

赤道波ノート

谷口 博

第五版

2002年7月24日

目次

1 浅水系の赤道波の定式化と無次元化	1
1.1 定式化	1
1.2 無次元化	1
1.3 v の式の導出	3
1.4 境界条件	4
2 赤道波の固有値問題とその解	5
2.1 固有値問題の定式化	5
2.2 $\hat{v} \neq 0$ の場合	6
2.2.1 $n = 0$ の場合	7
2.2.2 $n \geq 1$ の場合	9
2.3 $\hat{v} = 0$ の場合	12
2.3.1 $\omega = -k (\neq 0)$ の場合	12
2.3.2 $\omega = k$ の場合	13
2.4 固有値, 固有関数のまとめ	13
2.4.1 $\hat{v} \neq 0$ の解	13
2.4.2 $\hat{v} = 0$ の解	14
2.5 位相速度のまとめ	15
2.5.1 $\hat{v} \neq 0$ の解	15
2.5.2 $\hat{v} = 0$ の解	16
3 赤道波の分散関係式と水平構造	17
3.1 赤道波の分散曲線	17
3.2 $n = -1$ の場合の水平構造	18
3.3 $n = 0$ の場合の水平構造	19
3.4 $n \geq 1$ の場合の水平構造	20
3.5 $k = 0$ のモードの水平構造に関する注釈	23
4 慣性重力波の水平伝播のメカニズム	25
4.1 $n = 1, k = 0$ の慣性重力波	26
4.1.1 $n = 1, k = 0$ の慣性重力波の特徴	26
4.1.2 $n = 1, k = 0$ の慣性重力波の構造を決める物理量	27
4.1.3 $n = 1, k = 0$ の慣性重力波の構造	28

4.2	$n = 1, k \neq 0$ の東進慣性重力波	35
4.2.1	$0 < k \leq 1.2$ (低波数) の東進慣性重力波の特徴	35
4.2.2	$k > 1.2$ (高波数) の東進慣性重力波の特徴	45
4.3	$n = 1, k \neq 0$ の西進慣性重力波	47
4.3.1	$0 < k \leq 1.1$ (低波数) の西進慣性重力波の特徴	47
4.3.2	$k > 1.1$ (高波数) の西進慣性重力波の特徴	51
4.4	$n = 2, k = 0$ の慣性重力波	53
4.4.1	$n = 2, k = 0$ の慣性重力波の特徴	53
4.4.2	$n = 2, k = 0$ の慣性重力波の構造	54
4.5	$n = 2, k \neq 0$ の東進慣性重力波	60
4.6	$n = 2, k \neq 0$ の西進慣性重力波	64
5	赤道ロスビー波の水平伝播のメカニズム	68
5.1	$n = 1, k = 0$ の赤道ロスビー波	69
5.2	$n = 1, k \neq 0$ の赤道ロスビー波	69
5.2.1	$0 < k \leq 2.0$ (低波数) の赤道ロスビー波の特徴	69
5.2.2	$k > 2.0$ (高波数) の赤道ロスビー波の特徴	75
5.3	$n \geq 2, k \neq 0$ の赤道ロスビー波	78
6	混合ロスビー重力波の水平伝播のメカニズム	83
6.1	$n = 0, k = 0$ の混合ロスビー重力波	83
6.1.1	$n = 0, k = 0$ の混合ロスビー重力波の特徴	84
6.1.2	$n = 0, k = 0$ の混合ロスビー重力波の構造	84
6.2	$n = 0, k \neq 0$ の東進混合ロスビー重力波	90
6.2.1	$0 < k \leq 0.7$ (低波数) の東進混合ロスビー波の特徴	90
6.2.2	$k > 0.7$ (高波数) の東進混合ロスビー波の特徴	95
6.3	$n = 0, k \neq 0$ の西進混合ロスビー重力波	98
6.3.1	$0 < k \leq 2.5$ (低波数) の西進混合ロスビー波の特徴	98
6.3.2	$k > 2.5$ (高波数) の西進混合ロスビー波の特徴	103
7	赤道ケルビン波の水平伝播のメカニズム	109
A	赤道波の固有値・固有関数 (有次元系)	113
A.1	固有値問題の定式化	113
A.2	固有値, 固有関数のまとめ	114
A.2.1	$\hat{v} \neq 0$ の解	114
A.2.2	$\hat{v} = 0$ の解	115
B	$n \geq 1$ の分散関係式の解	116
B.1	$n \geq 1$ の場合の分散関係式の厳密解	116
B.2	$n \geq 1$ の場合の分散関係式の近似解	121
B.2.1	Matsuno(1966) の方法	121
B.2.2	厳密解から近似解を導く方法	122

C	赤道波方程式の各項のモード展開	125
D	渦度方程式の各項のモード展開	128
E	回転の無い浅水系の重力波	131
	E.1 1次元の非回転浅水系重力波	131
	E.2 2次元の非回転浅水系重力波	132
F	$n = 1, k \neq 0$ の慣性重力波の物理量	141
G	$n = 2, k = 0$ の慣性重力波の物理量	144
H	$n = 0, k = 0$ の混合ロスビー重力波の物理量	146
I	中緯度ロスビー波	148
	I.1 準地衝流渦度方程式	148
	I.2 ロスビー波の分散関係式	149
	I.3 速度ベクトル, ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズム	151

第 1 章

浅水系の赤道波の定式化と無次元化

1.1 定式化

簡単化のため, 流体の厚さ H は一定であるとし, 運動の無い基本場を考える. ここでは, 赤道 β 平面近似を用い, コリオリパラメータは以下のように表す:

$$f \approx \beta y. \quad (1.1.1)$$

ここで, $\beta = 2\Omega/a$ (a は惑星半径, Ω は惑星の自転角速度) である. このとき浅水系の方程式系を線形化すると, 以下のようになる:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta y v = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (1.1.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \beta y u = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (1.1.3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + gH \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \quad (1.1.4)$$

ここで, $\Phi = gH$ はジオポテンシャルである.

1.2 無次元化

次のようなスケールを導入する.

$$\text{水平速度} \equiv U \equiv \sqrt{gH}, \quad (1.2.5)$$

$$\text{長さ} \equiv L \equiv \sqrt{\frac{\sqrt{gH}}{\beta}}, \quad (1.2.6)$$

$$\text{時間} \equiv T \equiv \frac{L}{U} = \sqrt{\frac{1}{\beta\sqrt{gH}}}, \quad (1.2.7)$$

$$\text{深さ} \equiv H. \quad (1.2.8)$$

これらを用いて, 変数を無次元化する.

$$(x, y) = L(x_*, y_*), \quad (1.2.9)$$

$$t = Tt_*, \quad (1.2.10)$$

$$(u, v) = U(u_*, v_*), \quad (1.2.11)$$

$$\Phi = gH\Phi_*. \quad (1.2.12)$$

ただし, * の付いた量はそれぞれの量の無次元量を表す. これらを, (1.1.2)~(1.1.4) に代入すると

$$\frac{U}{T} \frac{\partial u_*}{\partial t_*} - \beta LU y_* v_* = -\frac{gH}{L} \frac{\partial \Phi_*}{\partial x_*}, \quad (1.2.13)$$

$$\frac{U}{T} \frac{\partial v_*}{\partial t_*} + \beta LU y_* u_* = -\frac{gH}{L} \frac{\partial \Phi_*}{\partial y_*}, \quad (1.2.14)$$

$$gH \frac{\partial \Phi_*}{\partial t_*} + \frac{gHU}{L} \left(\frac{\partial u_*}{\partial x_*} + \frac{\partial v_*}{\partial y_*} \right) = 0. \quad (1.2.15)$$

すなわち

$$\frac{\partial u_*}{\partial t_*} - \beta LT y_* v_* = -\frac{gHT}{LU} \frac{\partial \Phi_*}{\partial x_*}, \quad (1.2.16)$$

$$\frac{\partial v_*}{\partial t_*} + \beta LT y_* u_* = -\frac{gHT}{LU} \frac{\partial \Phi_*}{\partial y_*}, \quad (1.2.17)$$

$$\frac{\partial \Phi_*}{\partial t_*} + \frac{TU}{L} \left(\frac{\partial u_*}{\partial x_*} + \frac{\partial v_*}{\partial y_*} \right) = 0. \quad (1.2.18)$$

ところが,

$$\beta LT = \beta \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{gH}}{\beta}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\beta\sqrt{gH}}} = 1, \quad (1.2.19)$$

$$\frac{gHT}{LU} = gH \cdot \sqrt{\frac{1}{\beta\sqrt{gH}}} \cdot \sqrt{\frac{\beta}{\sqrt{gH}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{gH}} = 1, \quad (1.2.20)$$

$$\frac{TU}{L} = T \cdot \frac{1}{T} = 1, \quad (1.2.21)$$

である. ゆえに,

$$\frac{\partial u_*}{\partial t_*} - y_* v_* = -\frac{\partial \Phi_*}{\partial x_*}, \quad (1.2.22)$$

$$\frac{\partial v_*}{\partial t_*} + y_* u_* = -\frac{\partial \Phi_*}{\partial y_*}, \quad (1.2.23)$$

$$\frac{\partial \Phi_*}{\partial t_*} + \frac{\partial u_*}{\partial x_*} + \frac{\partial v_*}{\partial y_*} = 0. \quad (1.2.24)$$

となる. 以下, 簡単のため添字の * は省略する. 以降では, 無次元化した方程式系を主に扱い, 必要に応じて有次元系に戻ることにする (有次元系での式の扱いは場合によって付録に移動する).

1.3 v の式の導出

(1.2.22), (1.2.24) より

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = yv, \quad (1.3.25)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}. \quad (1.3.26)$$

これを u, Φ について解くと,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi = \left(y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial t} \right) v, \quad (1.3.27)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u = \left(-y \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \right) v. \quad (1.3.28)$$

一方, (1.2.23) に $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ を作用させると

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) v + y \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi = 0. \quad (1.3.29)$$

上式に (1.3.27), (1.3.28) を代入して

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) v + y \left(-y \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \right) v + \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial t} \right) v = 0, \quad (1.3.30)$$

すなわち,

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial t} - y^2 \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^3}{\partial t^3} \right) v = 0, \quad (1.3.31)$$

を得る.

1.4 境界条件

赤道波を扱う本章では, (1.1.2)~(1.1.4), もしくは, (1.2.22)~(1.2.24) の解のうち, 赤道 ($y = 0$) に捕捉された解を考える. 赤道に捕捉された解を考える根拠は, (1.2.22)~(1.2.24) において u, Φ を消去した v についての式 (1.3.31) を考えることで得られる.

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial t} - y^2 \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^3}{\partial t^3} \right) v = 0. \quad (1.3.31)$$

東西方向には, 地球や惑星の様な緯度円を一周する状況を考え, 周期境界条件

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} (u, v, \Phi) \Big|_x = \frac{\partial^n}{\partial x^n} (u, v, \Phi) \Big|_{x+L_x} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N), \quad (1.4.32)$$

を課すことにする. 一方, 南北方向には “赤道に捕捉されている” 波だけを考え, 境界条件として

$$(u, v, \Phi) \rightarrow 0 \quad \text{as } y \rightarrow \pm\infty, \quad (1.4.33)$$

の条件を持つものとする. なぜなら, x, t に依存しない様な特殊な場合を考え, y に依存する項のみを取り出すと,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - y^2 \right) v = 0. \quad (1.4.34)$$

したがって

$$v(y) \sim A \exp\left(\frac{y^2}{2}\right) + B \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right), \quad (1.4.35)$$

となる (ただし, A, B は任意定数). これにより (1.3.31) には $y \rightarrow \pm\infty$ で発散する解が含まれているから, $y \rightarrow \pm\infty$ で $v(y)$ が発散しないという条件を課しておかなければならない. 今の場合は $A = 0$ の場合に対応する:

$$v(y) \sim B \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right). \quad (1.4.36)$$

よって, $y \rightarrow \pm\infty$ で $v(y) \rightarrow 0$ となる. 以上のことから, もっと一般的な場合でも $y \rightarrow \pm\infty$ で $v(y) \rightarrow 0$ となるような境界条件を課すことにする.

第 2 章

赤道波の固有値問題とその解¹

2.1 固有値問題の定式化

u, v, Φ を以下の様に水平方向に離散化する:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ \Phi \end{pmatrix} = \text{Re} \sum_k \sum_m \begin{bmatrix} a_{k,m} \hat{u}_{k,m}(y) \\ a_{k,m} \hat{v}_{k,m}(y) \\ a_{k,m} \hat{\Phi}_{k,m}(y) \end{bmatrix} \exp[i(kx - \omega_{k,m}t)]. \quad (2.1.1)$$

ただし, $a_{k,m}$ は任意の定数, k は東西波数, ω は振動数, m は ω を位相速度の大きい順に並べた時のモードの番号である. (2.1.1) を (1.2.22)~(1.2.24) に代入し, $\exp i(kx - \omega t)$ の直交性を用いて各々の k についての成分を取り出すと以下を得る (以降, 添字 k, m は省略):

$$-i\omega \hat{u} - y\hat{v} = -ik\hat{\Phi}, \quad (2.1.2)$$

$$-i\omega \hat{v} + y\hat{u} = -\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial y}, \quad (2.1.3)$$

$$-i\omega \hat{\Phi} + ik\hat{u} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} = 0. \quad (2.1.4)$$

上式は k をパラメータとする固有値 $\omega = \omega(k)$ の固有値問題となる.

以下では, \hat{v} だけの式を導出し, それを解くことにする. (2.1.2)~(2.1.4) から $\hat{u}, \hat{\Phi}$ を消去すると次式が得られる.

$$\left(\omega \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \omega - k + \omega^3 - \omega y^2 \right) \hat{v} = 0. \quad (2.1.5)$$

上の式は, (1.3.31) に対応する. \hat{v} は, 上式と, 境界条件 (赤道に捕捉される条件),

$$v \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow \pm\infty),$$

¹有次元系での固有関数, 固有値の導出は, 付録 第 A 章にまとめた.

を満たす k の関数として決められる.

以下では $\hat{v} = 0, \hat{v} \neq 0$ の両者について場合分けを行い, 固有値, 固有関数を議論することにする. 第2.3節で詳述するように $\hat{v} = 0$ の場合でも, $\hat{u} \neq 0, \hat{\Phi} \neq 0$ となるような物理的に意味のある解が存在するからである.

2.2 $\hat{v} \neq 0$ の場合

この節では $\hat{v} \neq 0$ についての分散関係を導出し, その後に固有関数の構造を求める.

(2.1.5) の両辺を ω で割ると, 次式を得る.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 - \frac{k}{\omega} + \omega^2 - y^2 \right) \hat{v} = 0. \quad (2.2.6)$$

両辺を ω で割ることができたのは, $\hat{v} \neq 0$ の場合, $\omega \neq 0$ だからである. それは以下の理由による. $\omega = 0$ の場合, (2.1.5) より,

$$k\hat{v} = 0 \quad (2.2.7)$$

となるから, $\hat{v} \neq 0$ より $k = 0$ を得る. このとき, \hat{v} の固有関数形を (2.1.5) より求めることが出来ない. そこで, 元の方程式系 (2.1.2)~(2.1.4) に戻って, $\omega = k = 0$ とすると, $\hat{v} = 0$ を得る. これは $\hat{v} \neq 0$ とした始めの仮定に不適であるから, したがって, $\omega \neq 0$ が得られる.

