80}$$

連続の式

速度の発散は,

$$\begin{aligned}
(\nabla\cdot\boldsymbol{v})_z &= \frac{1}{a\cos\varphi}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right)_\sigma + \frac{g\sigma}{R^d T_v}\frac{\partial u}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)_\sigma\right] \\
&\quad + \frac{1}{a\cos\varphi}\left[\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}(v\cos\varphi)\right)_\sigma + \frac{g\sigma}{R^d T_v}\frac{\partial}{\partial \sigma}(v\cos\varphi)\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)_\sigma\right] - \frac{g\sigma}{R^d T_v}\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{dz}{dt}\right)_\sigma \\
&= \frac{1}{a\cos\varphi}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right)_\sigma + \frac{g\sigma}{R^d T_v}\frac{\partial u}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)_\sigma\right] \\
&\quad + \frac{1}{a\cos\varphi}\left[\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}(v\cos\varphi)\right)_\sigma + \frac{g\sigma}{R^d T_v}\frac{\partial}{\partial \sigma}(v\cos\varphi)\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)_\sigma\right] \\
&\quad - \frac{g\sigma}{R^d T_v}\frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\sigma + \frac{u}{a\cos\varphi}\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)_\sigma + \frac{v}{a}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)_\sigma + \dot{\sigma}\frac{\partial z}{\partial \sigma}\right] \\
&= \frac{1}{a\cos\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right)_\sigma + \frac{1}{a\cos\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}(v\cos\varphi)\right)_\sigma + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{g\sigma}{R^d T_v}\left[\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\sigma + \frac{u}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial z}{\partial\lambda}\right)_\sigma + \frac{v}{a}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)_\sigma + \dot{\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial z}{\partial\sigma}\right)\right] \\
= \;& (\nabla\cdot\boldsymbol{v}_H)_\sigma + \frac{\partial\dot{\sigma}}{\partial\sigma} + \frac{\partial\sigma}{\partial z}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial z}{\partial\sigma}\right)_\sigma . \qquad \text{(A.81)}
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
\nabla\cdot\boldsymbol{v}_H \equiv \frac{1}{a\cos\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right)_\sigma + \frac{1}{a\cos\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}(v\cos\varphi)\right)_\sigma . \qquad \text{(A.82)}
$$

ゆえに, z- 座標連続の式は次のように変換される.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_z + (\nabla\cdot\boldsymbol{v})_z &= \frac{1}{\rho}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_\sigma + (\nabla\cdot\boldsymbol{v}_H)_\sigma + \frac{\partial\dot{\sigma}}{\partial\sigma} + \frac{\partial\sigma}{\partial z}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial z}{\partial\sigma}\right)_\sigma \\
&= \frac{1}{\rho}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_\sigma + (\nabla\cdot\boldsymbol{v}_H)_\sigma + \frac{\partial\dot{\sigma}}{\partial\sigma} + \frac{\rho}{p_s}\left(\frac{d}{dt}\frac{p_s}{\rho}\right)_\sigma \\
&= \left(\frac{d\ln p_s}{dt}\right)_\sigma + (\nabla\cdot\boldsymbol{v}_H)_\sigma + \frac{\partial\dot{\sigma}}{\partial\sigma}. \qquad \text{(A.83)}
\end{aligned}
$$

したがって $\pi \equiv \ln p_s$ を用いて記述すれば次のようになる.

$$
\frac{d\pi}{dt} + \nabla\cdot\boldsymbol{v}_H + \frac{\partial\dot{\sigma}}{\partial\sigma} = 0. \qquad \text{(A.84)}
$$

