定在ロスビー波の球面伝播

神戸大学 理学部 地球惑星科学科 地球および惑星大気科学研究室

今村 翔太

1.はじめに

自転する惑星の大気中で西向きに進む波をロスビー波という.
特に中緯度地域では,おいては,西進しようとするロスビー波を偏西風が東へ押し流し,波が停滞する場合がある. これを「定在ロスビー波」と呼ぶ.

本研究では, 回転球面上の 2次元順圧渦度方程式に対して, WKBJ近似を用いて, 定在ロスビー波の性質を調べ, 東西方向に平均風があるという系において,定在ロスビー波の伝播の様子を考察した.

2.支配方程式

2次元回転球面上, 非圧縮, 非発散, 外力なし, 基本場には平均風$\overline{u}(\phi)$といった系を考える.

(λ,ϕ,r):経度,緯度,系の半径
(u,v):経度, 緯度方向の速度
Ω :系の自転角速度
p :流体の圧力
ρ :流体の密度

運動方程式と連続の式から,
線形順圧渦度方程式を求める.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\overline{u}}{r\cos\phi}\frac{\partial u}{\partial\lambda}+\frac{v}{r}\frac{\partial\overline{u}}{\partial\phi}-\frac{\overline{u}v\tan\phi}{r}-2\Omega v\sin\phi=-\frac{1}{\rho}\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial p}{\partial\lambda}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\overline{u}}{r\cos\phi}\frac{\partial v}{\partial\lambda}+\frac{\overline{u}^2+2\overline{u}u}{r}\tan\phi+2\Omega(\overline{u}+u)\sin\phi=-\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\phi}$$

$$\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial u}{\partial\lambda}+\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(v\cos\phi)=0$$

$$\frac{\partial\nabla_H^2\psi}{\partial t}+\frac{\overline{u}}{r\cos\phi}\frac{\partial\nabla_H^2\psi}{\partial\lambda}+\hat{\beta}\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}=0$$

$u=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}$, $v=\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}$

$\hat{\beta}$: 実効ベータ
ψ : 流線関数

3.ロスビー波の性質

WKBJ近似を用いて新しい空間時間座標を導入しψを展開する.

$$\psi=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\psi_n(\Lambda,\Phi,T)e^{i\frac{\Theta(\Lambda,\Phi,T)}{\varepsilon}}$$

※ $0<\varepsilon<<1$

・ WKBJ近似
振幅, 波数, 振動数の空間時間変化は位相の空間時間変化よりもゆっくりである, と仮定して, 微小パラメター ε を用いて新しい空間時間座標を導入し, ψ を ε のべき級数に展開する近似方法.

2つの座標の関係

$$\varepsilon\theta(\lambda,\phi,t)=\Theta(\Lambda,\Phi,T)$$

波数(k,l)と振動数 ω の定義

$$(k,l)=\left(\frac{1}{r\cos\Phi}\frac{\partial\Theta}{\partial\Lambda},\frac{1}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial\Phi}\right)$$

$$\omega=-\frac{\partial\Theta}{\partial T}$$

O(ε^0)の項からロスビー波の分散関係式が求まる.

$$\omega=\overline{u}k-\frac{\hat{\beta}k}{k^2+l^2}$$

分散関係式より, 位相速度と群速度が求まる.

位相速度: $C_\lambda=\frac{\omega}{k}=\overline{u}-\frac{\hat{\beta}}{k^2+l^2}$, $C_\phi=\frac{\omega}{l}=\left(\overline{u}-\frac{\hat{\beta}}{k^2+l^2}\right)\frac{k}{l}$

群速度ベクトル:

$$\mathbf{C}_g\equiv(C_{g\lambda},C_{g\phi})=\left(\frac{\partial\omega}{\partial k},\frac{\partial\omega}{\partial l}\right)=\left(\overline{u}+\hat{\beta}\frac{k^2-l^2}{(k^2+l^2)^2},\frac{2\hat{\beta}kl}{(k^2+l^2)^2}\right)$$

振動数と東西波数は波線に沿って保存されるが, 南北波数は変化する.

波線・・・群速度ベクトルを接線とする曲線.

$$\frac{d_g(k\cos\phi)}{dt}=0,\quad\frac{d_g\omega}{dt}=0,\quad\frac{d_g l}{dt}=-\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\phi}$$

$\frac{d_g}{dt}$: 群速度にのってみた時間変化

O(ε^1)の項からロスビー波の活動度が求まる.

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}(AC_{g\lambda})+\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(AC_{g\phi}\cos\phi)=0$$

$$A=\frac{(k^2+l^2)^2\cos\phi}{2\hat{\beta}}\psi_0^2$$

A:波の活動度

波の活動度は, 振幅の 2 乗に比例し, 波線に沿って保存される.