(2.2.6) 式は, 以下の微分方程式

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2) u = 0, \quad (2.2.8)$$

(一次元調和振動子に対するシュレーディンガー方程式¹, もしくは, 放物柱関数を与える微分方程式) と同じ形をしている. したがって, (2.2.6) と比較して以下の分散関係式

$$\omega^3 - k^2\omega - k = (2n + 1)\omega, \quad (2.2.9)$$

を得る. また, 固有関数 \hat{v} は (2.2.8) よりエルミート多項式 $H_n(y)$:

$$H_n(y) = (-1)^n e^{y^2} \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2} \quad (n \geq 0), \quad (2.2.10)$$

$$H_0(y) = 1, \quad H_1(y) = 2y, \quad H_2(y) = 4y^2 - 2, \quad H_3(y) = 8y^3 - 12y \quad \dots$$

を用いて以下のように表される:

$$\hat{v}_n(y) = A_n D_n(y) \quad (n \geq 0), \quad (2.2.11)$$

$$D_n(y) = H_n(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \quad (n \geq 0). \quad (2.2.12)$$

ただし, A_n は任意の定数であり, 以降簡単化のため $A_n = 1$ とする². また, この $\hat{v}_n(y)$ を使って求められる $\hat{u}(y), \hat{\Phi}(y)$ を以降 $\hat{u}_n(y), \hat{\Phi}_n(y)$ と表すことにする.

以下では, まず (2.2.9) 式を解き, 分散関係式を導出する. 次に \hat{v}_n の固有関数 (2.2.11) を用いて, 元の方程式系 (2.1.2)~(2.1.4) から n の値に応じた固有関数 $\hat{u}_n, \hat{\Phi}_n$ を導出する. さらにこれらの解が物理的に意味のある解であるかどうかをチェックすることにする.

2.2.1 $n = 0$ の場合

(2.2.9) より,

$$\omega^3 - k^2\omega - k = \omega, \quad \rightarrow \quad (\omega + k)(\omega^2 - k\omega - 1) = 0. \quad (2.2.13)$$

¹質量 m の質点の x 方向の速度 u , 全エネルギー E , 質点の振動数 ω とすると, 次の関係が成り立つ (シュレーディンガー方程式):

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}x^2u = -\frac{2mE}{\hbar^2}u, \quad \rightarrow \quad \frac{d^2u}{dx^2} + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}x^2\right)u = 0.$$

ここで, $\xi = \alpha x, \alpha = \sqrt{m\omega/\hbar}, \lambda = 2E/\hbar\omega$ と変数変換を行うと次式を得る:

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2)u = 0.$$

ただし, $\hbar = h/2\pi$, h はプランク定数である. このとき, 固有値 λ , 固有関数 u はエルミート (Hermite) 多項式 H_n を用いて次のように与えられる:

$$\lambda = 2n + 1, \quad u_n(\xi) = A_n e^{-\xi^2/2} H_n(\xi), \quad H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n e^{-\xi^2}}{d\xi^n} \quad (n \geq 0).$$

ここで A_n は $\int_{-\infty}^{\infty} |u_n(\xi)|^2 d\xi = 1$ となるように選ばれる規格化定数である (例えば, 原島 鮮著, 初等量子力学 p54~p69 等, 参照). またエルミート多項式によって定義される次の関数を放物柱関数という:

$$D_n(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi) = (-1)^n e^{\frac{\xi^2}{2}} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2} \quad (n \geq 0).$$

一方, エルミート多項式には次の関係 (エルミート方程式)

$$\frac{d^2}{d\xi^2} H_n - 2\xi \frac{d}{d\xi} H_n + 2n H_n = 0,$$

があり, n 次 ($n \geq 0$) の放物柱関数 D_n の満たすべき式は上の関係式に D_n の表現を代入して

$$\frac{d^2}{d\xi^2} D_n + (2n + 1 - \xi^2) D_n = 0.$$

したがって, (2.2.8) の形式の微分方程式は, 固有値 $2n + 1$, 固有関数 D_n を取り得ることが分かる.

²本来 A_n は, 固有関数 $\hat{u}_n, \hat{v}_n, \hat{\Phi}_n$ が以下の規格化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy (u_{\omega'}^* u_{\omega} + v_{\omega'}^* v_{\omega} + \Phi_{\omega'}^* \Phi_{\omega}) = \delta_{\omega\omega'},$$

を満たすように決める. ここでは簡単化のため $A_n = 1$ とした.

ゆえに, $n = 0$ の場合に得られる ω は

$$\omega = -k \quad \text{もしくは} \quad \omega = (k \pm \sqrt{k^2 + 4})/2, \quad (2.2.14)$$

である. 一方, (2.2.11) より固有関数 \hat{v}_0 は次の様になる:

$$\begin{aligned} \hat{v}_0(y) &= H_0(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

以下では, (2.2.14) の ω により場合分けを行い, 固有関数 (2.2.15) を用いて $\hat{u}_0, \hat{\Phi}_0$ を求める.

a) $\omega = (k \pm \sqrt{k^2 + 4})/2$ の場合

(2.1.2), (2.1.4) より,

$$(\omega^2 - k^2)\hat{u}_0 = i \left(\omega y - k \frac{d}{dy} \right) \hat{v}_0, \quad (2.2.16)$$

$$(\omega^2 - k^2)\hat{\Phi}_0 = i \left(ky - \omega \frac{d}{dy} \right) \hat{v}_0. \quad (2.2.17)$$

であるから, $\omega \neq \pm k$ より,

$$\hat{u}_0 = \frac{i}{\omega^2 - k^2} \left(\omega y - k \frac{d}{dy} \right) \hat{v}_0, \quad (2.2.18)$$

$$\hat{\Phi}_0 = \frac{i}{\omega^2 - k^2} \left(ky - \omega \frac{d}{dy} \right) \hat{v}_0. \quad (2.2.19)$$

ゆえに, (2.2.15) を代入して $\omega = (k \pm \sqrt{k^2 + 4})/2$ の場合の固有関数をまとめると次の様になる:

$$\hat{u}_0 = \frac{i}{\omega^2 - k^2} (\omega y + ky) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) = \frac{i}{\omega - k} y D_0, \quad (2.2.20)$$

$$\hat{v}_0 = D_0, \quad (2.2.21)$$

$$\hat{\Phi}_0 = \frac{i}{\omega^2 - k^2} (ky + \omega y) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) = \frac{i}{\omega - k} y D_0. \quad (2.2.22)$$

第3章で詳述するが, これらの波は東進, 西進する混合ロスビー重力波である.

b) $\omega = -k$ ($\neq 0$) の場合

(2.1.2)~(2.1.4) で $\omega = -k$ とし, (2.2.15) 式を代入すると次式を得る:

$$ik\hat{u}_0 - ye^{-\frac{1}{2}y^2} = -ik\hat{\Phi}_0, \quad (2.2.23)$$

$$ike^{-\frac{1}{2}y^2} + y\hat{u}_0 = -\frac{\partial\hat{\Phi}_0}{\partial y}, \quad (2.2.24)$$

$$ik\hat{\Phi}_0 + ik\hat{u}_0 - ye^{-\frac{1}{2}y^2} = 0. \quad (2.2.25)$$

ここで, (2.2.23) と (2.2.25) は同じ式となるから, 次の関係を得る ($\because k \neq 0$):

$$\hat{\Phi}_0 = -\hat{u}_0 + \frac{1}{ik}ye^{-\frac{1}{2}y^2}. \quad (2.2.26)$$

これより (2.2.24) から次式を得る:

$$\frac{\partial\hat{u}_0}{\partial y} - y\hat{u}_0 = \frac{1}{ik}(1 - k^2 - y^2)e^{-\frac{1}{2}y^2}. \quad (2.2.27)$$

左辺 = 0 として得られる同次線形微分方程式の解 ($e^{\frac{1}{2}y^2}$) を用いて, $\hat{u}_0 = C(y)e^{\frac{1}{2}y^2}$ と表されるから,

$$\frac{\partial\hat{u}_0}{\partial y} = \frac{\partial C(y)}{\partial y}e^{\frac{1}{2}y^2} + yC(y)e^{\frac{1}{2}y^2},$$

より, (2.2.27) に代入して次式を得る:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(y)}{\partial y} &= \frac{1}{ik}(1 - k^2 - y^2)e^{-y^2} \\ C(y) &= \int_{\infty}^y \frac{1}{ik}(1 - k^2 - y'^2)e^{-y'^2} dy'. \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

ゆえに, (2.2.27) の解は以下のようになる:

$$\begin{aligned} \hat{u}_0 &= e^{\frac{1}{2}y^2} \int_{\infty}^y \frac{1}{ik}(1 - k^2 - y'^2)e^{-y'^2} dy' \\ &= e^{\frac{1}{2}y^2} \int_{\infty}^y \frac{1}{ik} \left\{ \left(\frac{1}{2} - k^2\right) e^{-y'^2} + \left(\frac{1}{2} - y'^2\right) e^{-y'^2} \right\} dy' \\ &= e^{\frac{1}{2}y^2} \int_{\infty}^y \frac{1}{ik} \left\{ \left(\frac{1}{2} - k^2\right) e^{-y'^2} \right\} dy' + e^{\frac{1}{2}y^2} \left[\frac{1}{2ik} y' e^{-y'^2} \right]_{\infty}^y \\ &= e^{\frac{1}{2}y^2} \int_{\infty}^y \frac{1}{ik} \left\{ \left(\frac{1}{2} - k^2\right) e^{-y'^2} \right\} dy' + \frac{1}{2ik} ye^{-\frac{1}{2}y^2}. \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

上の変形では, 積分定数を $y = \infty$ にて $\hat{u}_0 = 0$ となるように与えたが, 右辺第 1 項は $y \rightarrow -\infty$ で発散することが分かる. したがって, $\omega = -k \neq 0$ の場合, 境界条件を満たす解は存在しない ($n = 0$ の時には $\omega = -k \neq 0$ は固有値では無いことになり, 自由度が 1 足らなくなった (固有値は 3 つあるから 1 つ減った)).

2.2.2 $n \geq 1$ の場合

(2.2.9) より,

$$\omega_i^3 - k^2\omega_i - k = (2n + 1)\omega_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.2.30)$$

この式を解くと、固有値 ω_i は次のようになる (付録第 B 章参照):

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k^2 + 2n + 1}{3}} \left\{ -\cos \left(\frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{\sqrt{\frac{4}{27}(k^2 + 2n + 1)^3 - k^2}}{k} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{\sqrt{\frac{4}{27}(k^2 + 2n + 1)^3 - k^2}}{k} \right) \right\}, \quad (2.2.31)$$

$$\simeq -\frac{k}{k^2 + 2n + 1} \quad (2.2.32)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k^2 + 2n + 1}{3}} \left\{ -\cos \left(\frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{\sqrt{\frac{4}{27}(k^2 + 2n + 1)^3 - k^2}}{k} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{\sqrt{\frac{4}{27}(k^2 + 2n + 1)^3 - k^2}}{k} \right) \right\}, \quad (2.2.33)$$

$$\simeq -\sqrt{k^2 + 2n + 1} \quad (2.2.34)$$

$$\omega_3 = 2\sqrt{\frac{k^2 + 2n + 1}{3}} \cos \left(\frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{\sqrt{\frac{4}{27}(k^2 + 2n + 1)^3 - k^2}}{k} \right). \quad (2.2.35)$$

$$\simeq \sqrt{k^2 + 2n + 1} \quad (2.2.36)$$

第 3 章で詳述する様に、 ω_1 はロスビー波のモード、 ω_2, ω_3 は慣性重力波のモードを表している。

次に固有関数 $\hat{u}, \hat{\Phi}$ を求める。(2.2.11) より固有関数 \hat{v}_n は次の様になる:

$$\hat{v}_n(y) = H_n(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right). \quad (2.2.37)$$

以下では、固有関数 (2.2.37) を用いて $\hat{u}_n, \hat{\Phi}_n$ を求める。(2.1.2), (2.1.4) より,

$$(\omega^2 - k^2)\hat{u}_n = i \left(\omega y - k \frac{d}{dy} \right) \hat{v}_n, \quad (2.2.38)$$

$$(\omega^2 - k^2)\hat{\Phi}_n = i \left(ky - \omega \frac{d}{dy} \right) \hat{v}_n. \quad (2.2.39)$$

これで \hat{v}_n の微分を実行すれば $\hat{u}_n, \hat{\Phi}_n$ は求まるが、ここではやらない。 \hat{v}_n の微分を実行する代わりに、エルミート多項式についての漸化式を用いることにする。そこで、以下ではさらに変形を続ける。(2.2.38), (2.2.39) の辺々の加減を行うと、

$$(\omega^2 - k^2)(\hat{\Phi}_n + \hat{u}_n) = -i(k + \omega) \left(\frac{\partial}{\partial y} - y \right) \hat{v}_n, \quad (2.2.40)$$

$$(\omega^2 - k^2)(\hat{\Phi}_n - \hat{u}_n) = i(k - \omega) \left(\frac{\partial}{\partial y} + y \right) \hat{v}_n. \quad (2.2.41)$$

ここで $n \geq 1$ の場合、エルミート多項式、放物柱関数はそれぞれ以下の関係

$$H_{n+1}(y) - 2yH_n(y) + 2nH_{n-1}(y) = 0 \quad (n \geq 1), \quad (2.2.42)$$

$$D_{n+1}(y) - 2yD_n(y) + 2nD_{n-1} = 0 \quad (n \geq 1), \quad (2.2.43)$$

を満たすから、放物柱関数についての漸化式

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial y} - y\right) D_n &= \frac{\partial H_n}{\partial y} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) + D_n(-y) - yD_n \\ &= (2yH_n - H_{n+1}) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) - 2yD_n \\ &= -D_{n+1} \quad (n \geq 0), \end{aligned} \quad (2.2.44)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial y} + y\right) D_n &= \frac{\partial H_n}{\partial y} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) + D_n(-y) + yD_n \\ &= (2yH_n - H_{n+1}) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \\ &= 2yD_n(y) - D_{n+1}(y) \quad (n \geq 0) \\ &= 2nD_{n-1}(y) \quad (n \geq 1), \end{aligned} \quad (2.2.45)$$

を使うと、

$$(\omega^2 - k^2)(\hat{\Phi}_n + \hat{u}_n) = i(k + \omega)D_{n+1}, \quad (2.2.46)$$

$$(\omega^2 - k^2)(\hat{\Phi}_n - \hat{u}_n) = i(k - \omega)2nD_{n-1}. \quad (2.2.47)$$

ただし、 $n = 1, 2, 3, \dots$ である。ここで、 $D_n \neq 0$ ($n \geq 0$) であるから²、(2.2.46) より $\omega \neq k$ 、(2.2.47) より $\omega \neq -k$ を得る。ゆえに、(2.2.46)、(2.2.47) の両辺を $(\omega^2 - k^2)$ で割ることが出来て、 $n \geq 1$ の場合の固有関数は次の様になる：

$$\hat{u}_n = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{\omega - k} D_{n+1} + \frac{1}{\omega + k} 2nD_{n-1} \right), \quad (2.2.48)$$

$$\hat{v}_n = D_n, \quad (2.2.49)$$

$$\hat{\Phi}_n = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{\omega - k} D_{n+1} - \frac{1}{\omega + k} 2nD_{n-1} \right). \quad (2.2.50)$$

第 3 章で詳述するが、これらの波は東進、西進する慣性重力波とロスビー波である。

² $D_n = 0$ となるのは、 n が奇数の場合に $y = 0$ となる点 (線) 上のみである。なぜなら、 H_n は一般に

$$\begin{aligned} H_n(y) &= (2y)^n - \frac{n(n-1)}{1!} (2y)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} (2y)^{n-4} + \dots \\ &\quad + \begin{cases} (-1)^{n/2} \frac{n!}{\left(\frac{1}{2}n\right)!} & (n \text{ 偶数}), \\ (-1)^{(n-1)/2} \frac{n!}{\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)!} 2y & (n \text{ 奇数}), \end{cases} \end{aligned}$$

と表され、 n が奇数の場合には $H_n(y)$ の各項には必ず y の因子が含まれるためである。よって全領域で $D_n = 0$ となることはない ($D_n \neq 0$)。

2.3 $\hat{v} = 0$ の場合

$\hat{v} = 0$ は, (2.1.5) の自明解である. $\hat{u}, \hat{\Phi}$ の固有関数を考えるには, (2.1.2)~(2.1.4) の方程式系に戻って考察する必要がある. (2.1.2)~(2.1.4) に $\hat{v} = 0$ を代入して次式を得る:

$$-i\omega\hat{u} = -ik\hat{\Phi}, \quad (2.3.51)$$

$$y\hat{u} = -\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial y}, \quad (2.3.52)$$

$$-i\omega\hat{\Phi} + (ik\hat{u}) = 0. \quad (2.3.53)$$

(2.3.51) と (2.3.53) から

$$(\omega^2 - k^2)\hat{u} = 0, \quad (2.3.54)$$

$$(\omega^2 - k^2)\hat{\Phi} = 0. \quad (2.3.55)$$

したがって, 非自明解を持つ条件として以下の関係を得る:

$$\omega = \pm k. \quad (2.3.56)$$

以下では, 得られた条件 $\omega = \pm k$ と $\hat{v} = 0$ を用いて, 方程式系 (2.3.51)~(2.3.53) から固有関数 $\hat{u}, \hat{\Phi}$ を導出することにする.