熱力学の式

式 (A.64) の右辺第 1 項は次のように変換される.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{c_p^d\rho}\frac{dp}{dt} &= \frac{1}{c_p^d\rho}\left\{\frac{\partial p}{\partial t} + \boldsymbol{v}_H\cdot\nabla_\sigma p + \dot{\sigma}\frac{\partial p}{\partial\sigma}\right\} \\
&= \frac{1}{c_p^d\rho}\left\{\sigma\frac{\partial p_s}{\partial t} + \sigma\boldsymbol{v}_H\cdot\nabla_\sigma p_s + \dot{\sigma}p_s\right\} \\
&= \frac{R^d T_v}{c_p^d}\left\{\frac{\partial\pi}{\partial t} + \boldsymbol{v}_H\cdot\nabla_\sigma\pi + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\right\}. \qquad \text{(A.85)}
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
\boldsymbol{v}_H\cdot\nabla_\sigma = \frac{u}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{v}{a}\frac{\partial}{\partial\varphi}. \qquad \text{(A.86)}
$$

したがって, 熱力学の式はつぎのようになる.

$$
\frac{dT}{dt} = \frac{R^d T_v}{c_p^d}\left\{\frac{\partial\pi}{\partial t} + \boldsymbol{v}_H\cdot\nabla_\sigma\pi + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\right\} + \frac{Q^*}{c_p^d}. \qquad \text{(A.87)}
$$

A.6.3　境界条件

ここで, σ 座標における境界条件について述べる.

地表面高度

$$
\Phi = \Phi_s(\lambda,\varphi) \quad \text{at} \quad \sigma = 1. \qquad \text{(A.88)}
$$

すなわち, Φ_s は表面地形を表す. この境界条件を用いて, 静力学平衡の式を鉛直積分することで, 任意の σ における高度 Φ を求めることができる.

σ 座標鉛直速度

$$\dot{\sigma} = 0 \quad at \;\; \sigma = 0, \; 1. \tag{A.89}$$

水平流および熱力学変数

ここでは述べない.

A.6.4 傾向方程式

連続の式を鉛直方向に $\sigma = 0$ から $\sigma = 1$ まで積分し, $\dot{\sigma}$ に関する境界条件を用いれば, 傾向方程式とよばれる π の時間変化に関する式が得られる.

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} = -\int_0^1 \boldsymbol{v}_H \cdot \nabla_\sigma \pi d\sigma - \int_0^1 D d\sigma. \tag{A.90}$$

この式を用いれば, $\dot{\sigma}$ の情報がなくても地表面気圧の時間変化を求めることができる. なお, ここでは後のことを考えて $\nabla \cdot \boldsymbol{v}_H$ を D と表現している. D については次節で改めて定義する.
鉛直速度 $\dot{\sigma}$ は, 連続の式を鉛直方向に $\sigma = 0$ から $\sigma = \sigma$ まで積分することで診断的に得られる.

$$\dot{\sigma} = -\sigma \frac{\partial \pi}{\partial t} - \int_0^\sigma D d\sigma - \int_0^\sigma \boldsymbol{v}_H \cdot \nabla_\sigma \pi d\sigma. \tag{A.91}$$

A.7 モデル支配方程式

A.7.1 渦度方程式と発散方程式

渦度:

$$\zeta \equiv \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial v}{\partial\lambda} - \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(u\cos\varphi). \tag{A.92}$$

発散:

$$D \equiv \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial u}{\partial\lambda} + \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(v\cos\varphi). \tag{A.93}$$

渦度方程式

運動方程式の u の式に $\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\cos\varphi$ を作用し, v の式に $\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}$ を作用し差をとって変形すれば次の渦度方程式を得る.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\zeta}{\partial t} &= -\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\zeta v\cos\varphi) - \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}(\zeta u)\\ &\quad -\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\dot\sigma\frac{\partial v}{\partial\sigma} + \frac{R^dT_v}{ap_s}\frac{\partial p_s}{\partial\varphi} - F_\varphi + fu\right]\\ &\quad -\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[-\cos\varphi\dot\sigma\frac{\partial u}{\partial\sigma} - \frac{R^dT_v}{ap_s}\frac{\partial p_s}{\partial\lambda} + F_\lambda\cos\varphi + fv\cos\varphi\right].\end{aligned} \tag{A.94}$$

発散方程式

運動方程式の u の式に $\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}$ を作用し, v の式に $\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\cos\varphi$ を作用し和をとって変形すると次の発散方程式を得る.

