

# 非一様楕円渦の軸対称化過程におけるフィラメントの役割

## A role of filaments on axisymmetrization process of an elliptic vortex with non-uniform vorticity distribution

村上真也 (神戸大院・自然), 岩山隆寛 (神戸大院・理)

Shin'ya Murakami, Kobe University

Takahiro Iwayama, Kobe University

FAX: 078-803-5791, E-mail: murashin@gfd-dennou.org

Study on dynamics of single vortex would be helpful for further understanding of two-dimensional (2D) turbulence, since 2D turbulence can be considered as collective motion of vortices. Melander, *et al.*(1987) studied an axisymmetrization process of an elliptic vortex with non-uniform vorticity distribution. They discussed qualitatively the effect of the filaments on the axisymmetrization process of the elliptic vortex. However, quantitative studies on such effect have not been performed yet. Thus, we investigate the effect of the filaments on the axisymmetrization of the elliptic vortex through numerical simulations. We find that the filaments play a significant role on the axisymmetrization of the elliptic vortex only at the early stage of evolution. In contrast, the velocity induced by the vortex core contributes to both the axisymmetrization and the anti-axisymmetrization.

### 1 はじめに

2次元乱流は実空間においては多数の渦の運動とみなせる。従って、個々の渦の動力学を調べるのが、2次元乱流のよりよい理解の助けになるだろう。そのような問題意識の下、Melander, McWilliams and Zabusky(1987)<sup>1)</sup>は非一様な渦度分布を持つ楕円渦の軸対称化過程を研究した。

楕円渦はその軸対称化過程においてフィラメントを放出することが知られている。Melander, *et al.*(1987)は注目する等渦度線と、その等渦度線付近の流れ関数の等値線の幾何学的関係から、等渦度線が軸対称化するような速度場であるかどうか分かることを指摘した。この幾何学的関係は渦度場の鏡像非対称な部分によって決まる。初期には渦度場の鏡像非対称成分にフィラメントが大きく寄与し、そのため、フィラメントは初期には軸対称化に寄与すると定性的に主張した。

これまでこの主張は定量的に確認されていない。そこで、本研究では楕円渦の軸対称化へのフィラメントによる影響を数値的に調べた。

### 2 基礎方程式と計算方法

#### 2.1 基礎方程式

水平非発散、非圧縮性流体の順圧渦度方程式

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} = \nu \nabla^2 \omega \quad (1)$$

を用いる。ここで、 $\omega = \nabla^2 \psi$ は渦度、 $\psi$ は流れ関数、 $\nu$ は粘性係数である。渦度場の初期値は、

$$\omega(r) = \omega_0 \left[ 1 - \exp \left\{ -C \frac{R_0}{r} \exp \left( -\frac{R_0}{R_0 - r} \right) \right\} \right] \quad (0 \leq r < R_0) \quad (2)$$

とした。<sup>3)</sup>ここで  $r = \sqrt{ax^2 + by^2}$  である。 $\sqrt{a/b}$ は初期アスペクト比であり、2, 3,  $\sqrt{10}$ , 4, 5, 6 と設定した。また、 $C = -\frac{1}{2}e^2 \ln \frac{1}{2} \approx 2.5608517$ ,  $R_0 = \pi/2$ ,  $\omega_0 = 10$  とした。 $2\pi \times 2\pi$ の領域に二重周期境界条件を課し、空間はスペクトル法で、時間は3次のAdams-Bashforth法により  $t = 15$ まで数値計算を行った。格子点数は3072<sup>2</sup>で切断波数は1023,  $\nu = 1.5 \times 10^{-5}$ である。

本稿では初期アスペクト比  $\sqrt{10}$  の場合の結果を述べる。

#### 2.2 フィラメントとコアの決定

渦度場のどの部分をフィラメントと定義するかは議論の余地がある。フィラメントは渦度場を眺めたときに、その形態からフィラメントと呼ばれているので、形態から選ぶのが自然である。等渦度線が負の曲率を持つ点は、フィラメントが渦のコアに接続する「根」の位置にある。そこで、注目する等渦度線を決め、負の曲率を持つ点を探し、それより外側をフィラメントとみなす。時間発展すると、フィラメントがコアの周りを囲む。そのとき、コアに接触しているように見えることがよくあるが、弱い渦度領域を介してコアと接触している場合はフィラメントとみなすことにした。今回は渦度が2以下の領域を弱い渦度領域とした。