2.3.1 $\omega = -k (\neq 0)$ の場合

この場合, (2.3.51) と (2.3.53) は同じ式となるから,

$$ik(\hat{u} + \hat{\Phi}) = 0, \quad (2.3.57)$$

ゆえに,

$$\hat{\Phi} = -\hat{u}. \quad (2.3.58)$$

これを (2.3.52) に代入して

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - y\right)\hat{u} = 0. \quad (2.3.59)$$

ゆえに, (2.3.59) の一般解は

$$\hat{u} = Ae^{\frac{1}{2}y^2}, \quad (2.3.60)$$

(A は任意定数) となる. 境界条件 (1.4.33) を満たすような $A (\neq 0)$ は存在しないから, よって $\omega = -k$ の場合には解は存在しない.

2.3.2 $\omega = k$ の場合

この場合も (2.3.51) と (2.3.53) は同じ式となるから,

$$ik(\hat{u} - \hat{\Phi}) = 0,$$

すなわち

$$\hat{u} = \hat{\Phi}. \quad (2.3.61)$$

これを (2.3.52) に代入して

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + y\right) \hat{u} = 0. \quad (2.3.62)$$

ゆえに,

$$\hat{u} = e^{-\frac{1}{2}y^2}, \quad (2.3.63)$$

$$\hat{v} = 0, \quad (2.3.64)$$

$$\hat{\Phi} = e^{-\frac{1}{2}y^2}. \quad (2.3.65)$$

となり, これらは境界条件 (1.4.33) を満たす解である. これが $\hat{v} \neq 0$ かつ $n = 0$ の場合に欠けていた解である. 第 3 章で詳述するが, この波はケルビン波である.

2.4 固有値, 固有関数のまとめ

第 2.2 節の結果より $\hat{v} \neq 0$ の場合には, $n = 0$ のとき解は 2 つ, $n \geq 1$ のときには解は 3 つ得られた. $n = 0$ の場合の解の個数が 1 つ少なくなっているが, 第 2.3 節の結果より $\hat{v} = 0$ とした場合に解が 1 つ得られたので, 解の数は 3 つそろった. 以上, 第 2.2 節, 第 2.3 節の結果 (固有値, 固有関数) をまとめると以下の様になる:

2.4.1 $\hat{v} \neq 0$ の解

$n = 0$ の場合の分散関係と固有関数は以下のとおりである.

$$\omega_i = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 4}}{2} \quad (i = 1, 2), \quad (2.4.66)$$

$$\hat{u}(y) = \frac{i}{\omega_i - k} y H_0 e^{-\frac{1}{2}y^2}, \quad (2.4.67)$$

$$\hat{v}(y) = H_0 e^{-\frac{1}{2}y^2}, \quad (2.4.68)$$

$$\hat{\Phi}(y) = \frac{i}{\omega_i - k} y H_0 e^{-\frac{1}{2}y^2}. \quad (2.4.69)$$

$n \geq 1$ の場合の分散関係と固有関数は以下のとおりである。

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k^2 + 2n + 1}{3}} \left\{ -\cos \left(\frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{\sqrt{\frac{4}{27}(k^2 + 2n + 1)^3 - k^2}}{k} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{\sqrt{\frac{4}{27}(k^2 + 2n + 1)^3 - k^2}}{k} \right) \right\} \quad (2.4.70)$$

$$\simeq -\frac{k}{k^2 + 2n + 1}, \quad (2.4.71)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k^2 + 2n + 1}{3}} \left\{ -\cos \left(\frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{\sqrt{\frac{4}{27}(k^2 + 2n + 1)^3 - k^2}}{k} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{\sqrt{\frac{4}{27}(k^2 + 2n + 1)^3 - k^2}}{k} \right) \right\} \quad (2.4.72)$$

$$\simeq -\sqrt{k^2 + 2n + 1}, \quad (2.4.73)$$

$$\omega_3 = 2\sqrt{\frac{k^2 + 2n + 1}{3}} \cos \left(\frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{\sqrt{\frac{4}{27}(k^2 + 2n + 1)^3 - k^2}}{k} \right) \quad (2.4.74)$$

$$\simeq \sqrt{k^2 + 2n + 1}, \quad (2.4.75)$$

$$\hat{u}(y) = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{\omega_i - k} H_{n+1} + \frac{1}{\omega_i + k} 2n H_{n-1} \right) e^{-\frac{1}{2}y^2} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.4.76)$$

$$\hat{v}(y) = H_n e^{-\frac{1}{2}y^2}, \quad (2.4.77)$$

$$\hat{\Phi}(y) = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{\omega_i - k} H_{n+1} - \frac{1}{\omega_i + k} 2n H_{n-1} \right) e^{-\frac{1}{2}y^2} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.4.78)$$

但し, ω_1 の $k = 0$ の固有関数は, 次節の $\hat{v} = 0$ の固有関数 (2.4.80)~(2.4.82) となる. なぜなら, (2.4.71) で $k = 0$ とすると $\omega = 0$ となり, $k = \omega$ となるので (2.4.76)~(2.4.78) の固有関数を用いることが出来ないからである. この様に $k = \omega = 0$ の解は縮退しており, 第5章や第7章で後述するように, ロスビー波やケルビン波の $k = 0$ の解に対応する.

2.4.2 $\hat{v} = 0$ の解

,

$v = 0$ の場合の解は以下の通りである.

$$\omega = k, \quad (2.4.79)$$

$$\hat{u}(y) = e^{-\frac{1}{2}y^2}, \quad (2.4.80)$$

$$\hat{v}(y) = 0, \quad (2.4.81)$$

$$\hat{\Phi}(y) = e^{-\frac{1}{2}y^2}. \quad (2.4.82)$$

ちなみに $\hat{v} = 0$ の固有値 $\omega = k$ は, $n \geq 1$ の場合の固有値方程式において $n = -1$ とすれば得られる. 一方, $\hat{v} = 0$ の場合の固有関数は, $n \geq 1$ の場合の固有関数を表す式において $n = -1$ を代入し $H_{-1} = H_{-2} = 0$ と定義すれば, $(i/2)H_0/(\omega_i - k) \sim 1$ と考えることで $\hat{v} = 0$ の場合と同様の式が得られる. よって, $\hat{v} = 0$ の解を形式的に $n = -1$ の場合と定義することにする.

最後に, 各物理量の位相関係に関して注意しておく. まず, \hat{u} と $\hat{\Phi}$ は n の値によらず同位相の関係にある. このことは, $n = 0$ の場合は (2.4.67) と (2.4.69) より, $n = 1$ の場合は (2.4.76) と (2.4.78) より明らかである. また, $n = -1$ でない場合には, \hat{v} と $\hat{u}, \hat{\Phi}$ は $\pi/2$ だけ位相が異なっていることが分かる³.

2.5 位相速度のまとめ

本節では, 第 2.4 節で求めた固有値から求めた位相速度 c をまとめておく.

2.5.1 $\hat{v} \neq 0$ の解

$n = 0$ の場合の位相速度は以下のとおりである.

$$c_i = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4/k}}{2} \quad (i = 1, 2) \quad (2.5.83)$$

$n \geq 1$ の場合の位相速度は以下のとおりである.

$$c_1 = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{k^2 + 2n + 1}{3}} \left\{ -\cos \left(\frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{\sqrt{\frac{4}{27}(k^2 + 2n + 1)^3 - k^2}}{k} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{\sqrt{\frac{4}{27}(k^2 + 2n + 1)^3 - k^2}}{k} \right) \right\} \quad (2.5.84)$$

$$\simeq -\frac{1}{k^2 + 2n + 1}, \quad (2.5.85)$$

$$c_2 = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{k^2 + 2n + 1}{3}} \left\{ -\cos \left(\frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{\sqrt{\frac{4}{27}(k^2 + 2n + 1)^3 - k^2}}{k} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{\sqrt{\frac{4}{27}(k^2 + 2n + 1)^3 - k^2}}{k} \right) \right\} \quad (2.5.86)$$

$$\simeq -\frac{1}{k} \sqrt{k^2 + 2n + 1}, \quad (2.5.87)$$

³ケルビン波に対応する $n = -1$ の場合には, \hat{v} は常に 0 であるから, \hat{v} と $\hat{u}, \hat{\Phi}$ の間の位相関係を考えること自体意味が無い.

$$c_3 = \frac{2}{k} \sqrt{\frac{k^2 + 2n + 1}{3}} \cos \left(\frac{1}{3} \tan^{-1} \sqrt{\frac{4}{27} (k^2 + 2n + 1)^3 - k^2} \right) \quad (2.5.88)$$

$$\simeq \frac{1}{k} \sqrt{k^2 + 2n + 1}. \quad (2.5.89)$$

2.5.2 $\hat{v} = 0$ の解

$v = 0$ の場合の位相速度は以下の通りである.

$$c = 1 \quad (2.5.90)$$

第 3 章

赤道波の分散関係式と水平構造

本章では前章の結果に基づいて赤道波の分類を行い, 第 2.4.1 節, 第 2.5.2 節 の固有関数で与えられる水平構造から各モードの定義を行う. 有次元系での議論は, 付録第 A 章にまとめた.

3.1 赤道波の分散曲線

第 2.4 節 の結果より, これまでの分散関係と分散関係式から求めた位相速度をまとめると, 図 3.1, 3.2 の様になる. 各々のモードの名前付けについては次節参照のこと.

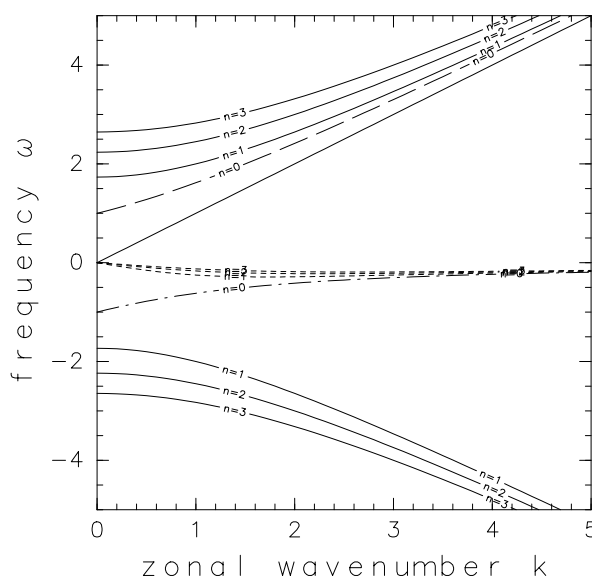


図 3.1: 赤道波の分散曲線の理論解 ($-1 \leq n \leq 3$). ラベル無し実線は赤道ケルビン波 (2.4.79), ラベル有り実線は西進, 東進慣性重力波の近似解 (2.4.73) と (2.4.75), 点線は赤道ロスビー波の近似解 (2.4.71), 破線と一点鎖線は混合ロスビー重力波 (2.4.66) の分散曲線を表す. 慣性重力波とロスビー波の分散曲線の近似解と厳密解は, 実際にはよく一致する.

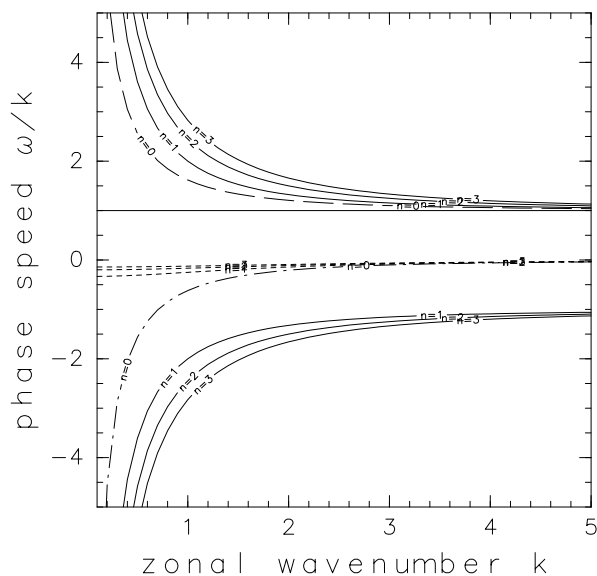


図 3.2: 赤道波の位相速度の理論解. 曲線と波の対応は図 3.1と同様. ラベル無し実線は (2.5.90), ラベル有り実線は (2.5.87) と (2.5.89), 点線は (2.5.85), 破線と一点鎖線は (2.5.83) の位相速度を表す.

3.2 $n = -1$ の場合の水平構造

この場合 (2.4.79) より, 分散関係式は

$$\omega = k, \quad (3.2.1)$$

である. この振動数を用いて固有関数 (2.4.80)~(2.4.82) を図示すると次の様になる:

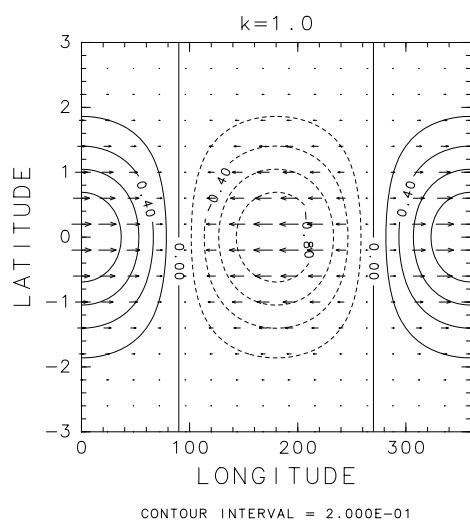


図 3.3: 赤道ケルビン波の圧力場と速度場の分布 ($k = 1, \omega = 1$).