$$\begin{aligned}\frac{\partial D}{\partial t} &= \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}(\zeta v) - \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\zeta u\cos\varphi)\\ &\quad -\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\dot\sigma\frac{\partial u}{\partial\sigma} + \frac{R^dT_v}{a\cos\varphi p_s}\frac{\partial p_s}{\partial\lambda} - F_\lambda - fv\right]\\ &\quad -\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\cos\varphi\dot\sigma\frac{\partial v}{\partial\sigma} + \frac{R^dT_v}{ap_s}\frac{\partial p_s}{\partial\varphi}\cos\varphi - F_\varphi\cos\varphi + fu\cos\varphi\right]\\ &\quad -\nabla_\sigma^2(\Phi + KE).\end{aligned} \tag{A.95}$$

ここで,

$$\nabla_\sigma^2 = \frac{1}{a^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{a^2\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}), \tag{A.96}$$

$$KE = \frac{u^2+v^2}{2}. \tag{A.97}$$

A.7.2 変数変換

支配方程式系における変数を, モデル内部で用いている変数に変換する. まず, $\mu \equiv \sin\varphi$ を導入する. また速度場 u, v は $U \equiv u\cos\phi$, $V \equiv \cos\phi$ に変換する. [9] このとき, 水平風の渦度 ζ と発散 D

94/04/13 石渡正樹
97/04/15 赤堀浩司
[9] u, v のままでも渦度や発散にすれば極での特異性を回避できるのではないか?

は次のように変換され, この表現をあらためて ζ および D と定義する.

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial v}{\partial\lambda} - \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(u\cos\varphi) \\ &= \frac{1}{a\cos^2\varphi}\frac{\partial v\cos\phi}{\partial\lambda} - \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(u\cos\varphi) \\ &= \frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial V}{\partial\lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial U}{\partial\mu},\end{aligned} \tag{A.98}$$

$$\begin{aligned}D &= \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial u}{\partial\lambda} + \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(v\cos\varphi) \\ &= \frac{1}{a\cos^2\varphi}\frac{\partial u\cos\phi}{\partial\lambda} + \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(v\cos\varphi) \\ &= \frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial U}{\partial\lambda} + \frac{1}{a}\frac{\partial V}{\partial\mu}.\end{aligned} \tag{A.99}$$

水平風による移流は次のように変換される.

$$\begin{aligned}\frac{u}{a\cos\phi}\frac{\partial\bullet}{\partial\lambda} + \frac{v}{a}\frac{\partial\bullet}{\partial\phi} &= \frac{1}{a\cos^2\phi}\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}(u\cos\phi\bullet) - \bullet\frac{\partial}{\partial\lambda}(u\cos\phi)\right\}\frac{1}{a\cos\phi}\left\{\frac{\partial}{\partial\phi}(v\cos\phi\bullet) - \bullet\frac{\partial}{\partial\phi}(v\cos\phi)\right\} \\ &= \frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial\lambda}(U\bullet) - \frac{\bullet}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial U}{\partial\lambda} + \frac{1}{a\mu}\frac{\partial}{\partial\phi}(V\bullet) - \frac{\bullet}{a}\frac{\partial V}{\partial\mu} \\ &= \frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial\lambda}(U\bullet) + \frac{1}{a\mu}\frac{\partial}{\partial\phi}(V\bullet) + \bullet D.\end{aligned} \tag{A.100}$$

水平風による移流のもうひとつの記述を連続の式の変換のために示す.

$$\begin{aligned}\frac{u}{a\cos\phi}\frac{\partial\bullet}{\partial\lambda} + \frac{v}{a}\frac{\partial\bullet}{\partial\phi} &= +\frac{u\cos\phi}{a\cos^2\phi}\frac{\partial\bullet}{\partial\lambda} + \frac{v\cos\phi}{a\cos\phi}\frac{\partial\bullet}{\partial\phi} \\ &= +\frac{U}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial\bullet}{\partial\lambda} + \frac{V}{a}\frac{\partial\bullet}{\partial\mu} \\ &\equiv \boldsymbol{v}_H\cdot\nabla_\sigma\bullet.\end{aligned} \tag{A.101}$$

