

# $\beta$ 面上の強制2次元乱流における 帯状流の東西非対称性のパラメータ依存性

\* 村上真也 (Shin'ya Murakami), 岩山隆寛 (Takahiro Iwayama)  
神戸大学 大学院自然科学研究科

## 概要

$\beta$ 面上の強制2次元乱流では、東向き流れと西向き流れが南北に交互に並んだ帯状流が卓越することが知られている (Vallis and Maltrud, 1993; Danilov and Gryanik, 2004). また、この帯状流には、東向きの流れの速さが西向きの流れの速さより速く、東向きの流れの幅は西向きの流れの幅より狭いという東西非対称性が現れる。この流れに対応する帯状平均渦度の南北プロファイルは、幅の狭い急な正の渦度南北勾配と幅の広いなだらかな負の渦度南北勾配とを交互に繰り返すノコギリ歯状になる (Danilov and Gryanik, 2004). しかし、この帯状流の東西非対称性の生成メカニズム及び例えば  $\beta$  のような系に含まれるパラメータに対する依存性はまだ分かってない。そこで、帯状流の東西非対称度を帯状平均渦度の正の南北勾配と負の南北勾配の大きさの比  $r$  で定義し、そのパラメータ依存性、特に  $\beta$  依存性を数値計算によって調べた。渦度勾配比  $r$  は  $\beta$  が小さいうちは  $\beta$  に対してべき的に増加するが、ある値を境に  $\beta$  が増えるにつれ減少した。これは正の渦度勾配幅が強制の長さスケールで制限されていると考えれば理解できた。従って、 $\beta$  を変化させたときの東西非対称度の最大値は強制の長さスケールによって決まる。

## 1 はじめに

地球上の流体の大規模な運動は水平2次元的であり、また乱流化している。従って、問題を単純化して回転球面上の流体の運動を考えることで、地球流体の大規模な運動の特徴について考察することができると考えられている。 $\beta$ 面上の2次元乱流の研究はそのような動機で Rhines(1975) により始められた<sup>1</sup>。Rhines(1975) は  $\beta$  と平均自乗速度  $U_{rms}$  により  $k_\beta = \sqrt{\beta/(2U_{rms})}$  で表せる特徴的な波数が存在すると指摘した。その後の  $\beta$ 面上の2次元乱流の研究で、東向き流れと西向き流れが交互に南北に並ぶ明瞭な帯状流が形成されることが分かった (Panetta, 1993; Vallis and Maltrud, 1993; Chekhlov *et al.*, 1996; Danilov and Gurarie, 2002; Danilov and Gryanik, 2004; Danilov and Gurarie, 2004) が、その帯状流の幅は系の長さを  $L$  としたとき  $L/k_\beta$  とよく一致することが分かっている (Panetta, 1993; Vallis and Maltrud, 1993; Danilov and Gurarie, 2002).

$\beta$ 面上の強制2次元乱流では、特に  $\beta$  が大きい場合には東向き流れは幅が狭く速く、西向き流れは幅が広く遅いという東西非対称な流れに発展することが数値実験により示されている (Panetta, 1993; Vallis and Maltrud, 1993; Danilov and Gryanik, 2004)(図 1(a)). 東西非対称な帯状平均東西速度に対応して、帯状平均渦度  $\bar{\zeta}$  とその南北微分  $\bar{\zeta}_y$  はより明瞭な構造を持つ (図 1(b),(c)). Danilov and Gryanik(2004) は帯状平均渦度の南北微分  $\bar{\zeta}_y$  が区分的におおよそ一定値をとり、かつ  $\bar{\zeta}_y$  が負の領域が正の領域よりも広いことに注目し、 $\bar{\zeta}_y$  が正の領域の幅を無視した渦度プロファイルを用いてエネルギースペクトルについて考察した。Danilov and Gurarie(2004) は正の領域の幅を考慮して同じくエネルギースペクトルについて考察し、帯状流が東西非対称性を持つときは、1次元エネルギースペクトルがジェットの数倍の波数の整数倍でスパイク状のピークを持つことを説明した。

このように、 $\beta$ 面上の強制2次元乱流で実現される流れの特徴である、帯状平均渦度の南北微分が区分的に一定値をとる、という事実に着目した研究によりエネルギースペクトルの形状が理解されて来