この波は赤道に壁を対応させた場合に、壁に沿って伝播するケルビン波と同じ構造をしており、赤道ケルビン波と呼ばれる。

3.3 $n = 0$ の場合の水平構造

この場合 (2.4.66) より、分散関係式は

$$\omega = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 4}}{2}. \quad (3.3.2)$$

したがって、この場合東進する波と西進する波が存在することがわかる。この振動数を用いると、それぞれの波の固有関数 (2.4.67)~(2.4.69) は図 3.4, 3.5 の様になる。

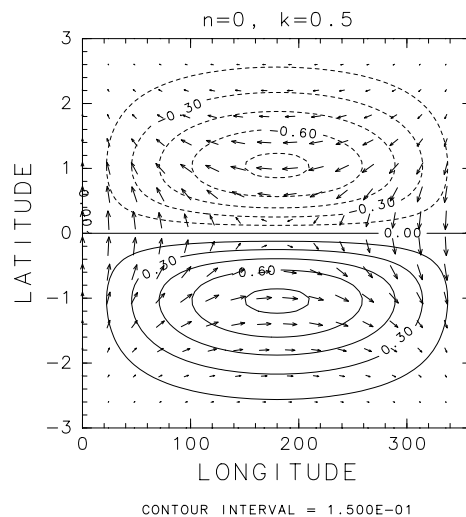


図 3.4: $n = 0$ の混合ロスビー重力波 (東進) の圧力場と速度場の分布 ($k = 0.5, \omega = 2.56$).

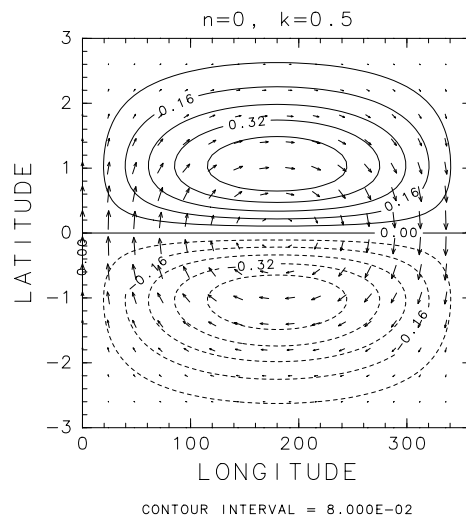


図 3.5: $n = 0$ の混合ロスビー重力波 (西進) の圧力場と速度場の分布 ($k = 0.5, \omega = -1.56$).

東進する波の方は, 速度場の収束発散により位相伝播する構造をしており (第 4 章参照), **慣性重力波**と呼ばれている. 一方, 西進する波には第 6 章で詳述するように重力波的な性質とロスビー波的な性質が存在する. このような特徴から, 西進する波の方は**混合ロスビー重力波**と呼ばれている. 本ノートでは, 一般的な呼称に習い $n = 0$ のモードはまとめて **混合ロスビー重力波のモード**と呼ぶことにする.

3.4 $n \geq 1$ の場合の水平構造

この場合 (2.4.70)~(2.4.75) より, 分散関係式は以下の様になる:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k^2 + 2n + 1}{3}} \left\{ -\cos \frac{1}{3} \left(\tan^{-1} \frac{\sqrt{\frac{4}{27}(k^2 + 2n + 1)^3 - k^2}}{k} \right) + \sqrt{3} \sin \frac{1}{3} \left(\tan^{-1} \frac{\sqrt{\frac{4}{27}(k^2 + 2n + 1)^3 - k^2}}{k} \right) \right\}, \quad (3.4.3)$$

$$\simeq -\frac{k}{k^2 + 2n + 1} \quad (3.4.4)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k^2 + 2n + 1}{3}} \left\{ -\cos \frac{1}{3} \left(\tan^{-1} \frac{\sqrt{\frac{4}{27}(k^2 + 2n + 1)^3 - k^2}}{k} \right) - \sqrt{3} \sin \frac{1}{3} \left(\tan^{-1} \frac{\sqrt{\frac{4}{27}(k^2 + 2n + 1)^3 - k^2}}{k} \right) \right\}, \quad (3.4.5)$$

$$\simeq -\sqrt{k^2 + 2n + 1} \quad (3.4.6)$$

$$\omega_3 = 2\sqrt{\frac{k^2 + 2n + 1}{3}} \cos \frac{1}{3} \left(\tan^{-1} \frac{\sqrt{\frac{4}{27}(k^2 + 2n + 1)^3 - k^2}}{k} \right). \quad (3.4.7)$$

$$\simeq \sqrt{k^2 + 2n + 1}. \quad (3.4.8)$$

この様に, $n \geq 1$ の場合には分散関係式は 3 つ存在する. 以下ではこれまでの節と同様, これらの分散関係式を用いて波の固有関数 (2.4.76)~(2.4.78) の図示を行い, 波の定義を行うことにする.

まずはじめに ω_1 の振動数を用いて, 固有関数 (2.4.76)~(2.4.78) を図示すると図 3.6 の様になる. 第 5 章で詳述するように, これはいわゆるロスビー波の伝播メカニズムにしたがって伝播する構造をしており, **赤道ロスビー波**と呼ばれている. よって, このモードを **赤道ロスビー波のモード**と定義することにする.

次に, ω_2 の振動数を用いて, 固有関数 (2.4.76)~(2.4.78) を図示すると図 3.7 の右図の様になる. これは第 4 章で詳述するように, f 平面のいわゆる慣性重力波と同様のメカニズムで

西に伝播する構造をしており、赤道域での**西進慣性重力波**と呼ばれている。よって、このモードを赤道域での**西進慣性重力波のモード**と定義することにする。

次に、 ω_3 の振動数を用いて、固有関数 (2.4.76)~(2.4.78) を図示すると図 3.7 の左図の様になる。これも ω_2 の場合と同様、 f 平面のいわゆる慣性重力波と同様のメカニズムで東に伝播する構造をしており、赤道域での**東進慣性重力波**と呼ばれている。よって、このモードを赤道域での**東進慣性重力波のモード**と定義することにする。

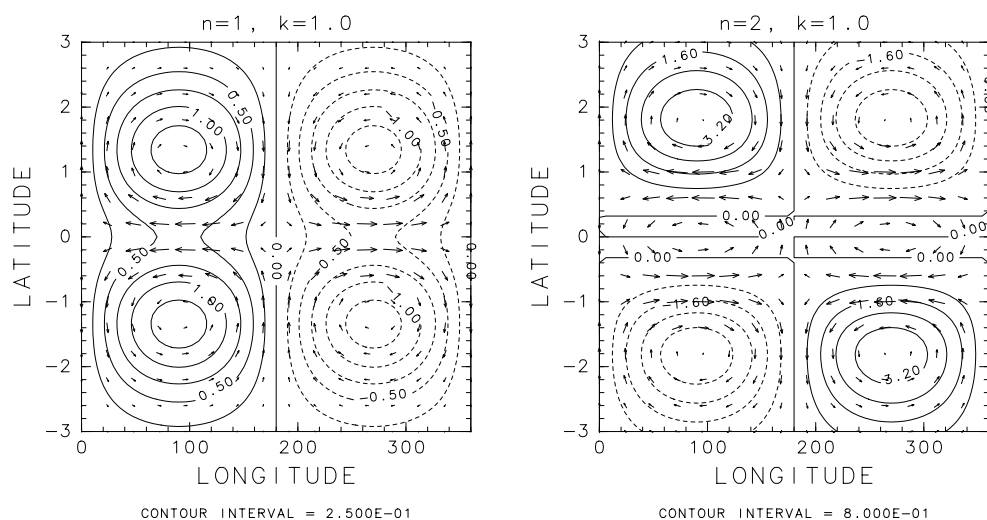


図 3.6: 赤道ロスビー波の圧力場と速度場の分布 ($k = 1$). 左図: $n = 1, \omega = -0.25$, 右図: $n = 2, \omega = -0.17$.

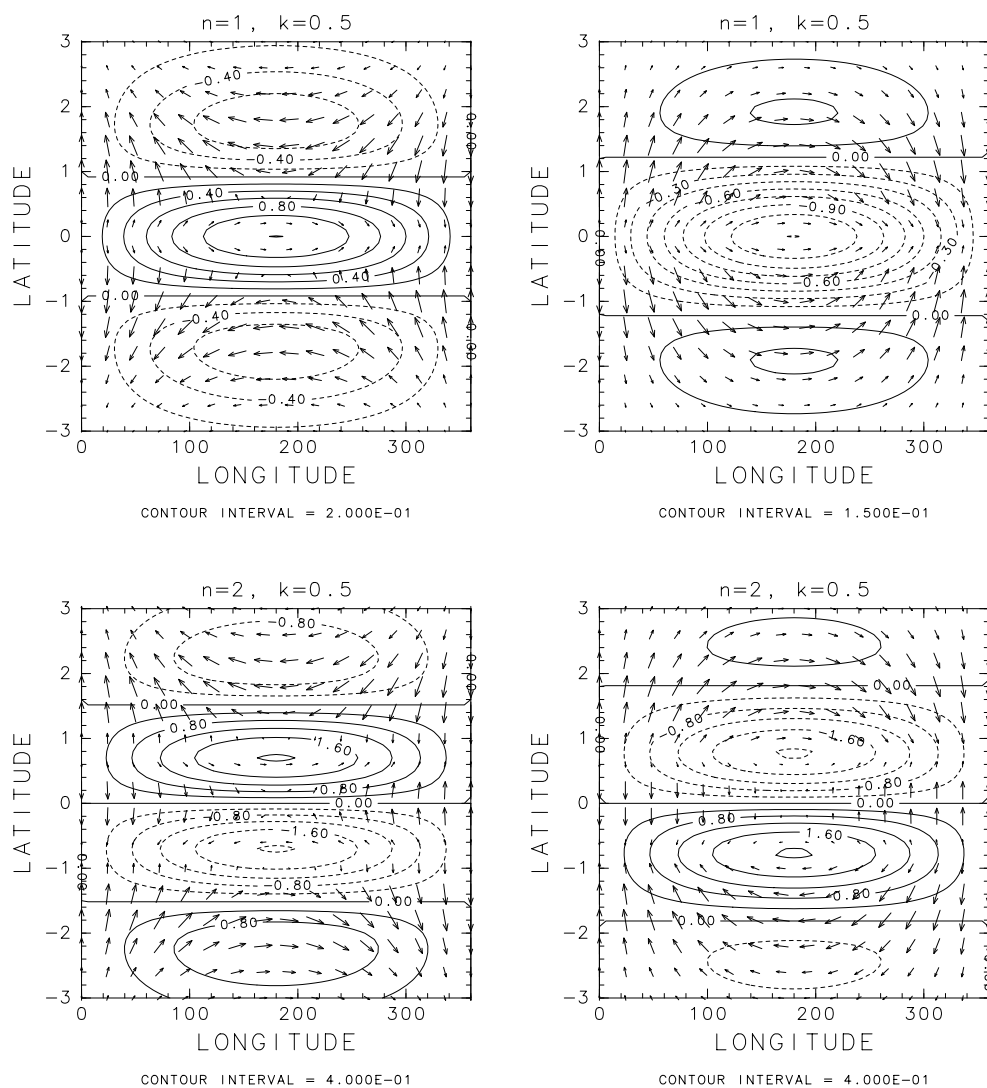


図 3.7: 慣性重力波の圧力場と速度場の分布 ($k = 0.5$). 左図: 東進慣性重力波, 右図: 西進慣性重力波. 上段から $n = 1$ (左図 $\omega = 1.80$, 右図 $\omega = -1.80$), $n = 2$ (左図 $\omega = 2.29$, 右図 $\omega = -2.29$).

3.5 $k = 0$ のモードの水平構造に関する注釈

第 3.3 節, 第 3.4 節で定義した慣性重力波と混合ロスビー重力波では, n が同じで $k = 0$ の場合には, 東進するモードと西進するモードは同じモードになる. 慣性重力波や混合ロスビー重力波の分散関係式を見ると, $k = 0$ の東進するモードと西進するモードの振動数は, n の値が同じ場合には絶対値は等しいが異なる符号を取ることがわかる. このため, 図 3.1 の分散曲線は n の値が同じでも東進するモードと西進するモードは, 見かけ上異なるモードのようになってしまっていた. これらの 2 つのモードは, 負の波数 k を導入し正の振動数だけで表現すると, $k = 0$ で接続 (振動数が等しくなる) し, 分散曲線の図から見ても東進するモードと西進するモードは同じモードであることがわかる (図 3.8).

同じ n の値をもつ東進するモードと西進するモードの 2 つの振動数は, $k = 0$ で等しくなることが分かったので, 次に 2 つのモードの構造も等しくなることを示す. 以下では, 図 3.1 で見かけ上異なるモードのようになってしまっていた同じ n の値をもつ東進するモードと西進するモードのそれぞれが, $k = 0$ ではその振動数に依らず同じ水平構造を持つ (つまり, 同じモードである) ことを固有関数の式を用いて示す. ここでは, $k = 0, n = 1$ の慣性重力波の場合を例として扱う.

$k = 0, n = 1$ の場合, (3.4.6), (3.4.8) より $\omega = \pm\sqrt{3}$ となる. このとき, $\hat{u}, \hat{v}, \hat{\Phi}$ の成分は, それぞれの実部成分 $u_r(y), v_r(y), \Phi_r(y)$, 虚部成分 $u_i(y), v_i(y), \Phi_i(y)$ を用いると (2.4.76)~(2.4.78) より以下の様に表される:

$$u_r = 0, \quad (3.5.9)$$

$$u_i = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega} H_2 + \frac{1}{\omega} 2H_0 \right) e^{-\frac{1}{2}y^2}, \quad (3.5.10)$$

$$v_r = H_1 e^{-\frac{1}{2}y^2}, \quad (3.5.11)$$

$$v_i = 0, \quad (3.5.12)$$

$$\Phi_r = 0, \quad (3.5.13)$$

$$\Phi_i = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega} H_2 - \frac{1}{\omega} 2H_0 \right) e^{-\frac{1}{2}y^2}. \quad (3.5.14)$$

ここで, $\omega \rightarrow -\omega$ とすると,

$$u_r = 0, \quad (3.5.15)$$

$$u_i \rightarrow -u_i, \quad (3.5.16)$$

$$v_r = v_r, \quad (3.5.17)$$

$$v_i \rightarrow 0, \quad (3.5.18)$$

$$\Phi_r = 0, \quad (3.5.19)$$

$$\Phi_i \rightarrow -\Phi_i, \quad (3.5.20)$$

となる. 一方, $k = 0, n = 1$ の場合 $u(x, y, t), v(x, y, t), \Phi(x, y, t)$ は $u_r, v_r, \Phi_r, u_i, v_i, \Phi_i$ を用

いて次のように表される:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t) &= \underbrace{u_r(y)}_{=0} \cos(kx - \omega t) - u_i(y) \sin(kx - \omega t), \\
 &= -u_i(y) \sin(-\omega t), \\
 &= u_i(y) \sin(\omega t),
 \end{aligned} \tag{3.5.21}$$

$$\begin{aligned}
 v(x, y, t) &= v_r(y) \cos(kx - \omega t) - \underbrace{v_i(y)}_{=0} \sin(kx - \omega t), \\
 &= v_r(y) \cos(-\omega t), \\
 &= v_r(y) \cos(\omega t),
 \end{aligned} \tag{3.5.22}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi(x, y, t) &= \underbrace{\Phi_r(y)}_{=0} \cos(kx - \omega t) - \Phi_i(y) \sin(kx - \omega t), \\
 &= -\Phi_i(y) \sin(-\omega t), \\
 &= \Phi_i(y) \sin(\omega t).
 \end{aligned} \tag{3.5.23}$$

(3.5.21)~(3.5.23) において $\omega \rightarrow -\omega$ とすると, (3.5.16)~(3.5.20) より次の関係を得る:

$$u(x, y, t) \rightarrow u(x, y, t), \tag{3.5.24}$$

$$v(x, y, t) \rightarrow v(x, y, t), \tag{3.5.25}$$

$$\Phi(x, y, t) \rightarrow \Phi(x, y, t). \tag{3.5.26}$$

(3.5.24)~(3.5.26) の関係は n の値に依らずすべての場合について成り立つ. したがって $k = 0$ のモードの水平構造は, 振動数の絶対値が等しい場合には同じになる.