#### 2.3 軸対称化に対する寄与の調べ方

注目する等渦度線が軸対称化するか否かは、Melander, *et al.*(1987)が指摘した等渦度線と流れ関数の等値線の幾何学的関係を利用した。渦の中心付近の等渦度線と流れ関数の等値線はともに楕円形をしており、同じ原点を共有している。楕円形をした等渦度線の長軸の偏角を  $\phi_\omega$ 、楕円形をした流れ関数の等値線の長軸の偏角を  $\phi_\psi$  と置き、それらの角度差を  $\phi_d := \phi_\omega - \phi_\psi$  と置く。この角度差  $\phi_d$  の正負が、それぞれ楕円渦のアスペクト比を減少、増加させる速度場に対応する。今回はフィラメントがある場合の  $\phi_d$  と、ない場合の  $\phi'_d$  を求めた。 $\phi'_d$ はコアの渦度場によるものであり、 $\phi_d - \phi'_d$ はフィラメントの渦度場の  $\phi_d$  に対する寄与である。

$\phi_d$ は、等渦度線と流れ関数の等値線を楕円にフィッティングし、楕円の長軸の偏角を計算することにより求めた。楕円へのフィッティングはFitzgibbon, *et al.*(1999)<sup>2)</sup>の方法を用いた。

注目する等渦度線は、時間発展を通じておおよそ楕円形を維持し、コア領域のうち比較的コアの外側に近い位置にある  $\omega = 6$  の等渦度線とした。これに対応して注目する流れ関数の等値線は、 $\omega = 6$  の等渦度線の付近にある  $\psi = -1.2$  の等値線とした。

### 3 結果と考察

Fig. 1はフィラメント領域の渦度場、Fig. 2はコア領域の渦度場である。コア領域は時間発展を通じてフィラメント状の渦度場を含んでおらず、コア領域とフィラメント領域がうまく分離できていることが分かる。

Fig. 3 は等渦度線  $\omega = 6$ (実線) と流れ関数の等値線  $\psi = -1.2$ (破線) のアスペクト比の時間発展である. 等渦度線のアスペクト比は初期に大きく減少している. また, いったん  $t = 7$  あたりで若干の増加が見られるものの, 時間発展を通じて短い周期で振動しながら概ね減少し, 1 に近づく傾向が見て取れる.

Fig. 4 には  $\phi_d$ (破線) と  $\phi_d - \phi'_d$ (実線) の時系列をプロットした. それぞれ, 軸対称化に対するコア領域の渦度場の影響とフィラメント領域の渦度場の影響を読み取ることができる.  $\phi'_d$  は  $\phi_d - \phi'_d$  に比べて振幅が大きく, 短い周期でおおよそ規則的に振動している.  $\phi'_d$  は時間発展の後半 ( $t \approx 11, 14$ ) で大きい正の値を取っているが, これはアスペクト比 (Fig. 3, 実線) がほぼ 1 になったため, 楕円の向きが正確に求まっていないと考えられる.  $\phi_d - \phi'_d$  は比較的早い時刻 ( $1.0 \lesssim t \lesssim 2.5$ ) において正になり,  $5 \lesssim t \lesssim 11$  に再び小さく正になった. 負になったのは  $3 \lesssim t \lesssim 4.5$  においてのみであり, その大きさは極めて小さい. 従って, フィラメントは時間発展を通じておおよそ軸対称化するように寄与しており, その寄与は特に初期において大きいことが分かる.

まとめると, コアによって誘起される速度場は軸対称化と反軸対称化の両方に振動的に寄与する. 一方でフィラメントは初期には大きく  $\phi_d$  が正になるように寄与する, すなわち軸対称化を促進する. そしてのちの時刻ではほとんど影響を与えない. これは, フィラメントがコアのまわりをおおよそ均等に取り囲み, フィラメント部分の渦度場の鏡像非対称性が失われるためであると考えられる.