<sup>1</sup>球面上でも多くの研究があるが、ここでは簡略化のため省く。

たが、東西非対称な流れに発展するメカニズムははまだ解明されていない。それどころか東西非対称な帯状流の定量的なパラメータ依存性でさえいまだ調べられていない。

そこで、本研究では  $\beta$  面上の強制 2 次元乱流における帯状流の東西非対称性について、東西非対称度を定義し、その  $\beta$  依存性について数値実験により調べた。

## 2 東西非対称度の定義

本研究では、帯状平均渦度が正である領域の帯状平均渦度の南北勾配の緯度平均値

$$\bar{\zeta}_{y+} := \frac{1}{L_+} \int_{\bar{\zeta}_y > 0} \bar{\zeta}_y dy \quad (1)$$

と帯状平均渦度が負である領域の帯状平均渦度の南北勾配の緯度平均値

$$\bar{\zeta}_{y-} := \frac{1}{L_-} \int_{\bar{\zeta}_y < 0} \bar{\zeta}_y dy \quad (2)$$

を用いて、東西非対称度を

$$r := \frac{\bar{\zeta}_{y+}}{|\bar{\zeta}_{y-}|} \quad (3)$$

と定義した。ここで、下付き添字  $y$  は  $y$  による微分を表し、 $\bar{\zeta}$  は  $\zeta$  の帯状平均を表す。また、

$$L_+ := \int_{\bar{\zeta}_y > 0} dy, \quad (4)$$

$$L_- := \int_{\bar{\zeta}_y < 0} dy \quad (5)$$

である。

この東西非対称度の定義は、ジェットの数  $k_j$  がはっきりとしない場合でも機械的に計算可能であり、帯状平均渦度の南北勾配が区分的に一定値をとるという特徴を活かしている点で優れている。しかしながら、帯状平均渦度の南北勾配よりも帯状平均渦度の南北勾配が正の領域の幅と負の領域の幅の方が解釈しやすい。そこで、ジェットの数が明確に数えられる場合について<sup>2</sup>、渦度勾配から幅を計算する方法を以下に示す。

南北に  $k_j$  個の同じ  $\bar{\zeta}_{y+}, \bar{\zeta}_{y-}$  を持ったジェットが並んでいるとする。ジェットの渦度振幅を  $\zeta_0$  とすると、 $2\zeta_0 = \bar{\zeta}_{y+} l_+ = |\bar{\zeta}_{y-}| l_-$  が成り立つ (図 1(b))。従って、東西非対称度  $r$  はジェット 1 組あたりの帯状平均渦度の正の勾配の幅の平均値  $l_+ = L_+/k_j$  と負の勾配の幅の平均値  $l_- = L_-/k_j$  の比と等しい:

$$r = \frac{l_-}{l_+}. \quad (6)$$

<sup>2</sup>hypofriction の階数  $n = 2$  の場合には、ほとんどの  $\beta$  で帯状流の速度の大きさは擾乱の大きさに比べて大きいので、ジェットの数 は曖昧さなしに数えられる。機械的に計算したい場合は、 $y$  方向の波数  $k_y$  軸に沿った 1 次元エネルギースペクトルのピーク波数によって求められる。