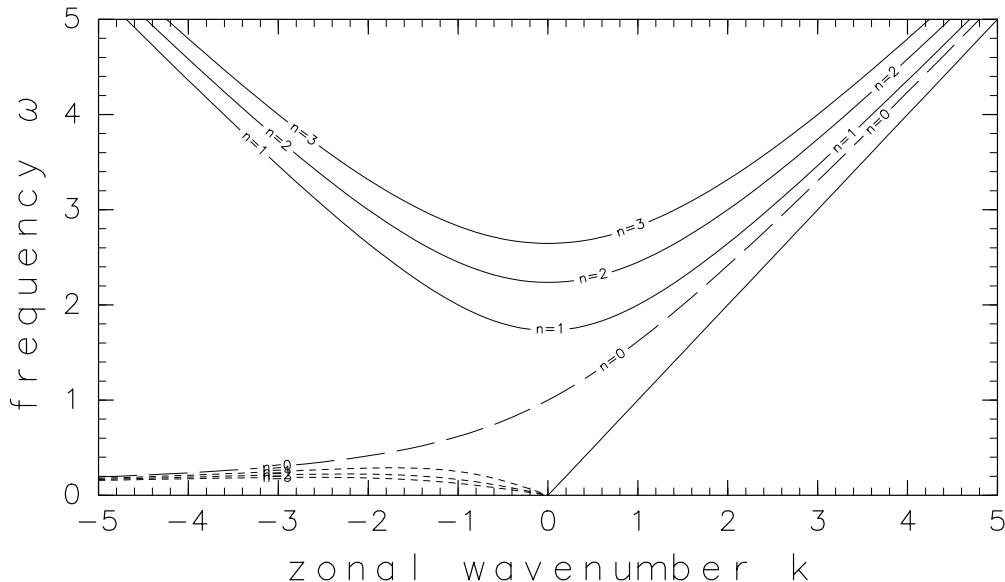


図 3.8: 赤道波の分散曲線の理論解 ($-1 \leq n \leq 3$). 図中のラベルは図 3.1 と同様. ただし, 図 3.1 で負の振動数を持っていた分散曲線は $k < 0$ の波数領域に描かれている. この図から, 慣性重力波や混合ロスビー重力波の東進するモード (正の波数を持つモード) と西進するモード (負の波数を持つモード) は, $k = 0$ で接続する (同じモードである) ことが分かる.

第4章

慣性重力波の水平伝播のメカニズム

本章からは、前章までの結果をもとに赤道波の水平伝播のメカニズムをまとめる。まずはじめに、慣性重力波の水平伝播メカニズムをまとめる。第3章の結果より慣性重力波の振動数 ω 、位相速度 c をまとめると次のようになる：¹

$$\omega = \pm\sqrt{k^2 + 2n + 1} \quad (\text{for } n \geq 1) \quad (4.0.1)$$

$$c = \pm\sqrt{1 + \frac{2n + 1}{k^2}} \quad (\text{for } n \geq 1) \quad (4.0.2)$$

(4.0.2) より、慣性重力波は東進するものと西進するものが存在する。以下では、 u, v, Φ の位相伝搬のメカニズムを明らかにするため、元の方程式系 (1.2.22)~(1.2.24)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = yv - \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (1.2.22)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -yu - \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (1.2.23)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right), \quad (1.2.24)$$

に戻って、各項の位相関係を明らかにする。以下ではそれぞれの項をモード展開したものを²を用いて考察する。

¹有次元系で表記すると、慣性重力波の振動数、位相速度は次のようになる：

$$\omega = \pm\sqrt{k^2 gH + \beta\sqrt{gH}(2n + 1)} \quad (\text{for } n \geq 1)$$

$$c = \pm\sqrt{gH + \frac{\beta\sqrt{gH}(2n + 1)}{k^2}} \quad (\text{for } n \geq 1)$$

²(1.2.22)~(1.2.24) の各項のモード展開は C 章にまとめた。

4.1 $n = 1, k = 0$ の慣性重力波

$k = 0, n = 1$ のモードを考える. このモードの振動数は, (4.0.1) より $\pm\sqrt{3}$ となる. 第3.5節で述べた様に, n の値が等しい $k = 0$ の2つのモード (絶対値の等しい正負の振動数を持つモード) は同じモードである. 以下では, はじめに1周期を通しての波の特徴をまとめ, 続いてその特徴が得られる理論的根拠について言及する.

4.1.1 $n = 1, k = 0$ の慣性重力波の特徴

本節では, 図4.1~図4.6中に共通してみられる特徴をまとめる.

- 速度ベクトル, ジオポテンシャルの分布および時間発展は以下の通り:
 - 速度ベクトルは, 赤道で0となる赤道対称分布をする ((4.1.3) 式). 速度ベクトルの大きさは, 南北半球でそれぞれ1つずつ同符号の極値をもつ ((4.1.4) 式). 速度ベクトルは北半球で時計回り, 南半球で反時計回りに回転する. 図4.1で見られる様に時間を固定しても速度ベクトルの方向は緯度により異なるが, これは東西風と南北風の大きさの比が緯度に依り異なるためである ((4.1.3) 式, 図4.2). しかし, 速度ベクトルの方向は1/4周期毎に一致し, 全ての速度ベクトルは1周期で1周する (図4.2). また, 速度ベクトルの大きさは, 緯度 $\pm\sqrt{3}$ を除く全ての緯度で時間変化する ((4.1.4) 式).
 - ジオポテンシャルも赤道で0となる赤道対称分布をする. ジオポテンシャルは, 南北半球でそれぞれ1つずつ同符号の極値をもつ (図4.1~図4.6の ϕ の等値線). ジオポテンシャルは1/2周期毎に符号を変えながら時間変化する ((4.1.6) 式).
- 速度ベクトルの時間発展は以下の様にして決まっている.
 - 速度ベクトルの回転はコリオリ力のために起こる. コリオリ力は, 速度ベクトルに対して北半球では直角右向き, 南半球では直角左向きの成分をもつ (図4.1の緑色ベクトル). これは, f 平面の慣性振動と同じメカニズムである³.
 - 圧力傾度力は, 速度ベクトルの大きさを変化させる効果を持つ. 圧力傾度力の x 成分は常に0である ((4.1.7) 式). したがって圧力傾度力は常に南北方向を向く (図4.1の赤色ベクトル). このため, 圧力傾度力は南北流速の大きさを変化させる働きをする. 圧力傾度力が0となる緯度 $\pm\sqrt{3}$ より赤道側では, 北(南)半球で最初の1/2周期は北(南)風加速となり, 次の1/2周期は南(北)風加速となる⁴. 一方, 緯度 $\pm\sqrt{3}$ より極側では, 北(南)半球で最初の1/2周期は南(北)風

³しかし, 上で述べたように速度ベクトルの大きさ自身も時間変化するので, 流向のみが時間変化するという意味でのいわゆる f 平面での慣性振動とは異なる.

⁴南北風は, 最初の1/4周期では北(南)半球で南(北)風成分を持つので減速し, 次の1/4周期では北(南)風成分をもつので, 南北風は加速する. 残りの1/2周期も同様のメカニズムで南北風は減速, 加速をする.

加速となり, 次の 1/2 周期は北 (南) 風加速となる⁵. 圧力傾度力が 0 となる緯度 $\pm\sqrt{3}$ では, 圧力傾度力による南北風の加速・減速が起こらないので, 速度ベクトルの大きさは時間変化しない (図 4.2).

- ジオポテンシャルの時間変化は, 以下の様に決まる:
 - ジオポテンシャルの分布は, 南北風の収束発散で決まっており, 東西風と同位相で 1/2 周期毎に符号が反転する ((4.1.6) 式).

続いて $n = 1, k = 0$ の慣性重力波がこれらの特徴を示す理論的根拠について, 次節で詳細をまとめることにする.

4.1.2 $n = 1, k = 0$ の慣性重力波の構造を決める物理量

本節では, 前節でまとめた特徴が得られる理論的背景について, 第 2 章の結果に基づき $n = 1, k = 0$ の慣性重力波の構造を支配する諸量をまとめておく.

(2.4.76), (2.4.77) より, $n = 1, k = 0$ の時, 東西・南北風速は次の様に表される:

$$\begin{aligned} (u(x, y, t), v(x, y, t)) &= \left(\operatorname{Re} \left[\frac{i}{2} \left(\frac{1}{\omega} H_2 + \frac{2}{\omega} H_0 \right) e^{-\frac{1}{2}y^2} e^{i(-\omega t)} \right], \operatorname{Re} \left[H_1 e^{-\frac{1}{2}y^2} e^{i(-\omega t)} \right] \right) \\ &= \left(\frac{2}{\omega} y^2 e^{-\frac{1}{2}y^2} \sin \omega t, 2y e^{-\frac{1}{2}y^2} \cos \omega t \right). \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

ただし, $H_0 = 1, H_1 = 2y, H_2 = 4y^2 - 2$ を用いた. (4.1.3) より, 東西風の振幅は, 赤道で 0 となり赤道対称な分布をすることが分かる. 南北風の振幅は, 赤道で 0 となり赤道非対称な分布をする. したがって, 速度ベクトルは赤道対称な分布をする. また, 南北風は東西風と比べて 1/4 周期だけ位相がずれている. これより, 速度ベクトルは北半球で時計周り, 南半球では反時計周りの回転をすることが分かる.

次に, 速度ベクトルの大きさを計算すると以下の様になる:

$$u(x, y, t)^2 + v(x, y, t)^2 = 4y^2 \left(\frac{y^2}{\omega^2} \sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t \right) e^{-y^2}. \quad (4.1.4)$$

(4.1.4) より, 速度ベクトルの大きさは緯度を固定しても時間により変化することがわかる. 速度ベクトルの大きさが時間変化しないのは, $y = \pm\sqrt{3}$ のみである. $y = \pm\sqrt{3}$ では, 後で見るように圧力傾度力が 0 となり, コリオリ力だけが働いている.

次に速度ベクトルの方向の緯度分布を調べる. 東西風と南北風の大きさの比は,

$$\frac{\frac{2}{\omega} y^2 e^{-\frac{1}{2}y^2} \sin \omega t}{2y e^{-\frac{1}{2}y^2} \cos \omega t} = \frac{y \tan \omega t}{\omega}, \quad (4.1.5)$$

⁵南北風は, 始めの 1/4 周期では北 (南) 半球で南 (北) 風成分を持つので加速し, 次の 1/4 周期では北 (南) 風成分をもつので, 南北風は減速する. 残りの 1/2 周期も同様のメカニズムで南北風は加速, 減速をする.

となり, 南北風の大きさに対する東西風の大きさは高緯度ほど大きくなっていて, 高緯度のベクトルほど赤道側を向くことが分かる.

次に速度ベクトルに作用する圧力分布の緯度, 時間変化を考える. (2.4.78) より, $n = 1, k = 0$ の時, ジオポテンシャルは次の様に表される:

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, t) &= \operatorname{Re} \left[\frac{i}{2} \left(\frac{1}{\omega} H_2 - \frac{2}{\omega} H_0 \right) e^{-\frac{1}{2}y^2} e^{i(-\omega t)} \right] \\ &= \frac{2}{\omega} (y^2 - 1) e^{-\frac{1}{2}y^2} \sin \omega t,\end{aligned}\quad (4.1.6)$$

となる. したがって, ジオポテンシャルは赤道対称な分布をしながら $u(x, y, t)$ と同位相で振動することがわかる.

次に, 圧力傾度力の成分を計算する. (4.1.6) より, 圧力傾度力の x, y 成分は次の様に表される:

$$\begin{aligned}\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x}, -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) &= \left(0, -\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{2}{\omega} (y^2 - 1) e^{-\frac{1}{2}y^2} \right\} \sin \omega t \right) \\ &= \left(0, -\frac{2}{\omega} y (3 - y^2) e^{-\frac{1}{2}y^2} \sin \omega t \right).\end{aligned}\quad (4.1.7)$$

したがって, 圧力傾度力の y 成分は赤道と緯度 $\pm\sqrt{3}$ で 0 となり, $\pm\sqrt{3}$ 度を境界として圧力傾度力は符号を変える.

4.1.3 $n = 1, k = 0$ の慣性重力波の構造

本節では, 始めに 1/4 周期ごとに速度ベクトルの時間変化を示し, 続いて運動方程式 (1.2.22) ~ (1.2.24) のそれぞれの項の水平分布図を示す. 水平分布図は以下の構成のもと作成した:

u	v	Φ と風速場 (u, v)
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$
yv	$-yu$	$-\frac{\partial u}{\partial x}$
$-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$-\frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$-\frac{\partial v}{\partial y}$

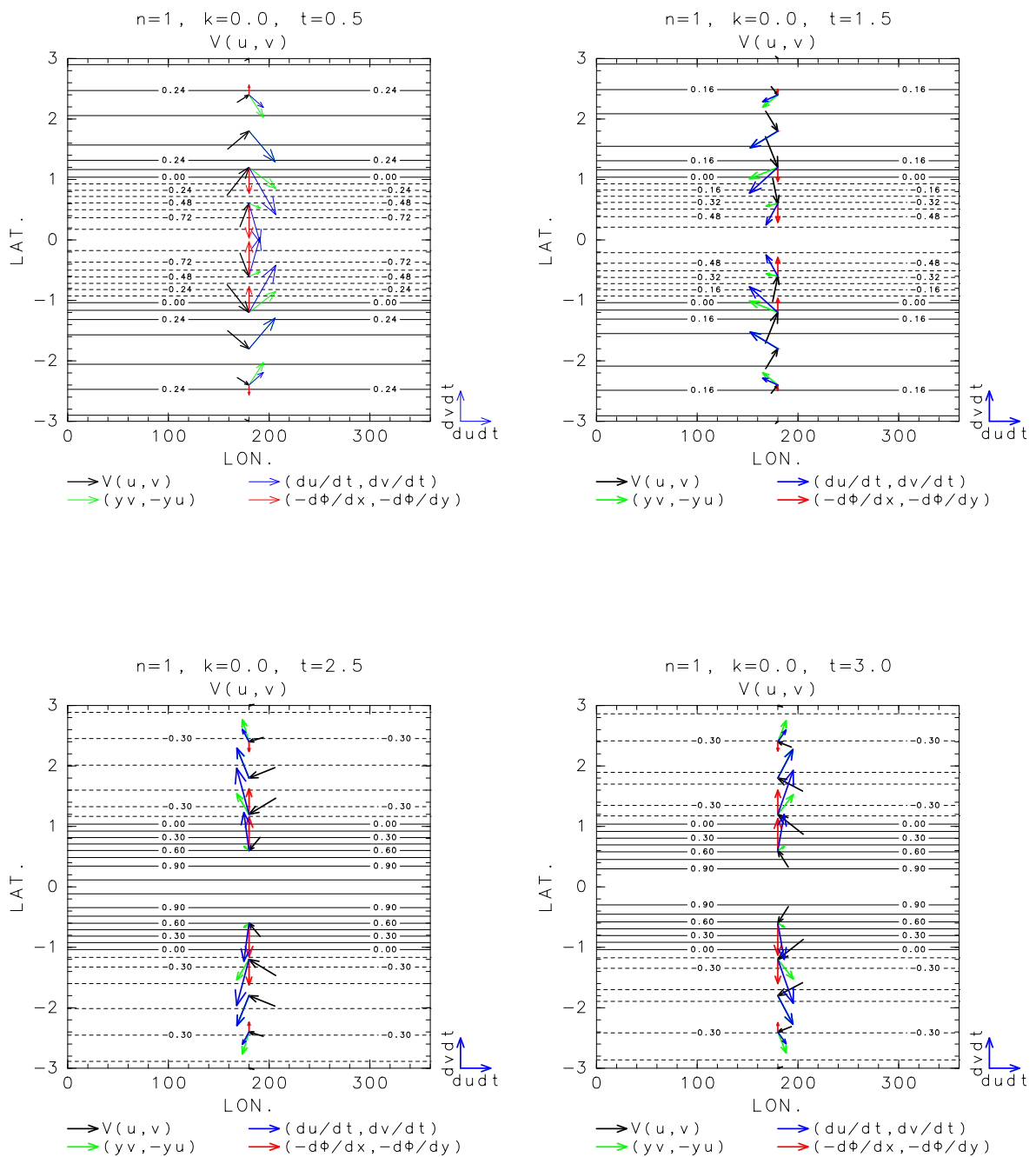


図 4.1: $n = 1, k = 0.0$ の慣性振動の速度ベクトル (黒色のベクトル), ジオポテンシャル (等値線), 圧力傾度力 (赤色のベクトル), コリオリ力 (緑色のベクトル), 加速度ベクトル $(du/dt, dv/dt)$ (青色のベクトル) のスナップショット. それぞれ $t = 0.5$ (上左図), $t = 1.5$ (上右図), $t = 2.5$ (下左図), $t = 3.0$ (下右図) である. ただし, ベクトルは経度 180 度の位置のもののみ示した. また, 速度ベクトルの終点がその他のベクトルの始点になるように描いている.