これらを用いて, 方程式系を次のように変数変換する.
連続の式[10]

$$\frac{\partial\pi}{\partial t} + \boldsymbol{v}_H\cdot\nabla_\sigma\pi = -\nabla_\sigma\cdot\boldsymbol{v}_H - \frac{\partial\dot\sigma}{\partial\sigma}. \tag{A.102}$$

渦度方程式

$$\begin{aligned}\frac{\partial\zeta}{\partial t} &= -\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\mu}(\zeta V) - \frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial\lambda}(\zeta U) \\ &\quad -\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\dot\sigma\frac{\partial V}{\partial\sigma} + \frac{R^dT_v}{a}(1-\mu^2)\frac{\partial\pi}{\partial\mu} - F_\varphi\cos\varphi + fU\right] \\ &\quad -\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[-\dot\sigma\frac{\partial U}{\partial\sigma} - \frac{R^dT_v}{a}\frac{\partial\pi}{\partial\lambda} + F_\lambda\cos\varphi + fV\right].\end{aligned} \tag{A.103}$$

発散方程式

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial\lambda}(\zeta V) - \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\mu}(\zeta U)$$

[10] 発散はすべて D を用いて表現すべきだろう.

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\dot{\sigma}\frac{\partial U}{\partial\sigma}+\frac{R^d T_v}{a}\frac{\partial\pi}{\partial\lambda}-F_\lambda\cos\varphi-fV\right]\\
&-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\dot{\sigma}\frac{\partial V}{\partial\sigma}+\frac{R^d T_v}{a}(1-\mu^2)\frac{\partial\pi}{\partial\mu}-F_\varphi\cos\varphi+fU\right]\\
&-\nabla_\sigma^2(\Phi+KE).
\end{aligned}
\tag{A.104}
$$

熱力学の式

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} &= -\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial UT}{\partial\lambda}-\frac{1}{a}\frac{\partial VT}{\partial\mu}+TD\\
&\quad -\dot{\sigma}\frac{\partial T}{\partial\sigma}+\kappa T\left(\frac{\partial\pi}{\partial t}+\boldsymbol{v}_H\cdot\nabla_\sigma\pi+\frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\right)+\frac{Q^*}{C_p}.
\end{aligned}
\tag{A.105}
$$

水蒸気の式

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial q}{\partial t} &= -\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial Uq}{\partial\lambda}-\frac{1}{a}\frac{\partial Vq}{\partial\mu}+qD\\
&\quad -\dot{\sigma}\frac{\partial q}{\partial\sigma}+S_q.
\end{aligned}
\tag{A.106}
$$

仮温度 T_v を次のように σ のみに依存する場 $\bar{T}_v(\sigma)$ と, そこからのずれ成分 T_v' にわけて記述する. 渦度方程式で T_v を含む項は次のように変形される。

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[+\frac{R^d T_v}{a}(1-\mu^2)\frac{\partial\pi}{\partial\mu}\right]-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[-\frac{R^d T_v}{a}\frac{\partial\pi}{\partial\lambda}\right]\\
=&-\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[+\frac{R^d\bar{T}_v}{a}(1-\mu^2)\frac{\partial\pi}{\partial\mu}\right]-\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[+\frac{R^d T_v'}{a}(1-\mu^2)\frac{\partial\pi}{\partial\mu}\right]\\
&-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[-\frac{R^d\bar{T}_v}{a}\frac{\partial\pi}{\partial\lambda}\right]-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[-\frac{R^d T_v'}{a}\frac{\partial\pi}{\partial\lambda}\right]\\
=&-\frac{1}{a}\frac{R^d\bar{T}_v}{a}\frac{\partial^2\pi}{\partial\lambda\partial\mu}-\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[+\frac{R^d T_v'}{a}(1-\mu^2)\frac{\partial\pi}{\partial\mu}\right]\\
&+\frac{1}{a}\frac{R^d\bar{T}_v}{a}\frac{\partial^2\pi}{\partial\mu\partial\lambda}-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[-\frac{R^d T_v'}{a}\frac{\partial\pi}{\partial\lambda}\right]\\
=&-\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[+\frac{R^d T_v'}{a}(1-\mu^2)\frac{\partial\pi}{\partial\mu}\right]-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[-\frac{R^d T_v'}{a}\frac{\partial\pi}{\partial\lambda}\right].
\end{aligned}
\tag{A.107}
$$

発散方程式で T_v を含む項は次のように変形される.