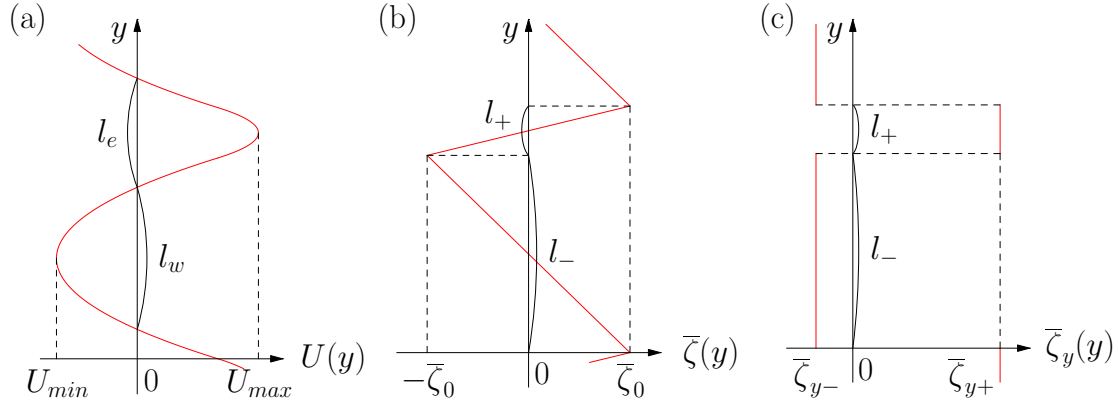


図 1:  $r = 4$  の東西非対称な帯状流の東西速度プロファイルとそれに対応する相対渦度と相対渦度勾配の模式図.  $l_e, l_w$  をそれぞれ東向き, 西向きの流れの幅, 東向き流れの速さの最大値を  $U_{max}$ , 西向き流れの速さの最大値を  $|U_{min}|$  とした.  $\beta$  面上の強制 2 次元乱流の数値計算によれば, 経験的に  $l_e \leq l_w, l_+ \leq l_-, U_{max} \geq |U_{min}|$  が成り立つ.

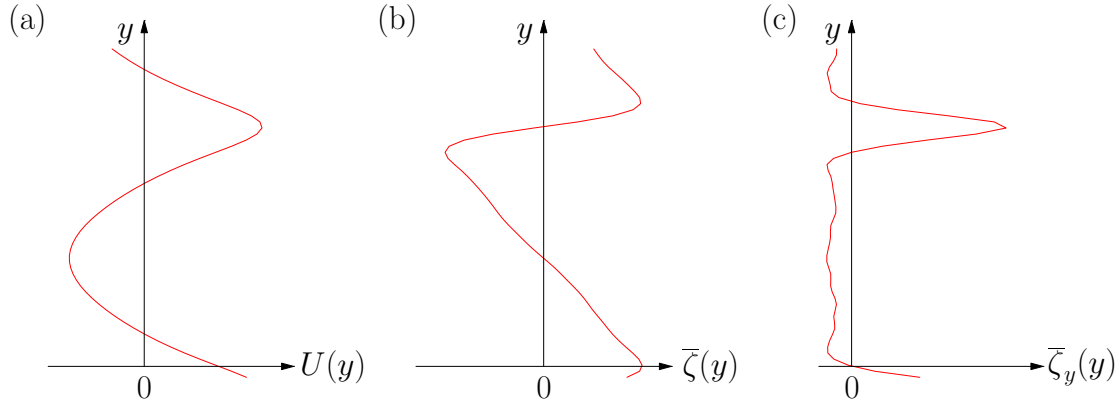


図 2:  $\beta = 120, \lambda_2 = 123$  のときの東西非対称な帯状流の東西速度プロファイルとそれに対応する相対渦度と相対渦度勾配の数値計算結果. このとき  $r = 4.12$  であった. 図 1 の模式図と比較できるように, 縦軸はジェット一組分に合わせて, 横軸は各々の量の最大値と最小値の差で規格化している.

### 3 基礎方程式と計算方法

基礎方程式として, 水平非発散, 非圧縮性流体の  $\beta$  面上の順圧渦度方程式

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = D\zeta + F \quad (7)$$

を用いる. ここで,  $\zeta = \nabla^2 \psi$  は相対渦度,  $\psi$  は流れ関数,  $D = -\lambda_n (-\nabla^2)^{-n} - \nu_m (-\nabla^2)^m$  は散逸演算子,  $F$  は強制である.  $\beta$  はコリオリパラメータの南北勾配である.

$2\pi \times 2\pi$  の領域に二重周期境界条件を課し, 空間はスペクトル法で, 時間は 2 次の Adams-Bashforth 法で数値計算を行った. 初期エネルギーはゼロに設定した. 格子点数は  $512^2$  で切断波数は 170 である. 強制は Danilov and Gryanik(2004) に準じて全波数  $98 \leq k_f \leq 102$  で Markov 的に与えた. 低波数側に選択的に効く散逸である hypofriction( $n = 2$ ) を用い, エネルギーとエンストロフィーがほぼ一定値

をとる平衡状態まで計算し、さらに200単位時間続けて計算した。用いたパラメータは、 $\lambda_2$ については $\lambda_2 = 50, 123, 300$ の三通りで、 $\beta$ については $\beta = 0$ から $\beta = 600$ まで変化させた。エネルギー注入率 $\epsilon$ は弱い $\beta$ 依存性があるが、全ての実験で $0.00190 \leq \epsilon \leq 0.00223$ であった。