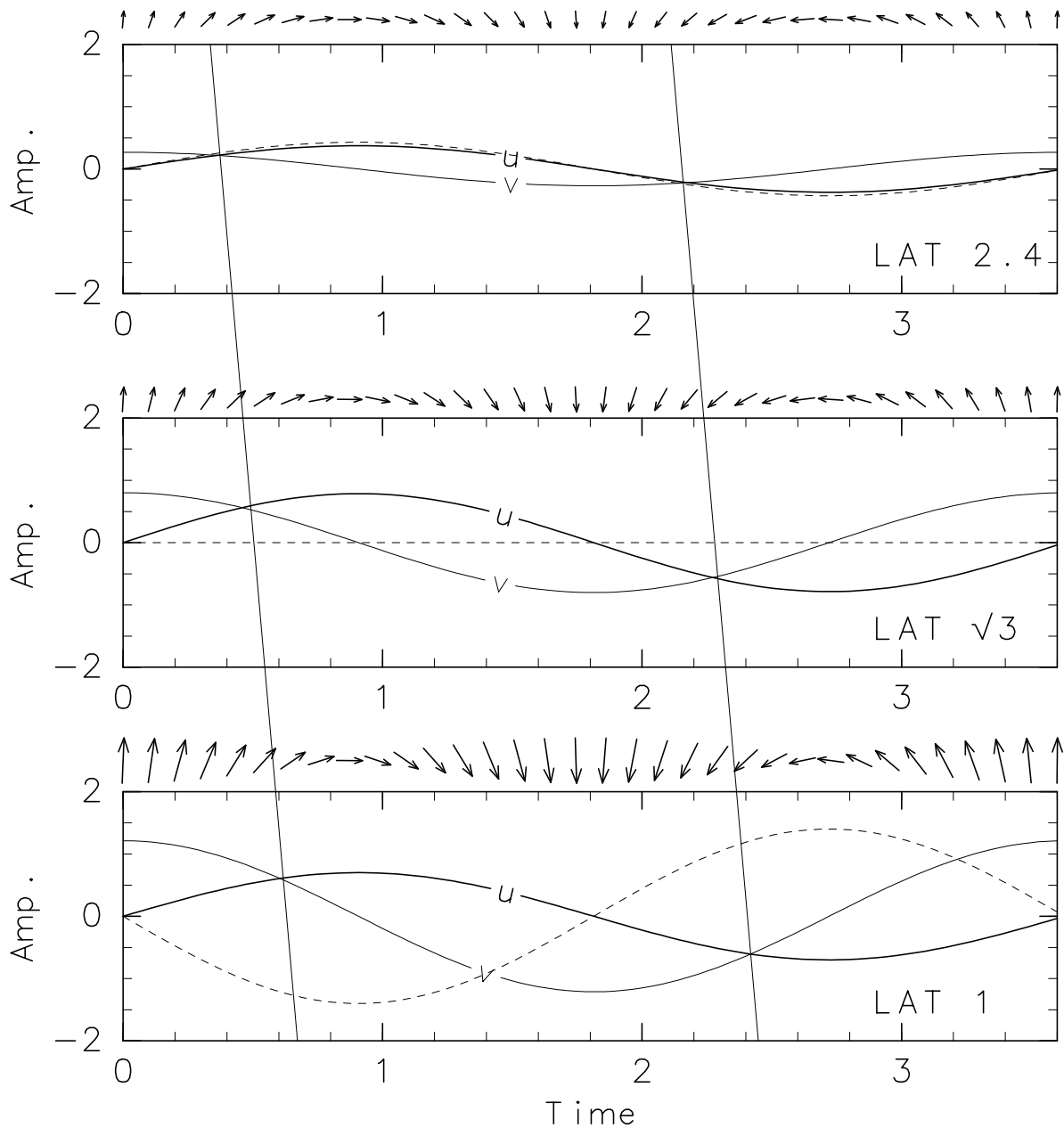


図 4.2: $n = 1, k = 0.0$ の慣性振動の速度ベクトルとその成分 ((4.1.3) 式. 太線は東西風, 細線は南北風.), ならびに, 圧力傾度力の y 成分 ((4.1.7) 式. 点線) の一周期分の時間変化. 横軸は時間, 縦軸は振幅を表す. それぞれ緯度 2.4 度 (上段), 緯度 $\sqrt{3}$ 度 (中段), 緯度 1 度 (下段) の図である. 図中の二本の斜線は, u と v のグラフが交差する点 ($u = v$ となる点) を結んだものであり, 高緯度ほど $u = v$ となる時間 (速度ベクトルが 45 度または 225 度を向く時間) が早いことを示す. このグラフから, 速度ベクトルの傾きの緯度による違いは, u と v の振幅差によることがわかる.

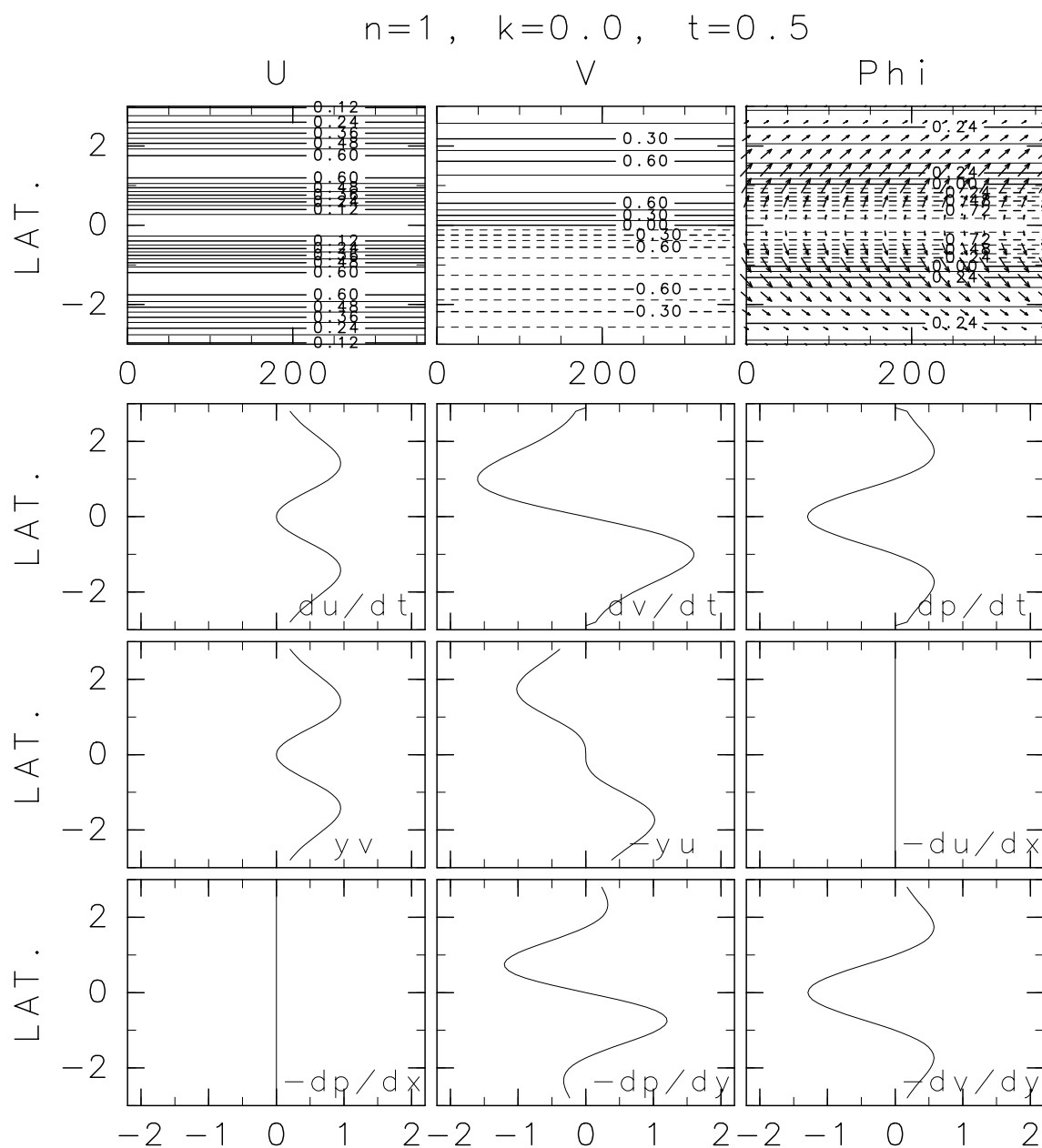


図 4.3: $n = 1, k = 0.0, t = 0.5$ の東進慣性重力波の場合の (1.2.22)~(1.2.24) の各項の水平分布. 下の 3×3 枚の図は振幅の緯度分布を示す.

u	v	Φ と風速場 (u, v)
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$
yv	$-yu$	$\frac{\partial u}{\partial x}$
$-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$-\frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$-\frac{\partial v}{\partial y}$

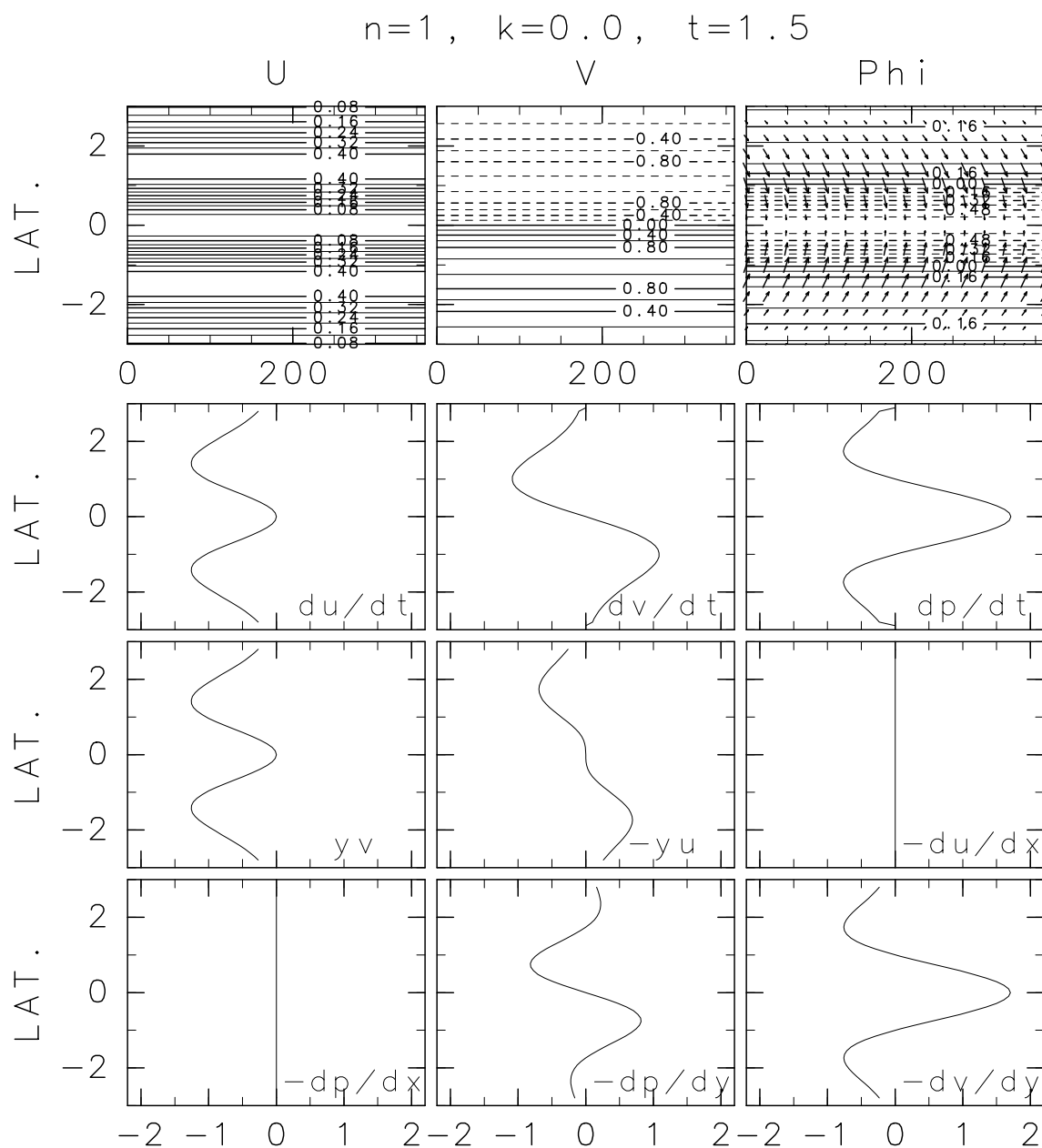


図 4.4: $n = 1, k = 0.0, t = 1.5$ の東進慣性重力波の場合の (1.2.22)~(1.2.24) の各項の水平分布. 下の 3×3 枚の図は振幅の緯度分布を示す.

u	v	Φ と風速場 (u, v)
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$
yv	$-yu$	$\frac{\partial u}{\partial x}$
$-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$-\frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$-\frac{\partial v}{\partial y}$