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{R^d T_v}{a}\frac{\partial\pi}{\partial\lambda}\right]-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\frac{R^d T_v}{a}(1-\mu^2)\frac{\partial\pi}{\partial\mu}\right]\\
=&-\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{R^d\bar{T}_v}{a}\frac{\partial\pi}{\partial\lambda}\right]-\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{R^d T_v'}{a}\frac{\partial\pi}{\partial\lambda}\right]\\
&-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\frac{R^d\bar{T}_v}{a}(1-\mu^2)\frac{\partial\pi}{\partial\mu}\right]-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\frac{R^d T_v'}{a}(1-\mu^2)\frac{\partial\pi}{\partial\mu}\right]\\
=&-\frac{1}{a^2(1-\mu^2)}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}(R^d\bar{T}_v\pi)-\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{R^d T_v'}{a}\frac{\partial\pi}{\partial\lambda}\right]\\
&-\frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu}(R^d\bar{T}_v\pi)\right]-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\frac{R^d T_v'}{a}(1-\mu^2)\frac{\partial\pi}{\partial\mu}\right]\\
=&-\nabla_\sigma^2(R^d\bar{T}_v\pi)-\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{R^d T_v'}{a}\frac{\partial\pi}{\partial\lambda}\right]-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\frac{R^d T_v'}{a}(1-\mu^2)\frac{\partial\pi}{\partial\mu}\right].
\end{aligned}
\tag{A.108}
$$

熱力学の式の右辺第 1–3 項は次のように変形される.

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial UT}{\partial\lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial VT}{\partial\mu} + TD \\
= & -\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial U\bar{T}}{\partial\lambda} - \frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial UT'}{\partial\lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial V\bar{T}}{\partial\mu} - \frac{1}{a}\frac{\partial VT'}{\partial\mu} + \bar{T}D + T'D \\
= & -\frac{\bar{T}}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial U}{\partial\lambda} - \frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial UT'}{\partial\lambda} - \frac{\bar{T}}{a}\frac{\partial V}{\partial\mu} - \frac{1}{a}\frac{\partial VT'}{\partial\mu} + \bar{T}\left[\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial U}{\partial\lambda} + \frac{\bar{1}}{a}\frac{\partial V}{\partial\mu}\right] + T'D \\
= & -\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial UT'}{\partial\lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial VT'}{\partial\mu} + T'D. \qquad \text{(A.109)}
\end{aligned}
$$

以上を用いて程式系を記述すれば次のようになる.
連続の式

$$\frac{\partial\pi}{\partial t} + \boldsymbol{v}_H\cdot\nabla_\sigma\pi = -\nabla_\sigma\cdot\boldsymbol{v}_H - \frac{\partial\dot{\sigma}}{\partial\sigma}. \qquad \text{(A.110)}$$

静水圧の式

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma} = -\frac{R^d T_v}{\sigma}. \qquad \text{(A.111)}$$

運動方程式[11]

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial VA}{\partial\lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial UA}{\partial\mu}, \qquad \text{(A.112)}$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial UA}{\partial\lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial VA}{\partial\mu} - \nabla_\sigma^2(\Phi + R\bar{T}_v\pi + KE). \qquad \text{(A.113)}$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
UA &\equiv (\zeta+f)V - \dot{\sigma}\frac{\partial U}{\partial\sigma} - \frac{RT'}{a}\frac{\partial\pi}{\partial\lambda} + F_\lambda\cos\varphi \qquad \text{(A.114)}\\
VA &\equiv -(\zeta+f)U - \dot{\sigma}\frac{\partial V}{\partial\sigma} - \frac{RT'}{a}(1-\mu^2)\frac{\partial\pi}{\partial\mu} + F_\varphi\cos\varphi. \qquad \text{(A.115)}
\end{aligned}
$$