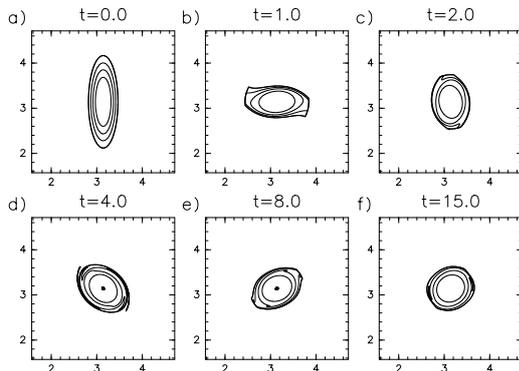


Fig. 1 Snapshots of vorticity field of the core region at  $t = 0, 1, 2, 4, 8, 15$ . The contour interval is 2.

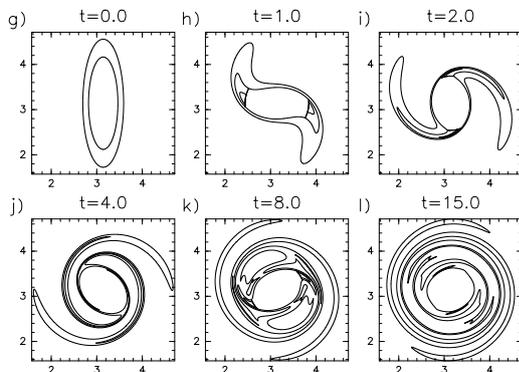


Fig. 2 Snapshots of vorticity field of the filament region at  $t = 0, 1, 2, 4, 8, 15$ . The contour interval is 2.

初期アスペクト比が  $\sqrt{10}$  以外の計算については, 講演時に述べる.

#### 4 まとめ

フィラメント領域の渦度場が誘起する速度場が楕円渦を軸対称化するかどうかについて, Melander, *et al.*(1987) によって定義された  $\phi_d$  を用いて数値的に調べた. コア領域が誘起する速度場は, 楕円渦のアスペクト比を振動させる. これに対してフィラメント領域が誘起する速度場は, 初期に大きく軸対称化するように寄与し, その後はほとんど寄与しなかった.

#### 参考文献

- 1) Melander, M. V., McWilliams, J. C., Zabusky, N. J., 1987: Axisymmetrization and vorticity-gradient intensification of an isolated two-dimensional vortex through filamentation, *J. Fluid Mech.*, **178**, 137 – 159.
- 2) Fitzgibbon, A., Pilu, M., Fisher, R. B., 1999: Direct Least Square Fitting of Ellipses, *Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **21**, 476 – 480.
- 3) Kimura, Y., Herring, J. R., 2001: Gradient enhancement and filament ejection for a non-uniform elliptic vortex in two-dimensional turbulence, *J. Fluid Mech.*, **439**, 43 – 56.

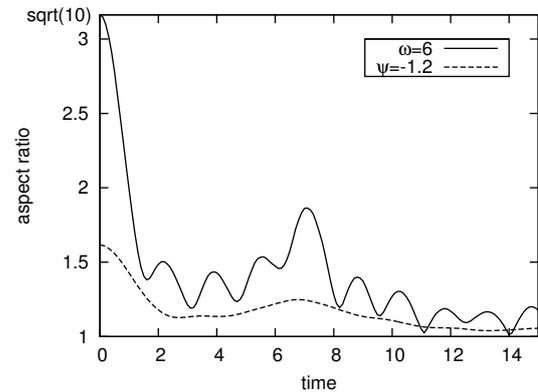


Fig. 3 Time evolution of the aspect ratio of the equi-vorticity contour with  $\omega = 6$  and streamline with  $\psi = -1.2$ .

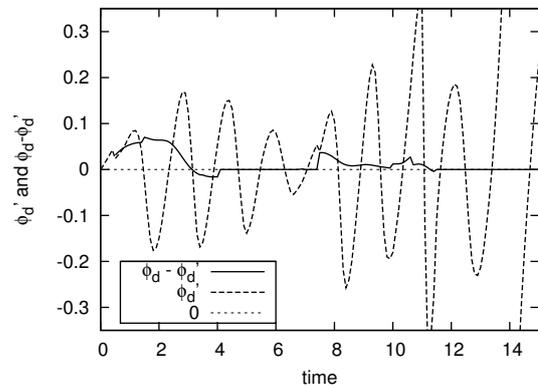


Fig. 4 Time evolution of  $\phi'_d$  and  $\phi_d - \phi'_d$ .