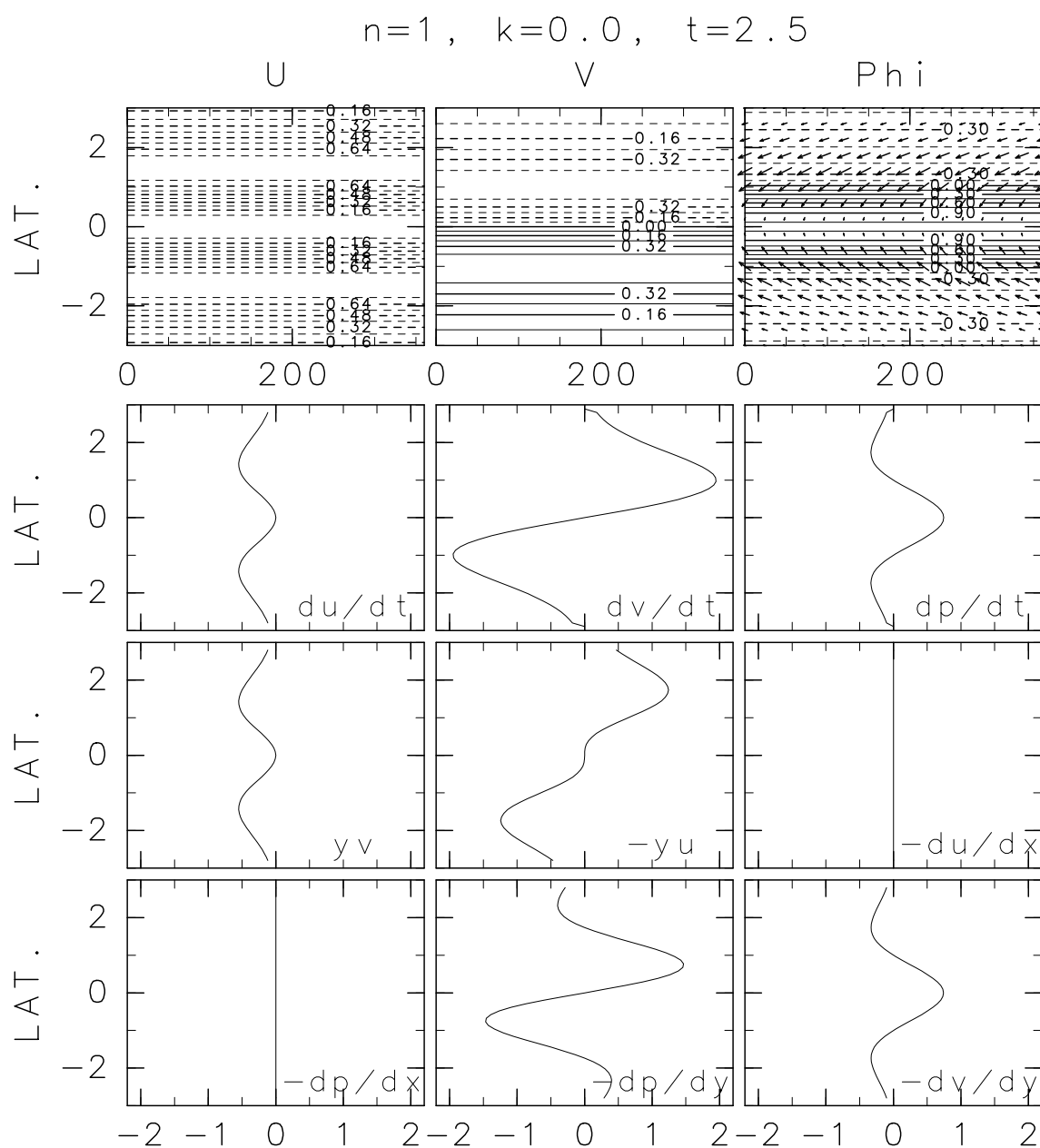


図 4.5: $n = 1, k = 0.0, t = 2.5$ の東進慣性重力波の場合の (1.2.22)~(1.2.24) の各項の水平分布. 下の 3×3 枚の図は振幅の緯度分布を示す.

u	v	Φ と風速場 (u, v)
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$
yv	$-yu$	$\frac{\partial u}{\partial x}$
$-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$-\frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$-\frac{\partial v}{\partial y}$

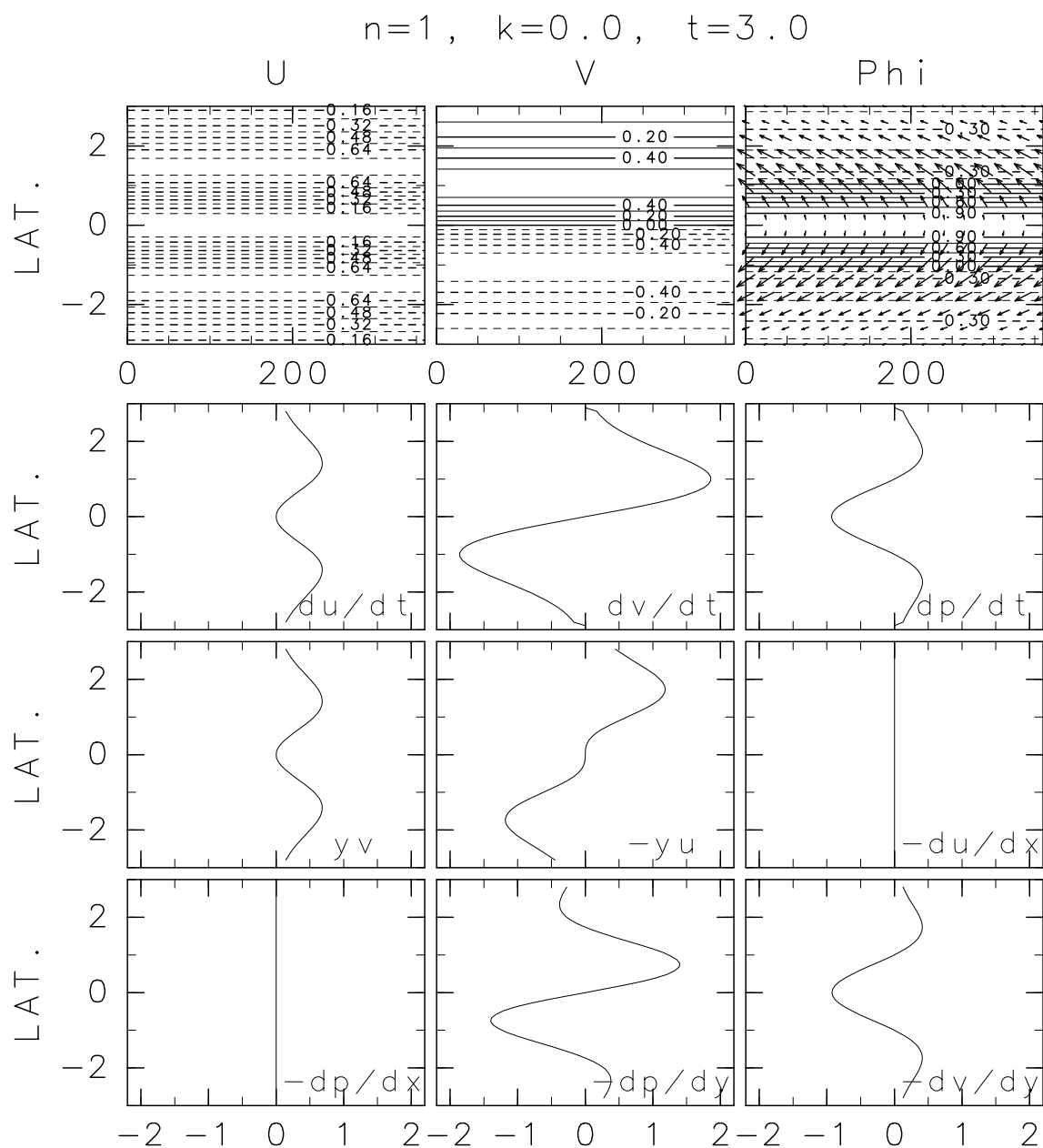


図 4.6: $n = 1, k = 0.0, t = 3.0$ の東進慣性重力波の場合の (1.2.22)~(1.2.24) の各項の水平分布. 下の 3×3 枚の図は振幅の緯度分布を示す.

u	v	Φ と風速場 (u, v)
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$
yv	$-yu$	$\frac{\partial u}{\partial x}$
$-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$-\frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$-\frac{\partial v}{\partial y}$

4.2 $n = 1, k \neq 0$ の東進慣性重力波

本節では $n = 1, k \neq 0$ の場合の東進慣性重力波の特徴をまとめる。

$k \neq 0$ の場合の運動方程式の各成分の構造を概観すると、以下で示す様に k の値によって卓越する成分が大きく変化する。このうち、南北風に伴うコリオリ力に対する東西方向の圧力傾度力の大きさは、東西波数が増大するにつれて大きくなり、 $k = 1.2$ で同程度になる。そこで以下では、 $0 < k \leq 1.2$ の場合を低波数のレジーム、 $k > 1.2$ の場合を高波数のレジームとして私的に分類し、議論することにする。

4.2.1 $0 < k \leq 1.2$ (低波数) の東進慣性重力波の特徴

低波数 ($k = 0.6$) の場合のモードの構造を図 4.7 に示す。このモードの振動数は、(4.0.1) より $\sqrt{3.36}$ となる。これは、先に議論した $n = 1, k = 0$ のモードの振動数 $\sqrt{3}$ と比べて大きな値である。

以下では、 $k = 0$ のモードとの相違について、図 4.7 の低波数のケースから得られる特徴をまとめる。

● 速度ベクトル, ジオポテンシャルの分布と時間変化の様子

- はじめに、速度ベクトルの分布と時間変化の様子について述べる。速度ベクトルは、 $k = 0$ の場合と同様に赤道対称な分布をする⁶。しかし、 $k = 0$ の場合と異なり速度ベクトルが 0 となる緯度は存在しない。東西風速、南北風速が 0 となる緯度はそれぞれ、 $\pm\sqrt{k/(\omega+k)}$ と 0 である。

次に速度ベクトルの時間変化の様子について $\partial u/\partial t, \partial v/\partial t$ の分布を見ると、それぞれ東西風、南北風の分布と比べて 1/4 波長進んでいることが分かる。このことから確かに速度ベクトルの位相は全体として東進していることが分かる。

- 次に、ジオポテンシャルの分布と時間変化の様子について述べる。ジオポテンシャルも、 $k = 0$ の場合と同様に、赤道対称な分布をする。ジオポテンシャルが 0 となる緯度は、 $\pm\sqrt{\omega/(\omega+k)}$ である ((4.2.10))。

⁶ $n = 1, k \neq 0$ の場合, (2.4.76) ~ (2.4.78) より,

$$u(x, y, t) = -2 \frac{(\omega+k)y^2 - k}{\omega^2 - k^2} e^{-(1/2)y^2} \sin(kx - \omega t), \quad (4.2.8)$$

$$v(x, y, t) = 2ye^{-(1/2)y^2} \cos(kx - \omega t), \quad (4.2.9)$$

$$\phi(x, y, t) = -2 \frac{(\omega+k)y^2 - \omega}{\omega^2 - k^2} e^{-(1/2)y^2} \sin(kx - \omega t). \quad (4.2.10)$$

となる。

次にジオポテンシャルの時間変化の様子について $\partial\Phi/\partial t$ の分布を見ると、ジオポテンシャルの分布と比べて $1/4$ 波長進んでいることが分かる。このことからジオポテンシャルの位相も全体として東進していることが分かる。

● 速度ベクトル, ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズム

- 速度ベクトル, ジオポテンシャルの時間発展の緯度による違いについて
速度ベクトル, ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズムは、高緯度域と赤道域に分けて考えることにする。その理由は、速度ベクトルの時間変化が、高緯度域ではコリオリ力、赤道域では圧力傾度力で決まっているからである (図 4.7, 図 4.8)。このため、高緯度域では慣性振動的、赤道域では重力波的な振る舞い (第 E 章 参照) をしていると考えられる (この詳細は後で述べる)。ところが、高緯度域と赤道域の境界は明確に定義することは出来ない。なぜなら、コリオリ力と圧力傾度力の振幅が等しくなる緯度は、 $\partial u/\partial t$, $\partial v/\partial t$ で異なるからである (第 F 章 参照)。さらに、 Φ の時間変化に於いては、全ての緯度で $\partial v/\partial y$ が卓越しており、高緯度域と赤道域の区別をすることは出来ない (図 4.7)。しかし、境界付近を除けば、速度ベクトルの位相伝搬は高緯度域ではコリオリ力、赤道域では圧力傾度力の分布で決まっているといえる。以上の理由により、以下では“高緯度域, 赤道域”という枠組を用いて位相伝搬のメカニズムを議論することにする。
- 高緯度域の速度ベクトル, ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズム
まずはじめに、高緯度域の速度ベクトル, ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズムについて考察する。これまで述べてきた様に、高緯度域ではコリオリ力が圧力傾度力よりも卓越している。よって見た目には、高緯度域では慣性振動的な振る舞いをしている。しかし、位相伝搬に寄与しているのは、慣性振動からのずれの部分である。以下では、図 4.7 の高緯度域の具体的な特徴を見ていくことにする。大雑把に見ると高緯度側の時間変化の様子は、 $k = 0$ の慣性振動の場合 (第 4.1.1 節) と同じである。速度ベクトルについては、コリオリ力の働く方向へ一周期で一周するが⁷、南北圧力傾度力によりコリオリ力だけの回転よりもずれる⁸。また、ジオポテンシャルについては、南北風の収束発散成分で決まっている⁹。しかしながら、これまで述べてきた様な $k = 0$ の慣性振動と同じ状況では、位相伝搬は起こらない。

慣性振動からのずれの部分は、当然のことながら東西の圧力傾度力である。東西の圧力傾度力により、東西風の大きさが東西方向に変化し、東西風の東西方向の収束発散成分が生まれるため、東西方向に位相伝搬できるのである。図 4.7 に於いて、東西風に働く高緯度側のコリオリ力と圧力傾度力の分布に注目すると、コリオリ力と圧力傾度力は同符号を取り、圧力傾度力が正の領域では西風加速、負

⁷ 図 4.7 の速度ベクトルとジオポテンシャルの平面分布図の高緯度側に於ける速度ベクトルの分布, 4.9~図 4.12 参照

⁸ 図 4.7 の南北風に働く高緯度側のコリオリ力と圧力傾度力の分布に注目すると、コリオリ力と圧力傾度力は逆符号を取っている。このため、コリオリ力による南北風の加速 (減速) は圧力傾度力によって減速 (加速) されている。この南北風と南北の圧力傾度力の位相関係は、 $k = 0$ の場合に見られた特徴と変わらない。

⁹ 図 4.7 の $\partial\Phi/\partial t$ の図と $-\partial u/\partial x$, $-\partial v/\partial y$ の分布図 参照。

の領域では東風加速となっている。この特徴は、一周期を通して見ても変わらない(図 4.9~図 4.12 の赤と緑の実線)。このため、東西風はコリオリ力で加速(減速)を受ける分よりもいっそう加速(減速)を受けていることが分かる。この結果、東風増加(経度方向に東風が増加する)領域でかつ西風加速を受ける領域(経度 0~150 度の高緯度部分)では、収束場となる(図 4.7 の $\partial u/\partial x$ 図)ので、ジオポテンシャルは正の値を取るようになる。同様に、東風減少(経度方向に東風が減少する)領域でかつ東風加速を受ける領域(経度 150~300 度)では、発散場となる(図 4.7 の $\partial u/\partial x$ 図)ので、ジオポテンシャルは負の値を取るようになる。同様に、西風増加(経度方向に西風が増加する)領域でかつ東風加速を受ける領域(経度 300~450 度)では、発散場となる(図 4.7 の $\partial u/\partial x$ 図)ので、ジオポテンシャルは負の値を取るようになる。西風減少(経度方向に西風が減少する)領域でかつ西風加速を受ける領域(経度 450~600 度)では、収束場となる(図 4.7 の $\partial u/\partial x$ 図)ので、ジオポテンシャルは正の値を取るようになる。このようにして出来たジオポテンシャル場は、東西のコントラストにより東西に圧力傾度力をもたらすので、速度ベクトルに影響し、高高度場の前方(後方)で西風(東風)成分、低高度場の前方(後方)で東風(西風)成分が生成される。こうして、速度ベクトルとジオポテンシャルは連動しながら東に位相伝搬しているのである。南北風の収束発散成分(図 4.7)は、東西風の収束発散成分の効果を強める働きをしている。