熱力学の式

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} = & -\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial UT'}{\partial\lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial VT'}{\partial\mu} + T'D - \dot{\sigma}\frac{\partial T}{\partial\sigma} \\
& +\kappa T\left(\frac{\partial\pi}{\partial t} + \boldsymbol{v}_H\cdot\nabla_\sigma\pi + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\right) + \frac{Q^*}{C_p^d}. \qquad \text{(A.116)}
\end{aligned}
$$

水蒸気の式

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial Uq}{\partial\lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial Vq}{\partial\mu} + qD - \dot{\sigma}\frac{\partial q}{\partial\sigma} + S_q. \qquad \text{(A.117)}$$

式 (A.17) で導入した Q^* から粘性による寄与 $c_p\mathcal{D}(\boldsymbol{v})$ を再び分離し, $Q^* = Q + c_p\mathcal{D}(\boldsymbol{v})$ とする. 一般に粘性は運動方程式において適当なパラメタリゼーションによって表現する. また, 渦度, 発散, 温度, 水蒸気の式に対してそれぞれ水平拡散項 $\mathcal{D}(\zeta)$, $\mathcal{D}(D)$, $\mathcal{D}(T)$, $\mathcal{D}(q)$ をつける. この項の付加は主に数値的安定性の要請によるものであるが, 物理的には後で行なう離散化のスケール以下の運動を表現していると解釈できる. 最後に, 乾燥大気の気体定数および定圧比熱 R^d, c_p をそれぞれ R, c_p のようにあらためて置きなおせば, 支配方程式系 (3.1) — (3.6) を得る.

[11](2005/4/4 石渡) ζ の式の右辺第一項の符号は正しいか? D の式の右辺第二項の符号は正しいか?

第B章　地球定数

B.1　飽和比湿

飽和比湿とは, 与えられた温度圧力のもとで飽和蒸気圧を与える比湿の値である.
飽和比湿を計算するための式として, 現在 dcpam では Tetens の式と Nakajima et al. (1992) で使われた式の 2 種を用意している. 以下それぞれの説明を記す.

B.1.1　Tetens の式

飽和比湿 $q^*(T,p)$ は飽和蒸気圧 $e^*(T)$ を用いて近似的に,

$$q^*(T,p) = \frac{\epsilon e^*(T)}{p}. \tag{B.1}$$

ここで, $\epsilon = 0.622$ であり,

$$\frac{1}{e_v^*}\frac{\partial e_v^*}{\partial T} = \frac{L}{R_v T^2} \tag{B.2}$$

よって, 蒸発の潜熱 L, 水蒸気の気体定数 R_v を一定とすれば,

$$e^*(T) = e^*(T = 273\mathrm{K}) \exp\left[\frac{L}{R_v}\left(\frac{1}{273} - \frac{1}{T}\right)\right], \tag{B.3}$$

$e^*(T = 273\mathrm{K}) = 611$ [Pa] である. 上式は Tetens の式と呼ばれる. 飽和比湿の式は次のようになる.

$$q^*(T,p) = \epsilon e^*(T = 273\mathrm{K}) \exp\left[\frac{L}{R_v}\left(\frac{1}{273} - \frac{1}{T}\right)\right]\frac{1}{p} \tag{B.4}$$

(B.2) より,

$$\frac{\partial q^*}{\partial T}(T,p) = \frac{L}{R_v T^2}\epsilon e^*(T = 273\mathrm{K}) \exp\left[\frac{L}{R_v}\left(\frac{1}{273} - \frac{1}{T}\right)\right]\frac{1}{p}. \tag{B.5}$$

B.1.2　Nakajima et al. (1992) で用いられた式

Nakajima et al. (1992) では, Eisenberg and Kauzmann (1961; この訳書が「水の構造と物性」だと思われる) で与えられている水蒸気の飽和蒸気圧の表と式を近似的に表現する

$$e^*(T) = p_0^* \exp\left(-\frac{L}{RT}\right) \tag{B.6}$$

を用いている. ここで, $p_0^* = 1.4 \times 10^{11}$ Pa である. この式から飽和比湿の式を書き下すと

$$q * (T,p) = p_0^* \exp\left(-\frac{L}{RT}\right)\frac{1}{p} \tag{B.7}$$

である.