$\bar{\zeta}_{y+}, \bar{\zeta}_{y-}, r, l_+, l_-$ の $\beta$ 依存性を3つのhypofriction係数について調べた。 $\bar{\zeta}_{y+}, \bar{\zeta}_{y-}, r$ は時間平均した帯状平均渦度から求めた。1単位時間ごとに出力したデータを最後の200単位時間だけ時間平均した。

## 4 結果と考察

図2に $\beta = 120, \lambda_2 = 123$ のときの東西非対称な帯状流の東西速度プロファイルとそれに対応する相対渦度と相対渦度勾配の数値計算結果を示した。このとき $r = 4.12$ であった。図1の模式図は $r = 4$ であり、図2の東西非対称度とほぼ同じである。図1と図2から、帯状平均渦度の南北微分が正である領域の幅を考慮した帯状流モデルが実際の数値計算結果をよく表現していることが分かる。

図3(a)に東西非対称度 $r$ の $\beta$ 依存性を示した。 $\beta = 0$ では帯状流に東西非対称性はなく( $r = 1$ )、 $20 \leq \beta \leq 200$ では $r$ は $\beta$ に対してべき的に増加した。指数は0.8程度であった。一方、 $\beta \geq 200$ では $r$ は $\beta$ が増えるにつれ緩やかに減少した。図3(b)にはジェット一組当たりの渦度勾配が正の領域の幅 $l_+$ と負の領域の幅 $l_-$ の $\beta$ 依存性を示した。 $l_-$ は $\beta$ に対して概ね単調に減少している。一方、 $l_+$ は $\beta$ に対して急激に減少し、強制の長さスケール $l_f$ に漸近した。

$l_+$ が強制の長さスケール $l_f$ でよく近似できることは既にDanilov and Gurarie(2004)で指摘されているが、 $\beta$ 依存性については知られていなかった。また、理由もよくわかっていない。

次に $l_-$ の $\beta$ 依存性について考察する。 $\beta$ が増えるとジェット数 $k_j \approx \sqrt{\beta/2U_{rms}}$ が増えるため<sup>3</sup>、ジェット一つの幅 $l = l_+ + l_- = 2\pi/k_j$ が減る。従って、 $\beta \leq 200$ で $l_+ \sim l_f$ で一定だから、 $l_-$ は $\beta$ が増えるにつれ減少しなければならない。

$r$ に最大値があることは、 $l_+, l_-$ の $\beta$ 依存性を考えると解釈できる。 $20 \leq \beta \leq 200$ では、 $\beta$ の増加に対する $l_-$ の減少量よりも $l_+$ の減少量の方が大きいため、 $r$ が増加する。一方、 $\beta \gtrsim 200$ では $l_+ \sim l_f$ で、 $l_-$ は減少するため、 $r = l_-/l_+$ は減少する。渦度勾配比 $r$ の最大値は $l_+$ の下限 $l_f$ によって決まるため、強制スケール $l_f$ とジェットのスケール $l = 2\pi/k_j$ が分離されているほど渦度勾配比 $r$ は大きな値を取りうる。

## 5 まとめ

$\beta$ 面上の強制2次元乱流における東西非対称な帯状流の $\beta$ 依存性について調べた。帯状平均渦度の南北勾配が区分的に一定値をとることに注目し、 $\bar{\zeta}_{y+}$ と $\bar{\zeta}_{y-}$ を定義し、東西非対称度 $r$ をこれらの大きさの比として定義した。また、ジェット一組について帯状平均渦度の南北勾配が正である領域の幅 $l_+$ 、負である領域の幅 $l_-$ を定義し、 $r, l_+, l_-$ の $\beta$ 依存性について調べた。その結果、 $\beta$ が小さいときには帯状流は東西対称で、 $\beta$ が大きくなるにつれて東西非対称度 $r$ は増大した。また、ある程度おおきな $\beta$ で東西非対称度 $r$ は頭打ちになり、減少した。これは渦度勾配が正である領域の幅 $l_+$ と負である領域の幅の $\beta$ 依存性を考えることで解釈できた。 $\beta$ が大きくなると $l_+$ は強制の長さスケール $2\pi/k_f$ とおおよそ一致する。また、ジェット一組の幅 $l = 2\pi/k_j$ が $\beta$ が大きくなるにつれて減少することから、 $l_+$ が