4.定在ロスビー波

位相速度が 0 となるとき, 定在ロスビー波となる.

$$k^2+l^2=\frac{\hat{\beta}}{\overline{u}}$$

定在ロスビー波となる場合の関係式

群速度は,

$$C_{g\lambda}=\frac{2\overline{u}^2k^2}{\hat{\beta}},\quad C_{g\phi}=\frac{2\overline{u}^2kl}{\hat{\beta}},$$

となり, 東向きにしか進まない.
また, 群速度ベクトルは,

$$\mathbf{C}_g=C_g\frac{\mathbf{K}}{K}$$

と表せ, 波数ベクトル $\mathbf{K}$ と同じ方向となる.

$$C_g=2|\overline{u}|\cos\alpha$$
$$\mathbf{K}=(k,l)$$

K:全波数
α:緯度円と波数ベクトルがなす角

つまり, 群速度ベクトルとともに波数ベクトルも波線に沿った方向となる.

5.波線理論

波線理論・・・波の伝播経路を波線から求める理論のこと.

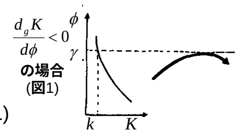
定在ロスビー波の波線の式は.

$$\frac{d_g\alpha}{dt}=\frac{C_gk}{K^2}\frac{d_gK}{d\phi}$$

となる. 屈折を考えると,

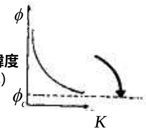
$\frac{d_gK}{d\phi}<0$ の場合, $\frac{d_g\alpha}{dt}<0$ → 時計回りに屈折(図1)

$\frac{d_gK}{d\phi}>0$ の場合, $\frac{d_g\alpha}{dt}>0$ → 反時計回りに屈折



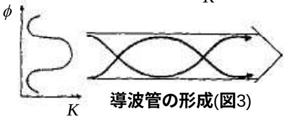
$\frac{d_gK}{d\phi}<0$ の場合 (図1)

K→∞となる緯度 ϕ_c がある場合, $C_{g\phi}\to 0$ となるため, この緯度に永遠に到達することができない. この緯度を臨界緯度という.(図2)



臨界緯度 (図2)

全波数K が極大を持つ場合, 屈折を繰り返しながら東に伝播し, 導波管が形成される. (図3)



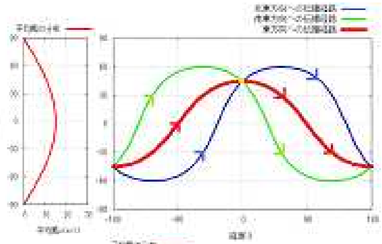
導波管の形成(図3)

(Hoskins and Ambrizzi,1993)

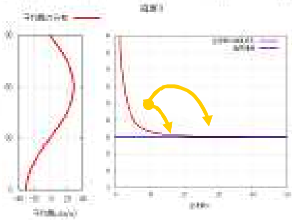
6.球面伝播

経度 0 度, 北緯 45 度に点波源がある場合の定在ロスビー波の伝播経路について考察した.

1: 平均風が剛体回転流である場合
$\overline{u}=15\cos\phi$
・全波数の極大が赤道にあるため, 赤道を軸とした導波管が形成される.
・点波源から出た波線は, 球面上の大円を描く.



2: 平均風を現実大気に近づけた場合
$\overline{u}=-30\cos 3\phi$
・K→∞となる緯度 (臨界緯度) が存在するため, 定在ロスビー波が伝播しなくなる.



7.まとめ

•波線理論から, 定在ロスビー波は全波数の大きい緯度へ向かって屈折しながら伝播し, 全波数が極大となるところがある場合には導波管を形成し, 全波数が無限大となるところがある場合には波が臨界緯度に近づき伝播しなくなることを示した.

参考文献

•Pedlosky, J., 1987: Geophysical Fluid Dynamics -2nd Edition-, Springer, 703 pp.
•Hoskins, B. J., and T. Ambrizzi, 1993: Rossby Wave Propagation on a Realistic Longitudinally Varying fFow, *J. Atmos. Sci.*,**50**, 1661-1671.
•林祥介, 1987: 二次元定常ロスビー波の線形論, 気象研究ノート, **156**, 235-254.
•林祥介, 1992: 線形波動, GFD ノート.
•小倉義光, 1999: 気象力学通論, 東京大学出版会, 249 pp.
•竹広真一, SPMODEL 開発グループ, 2008: 回転球面上での 2 次元順圧流体の定式化.
http://www.gfd-dennou.org/arch/spmodel/
•高橋こう子, 2002: 二次元定常ロスビー波の伝播, 北海道大学理学部地球科学科, 卒業論文.
•兼成智久, 2007: 定常ロスビー波の球面伝播, 北海道大学理学部地球科学科, 卒業論文.
•康アルム, 2008: β平面上の2次元定常ロスビー波の伝播, 神戸大学理学部地球惑星科学科, 卒業論文.