93/03/20 沼口敦・保坂征宏

B.1.3 参考文献

Nakajima, S., Hayashi, Y.-Y., Abe, Y., 1992: A study on the "runaway greenhouse effect" with a one dimensional radiative convective equilibrium model. *J. Atmos. Sci.*, **49**, 2256–2266.

カウズマン・アイゼンバーグ著, 関集三・松尾隆祐訳, 1975: 水の構造と物性, みすず書房, pp.302.

B.2　地球大気の物理定数

地球大気の基本的な物理定数を以下に示す.

地球半径	a	m	6.37×10^6
重力加速度	g	$\mathrm{ms^{-2}}$	9.8
大気定圧比熱	C_p	$\mathrm{J\ kg^{-1}\ K^{-1}}$	1004.6
大気気体定数	R	$\mathrm{J\ kg^{-1}\ K^{-1}}$	287.04
蒸発潜熱	L	$\mathrm{J\ kg^{-1}}$	2.5×10^6
水蒸気定圧比熱	C_v	$\mathrm{J\ kg^{-1}\ K^{-1}}$	1810.
大気気体定数	R_v	$\mathrm{J\ kg^{-1}\ K^{-1}}$	461.
液体水の密度	d_{H_2O}	$\mathrm{J\ kg^{-1}\ K^{-1}}$	1000.
0° での飽和蒸気	$e^*(273\mathrm{K})$	Pa	611
Stefan Bolzman 定数	σ_{SB}	$\mathrm{W\ m^{-2}\ K^{-4}}$	5.67×10^{-8}
Kálman 定数	k		0.4
水蒸気分子量比	ϵ_v		0.622
仮温度の係数	$\delta_v = \epsilon_v^{-1} - 1$		0.606
比熱と気体定数の比	$\kappa = R/C_p$		0.286

93/03/20 沼口敦・保坂征宏

第C章　謝辞

第C章　謝辞

C.1　ライセンス規定

COPYRIGHT を参照ください.

C.2　使用上の注意

dcpam4 は研究・教育の場で用いられることを前提としております. 教育現場においては自由に使用・改変・再配布していただいて結構です. 利用する場合には 正式なライセンス規定に従って頂くようお願いします.

dcpam4 を利用して得られた科学技術的成果を論文や Web 等にて発表する際には, その旨を記し, リファレンスに挙げて頂きますようお願いします.

引用例 (和文)

森川 靖大, 石渡 正樹, 土屋 貴志, 山田 由貴子, 高橋 芳幸, 小高 正嗣, 堀之内 武, 林 祥介, DCPAM 開発グループ, 2007: 惑星大気モデル DCPAM, http://www.gfd-dennou.org/library/dcpam/, 地球流体電脳倶楽部.

引用例 (英文)

Morikawa,Y., Ishiwatari,M., Tsuchiya,T., Yamada,Y., Takahashi,O.Y., Odaka,M., Horinouchi,T., Hayashi,Y.-Y., DCPAM Devlopment Group, 2007: DCPAM: planetary atmosphere model, http://www.gfd-dennou.org/library/dcpam/, GFD Dennou Club.

C.3　開発グループメンバー

C.3.1　2007 年度

プログラム製作

森川 靖大, 石渡 正樹

プログラム製作協力

土屋 貴志, 山田 由貴子, 高橋 芳幸, 小高 正嗣, 堀之内 武, 林 祥介

解説文書作成

石渡 正樹, 森川 靖大