<sup>3</sup> $U_{rms}$ も $\beta$ に依存することに注意。 $n$ 階のhypofrictionを使ったとき、強制波数よりも低波数側に注入したエネルギーが全てジェット波数 $k_j$ で散逸するという近似のもとで $k_\beta \propto \beta^{1/(n+2)}$ である(Danilov and Gurarie, 2004)。

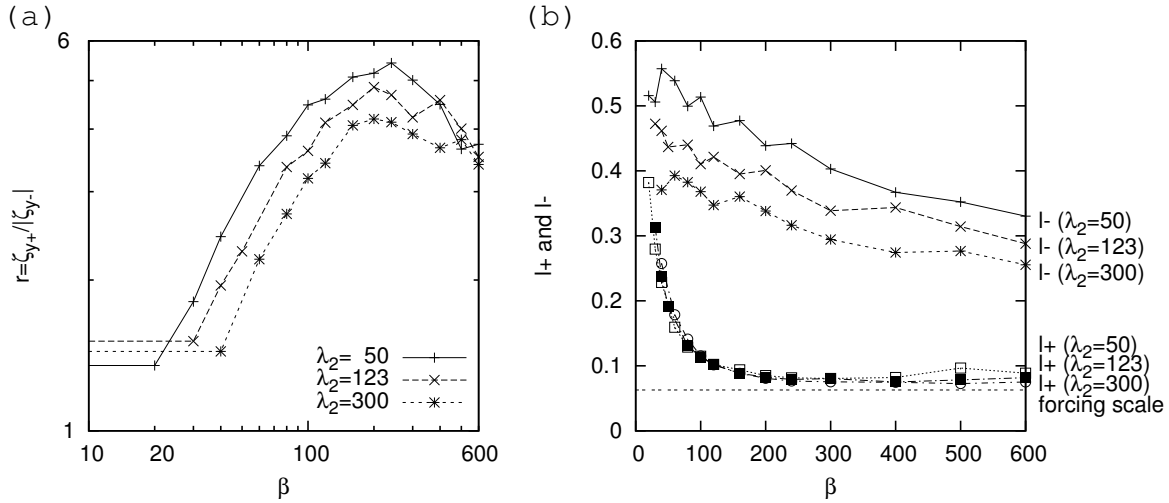


図 3: (a) 渦度勾配比  $r$  の  $\beta$  依存性を両対数でプロットした. (b) ジェット一組あたりの正の渦度勾配の幅  $l_+$  と負の渦度勾配の幅  $l_-$  の  $\beta$  依存性.

一定値をとると  $l_-$  が減少する. 従って,  $r = l_-/l_+$  は最大値を持つ.  $l_+$  の下限が強制の長さスケール  $l_f$  で与えられるため, 強制の長さスケールが小さいほど大きな東西非対称度をとらうと考えられる.

## 謝辞

本研究は文部科学省 21 世紀 COE プログラム「惑星系の起源と進化」の援助を受けている.

## 参考文献

- [1] Chekhlov, A., and Orszag, S. A., and Sukoriansky, S., Galperin, B., Staroselsky, I., 1996: The effect of small-scale forcing on large-scale structures in two-dimensional flows. *Physica D*, **98**, 321-334.
- [2] Danilov, S., and Gurarie, D., 2002: Rhines scale and spectra of the  $\beta$ -plane turbulence with bottom drag, *Phys. Rev.*, **E65**, 067301-1-067301-3.
- [3] Danilov, S., and Gurarie, D., 2004: Scaling, spectra and zonal jets in beta-plane turbulence. *Phys. Fluids*, **16**, 2592-2603.
- [4] Danilov, S., Gryanik, V.M., 2004: Barotropic beta-plane turbulence in a regime with strong zonal jets revisited, *J. Atmos. Sci.*, **61**, 2283-2295.
- [5] Panetta, R.L., 1993: Zonal jets in wide baroclinically unstable regions: persistence and scale selection, *J. Atmos. Sci.*, **50**, 2073-2106.
- [6] Rhines, P.B., 1975: Waves and turbulence on the  $\beta$ -plane. *J. Fluid Mech.*, **69**, 417-443.
- [7] Vallis, G.K., and Maltrud, M.E. 1993: Generation of mean flows and jets on a beta plane and over topography. *J. Phys. Oceanog.* **23**, 1346-1362.