- 赤道域の速度ベクトル、ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズム

次に、赤道域の速度ベクトルとジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズムについて考察する。上で述べてきた様に、赤道域では圧力傾度力がコリオリ力よりも卓越している。よって見た目には、赤道域では重力波的な振る舞いをしながら、速度ベクトルの収束発散により東西に位相伝搬している(第 E.2 章参照)。また、重力波からのずれの部分も存在し、速度ベクトルの回転に寄与している。以下では、図 4.7 の赤道域の具体的な特徴を見ていくことにする。

大雑把に見ると赤道域の時間変化の様子は、以下で述べる様に第 E.2 章の図 E.2 (東進重力波の $Y = 0$ 付近)と同じである。速度ベクトルの位相伝搬については、東西風の位相伝搬には東西圧力傾度力が寄与し、南北風の位相伝搬には南北の圧力傾度力が寄与している。また、ジオポテンシャルの位相伝搬については、南北風の収束発散成分が卓越して寄与している。よって、速度ベクトルの東西と南北の収束発散によって、速度ベクトルとジオポテンシャルは東西に位相伝搬する構造をしている。これは、 $k = 0$ の場合に見られなかった特徴である。しかしながら、これまで述べてきたような重力波的な状況では、速度ベクトルの回転方向が一致しない¹⁰。速度ベクトルの回転は、次に述べる重力波からのずれによって生じる。

重力波からのずれの部分は、当然のことながら速度ベクトルに働くコリオリ力である。赤道上を除いて速度ベクトルに働くコリオリ力は、速度ベクトルをコリオリ力の働く方向に回転させる働きをする。そこで、赤道域でのコリオリ力の働き

¹⁰第 E.2 章の図 E.1 の非回転東進浅水重力波の速度ベクトルは、時間経過に伴い $-3 < Y < -1.5$ では反時計周り、 $-1.5 < Y < 0$ では時計周り、 $0 < Y < 1.5$ では反時計周り、 $1.5 < Y < 3.0$ では時計周りをする。

に注目してみることにする。図 4.7 の赤道域に注目すると、東西風、南北風に寄与するコリオリ力は、それぞれ圧力傾度力と同符号、異符号であるので、東西風、南北風はそれぞれコリオリ力により加速、減速される。この特徴は、一周期を通して見ても変わらない(図 4.9～図 4.12の赤・緑の実線と点線)。また、ジオポテンシャルに寄与する東西風の収束発散成分は、南北風の収束発散と同符号で変動している(図 4.7)。このため、東西風の収束発散成分は、南北風の収束発散によるジオポテンシャルの位相伝搬を補う働きをしている。

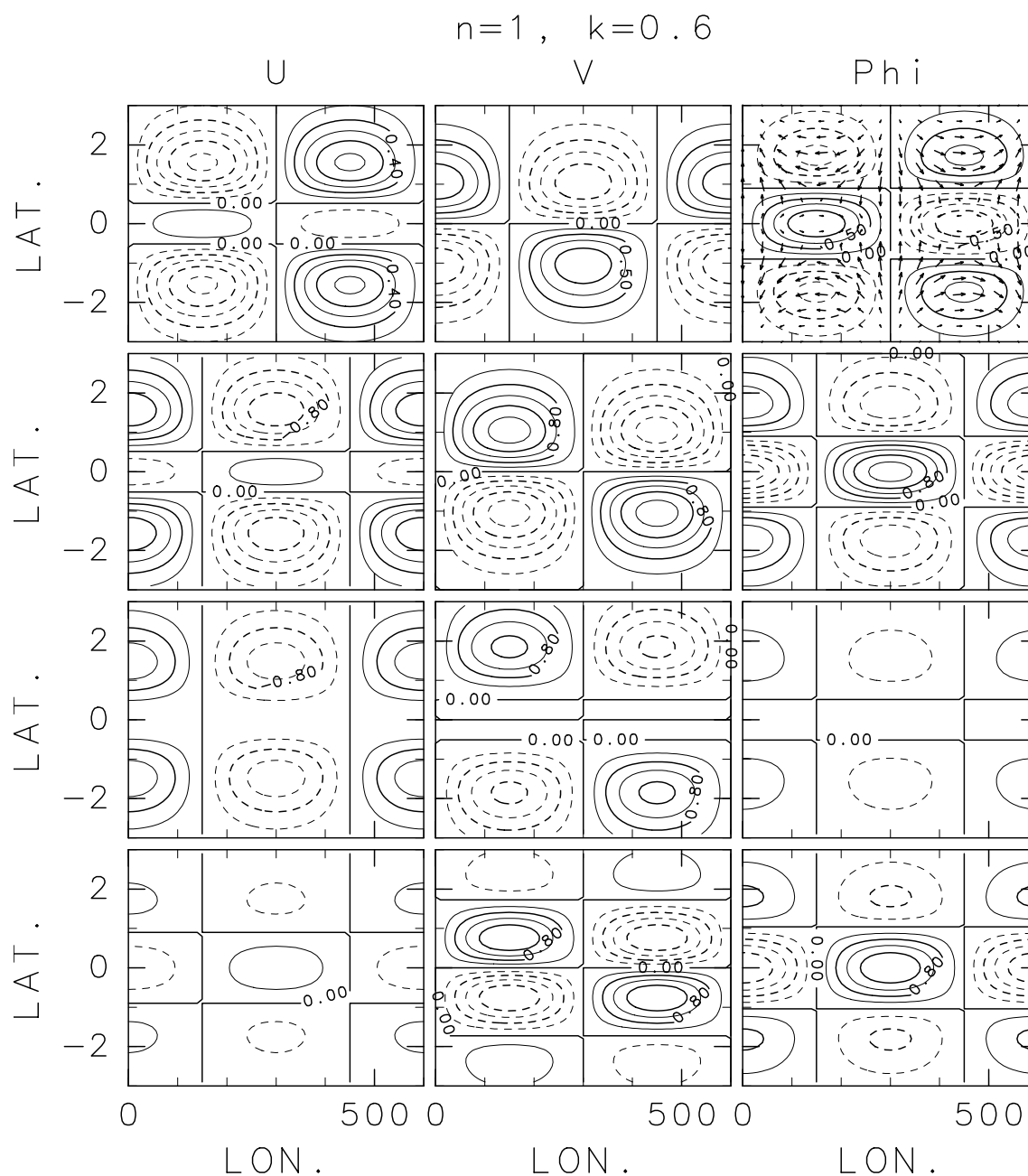


図 4.7: $n = 1, k = 0.6$ (低波数) の東進慣性重力波の (1.2.22)~(1.2.24) の各項の水平分布 ($t = 0, \omega = 1.83, c = 3.06$). 等値線間隔は, u, v, Φ の各々の列において下 3 枚が同じ.

u	v	Φ と風速場 (u, v)
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$
yv	$-yu$	$\frac{\partial u}{\partial x}$
$-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$-\frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$-\frac{\partial v}{\partial y}$

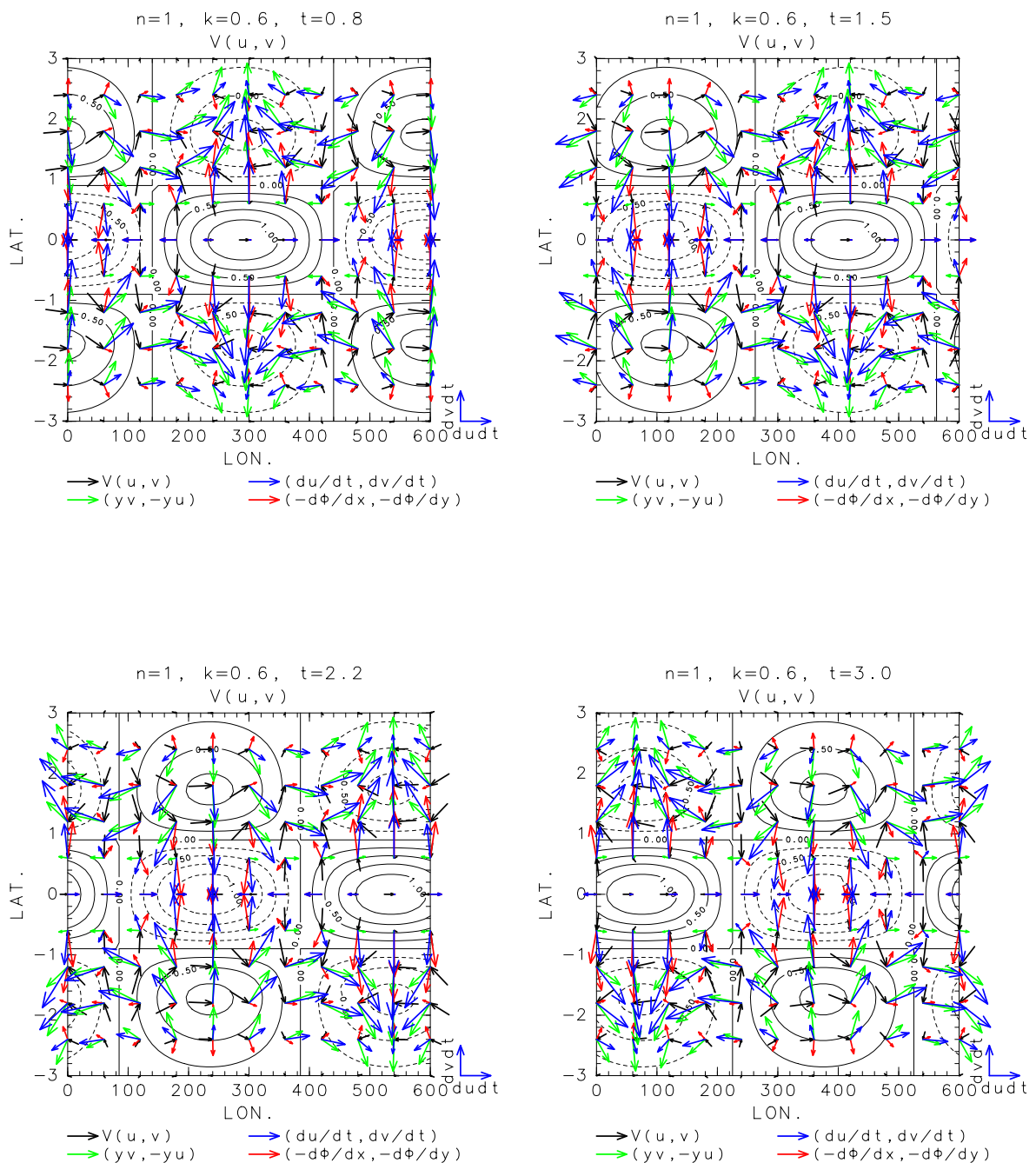


図 4.8: $n = 1, k = 0.6$ の東進慣性重力波の速度ベクトル (黒色のベクトル), ジオポテンシャル (等値線), 圧力傾度力 (赤色のベクトル), コリオリ力 (緑色のベクトル), 加速度ベクトル $(du/dt, dv/dt)$ (青色のベクトル) のスナップショット. それぞれ $t = 0.8$ (上左図), $t = 1.5$ (上右図), $t = 2.2$ (下左図), $t = 3.0$ (下右図) である. 速度ベクトルの終点がその他のベクトルの始点になるように描いている.

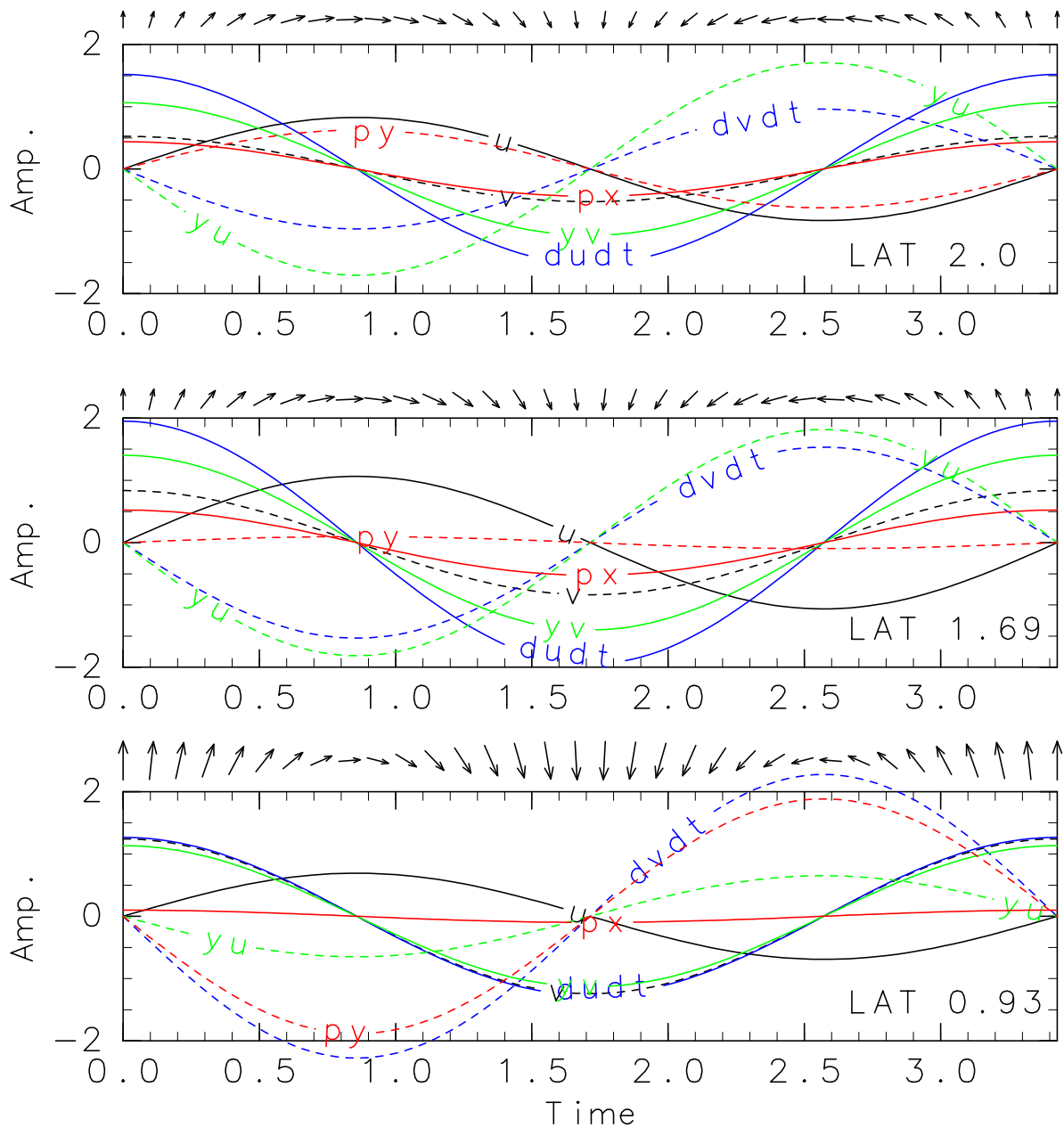


図 4.9: $n = 1, k = 0.6$ の慣性重力波の経度 0 度に於ける速度ベクトルとその成分 ((F.0.1) 式). 黒太線は東西風, 黒点線は南北風, ならびに, 圧力傾度力の x 成分 (赤実線), y 成分 (赤点線) ((F.0.3)), コリオリ力の x 成分 (緑実線), y 成分 (緑点線) ((F.0.2) 式), $\partial u/\partial t$ (青実線), $\partial v/\partial t$ (青点線) の一周期分の時間変化. 横軸は時間, 縦軸は振幅を表す. それぞれ緯度 2.0 度 (上段), 緯度 1.69 度 (中段), 緯度 0.93 度 (下段) の図である.

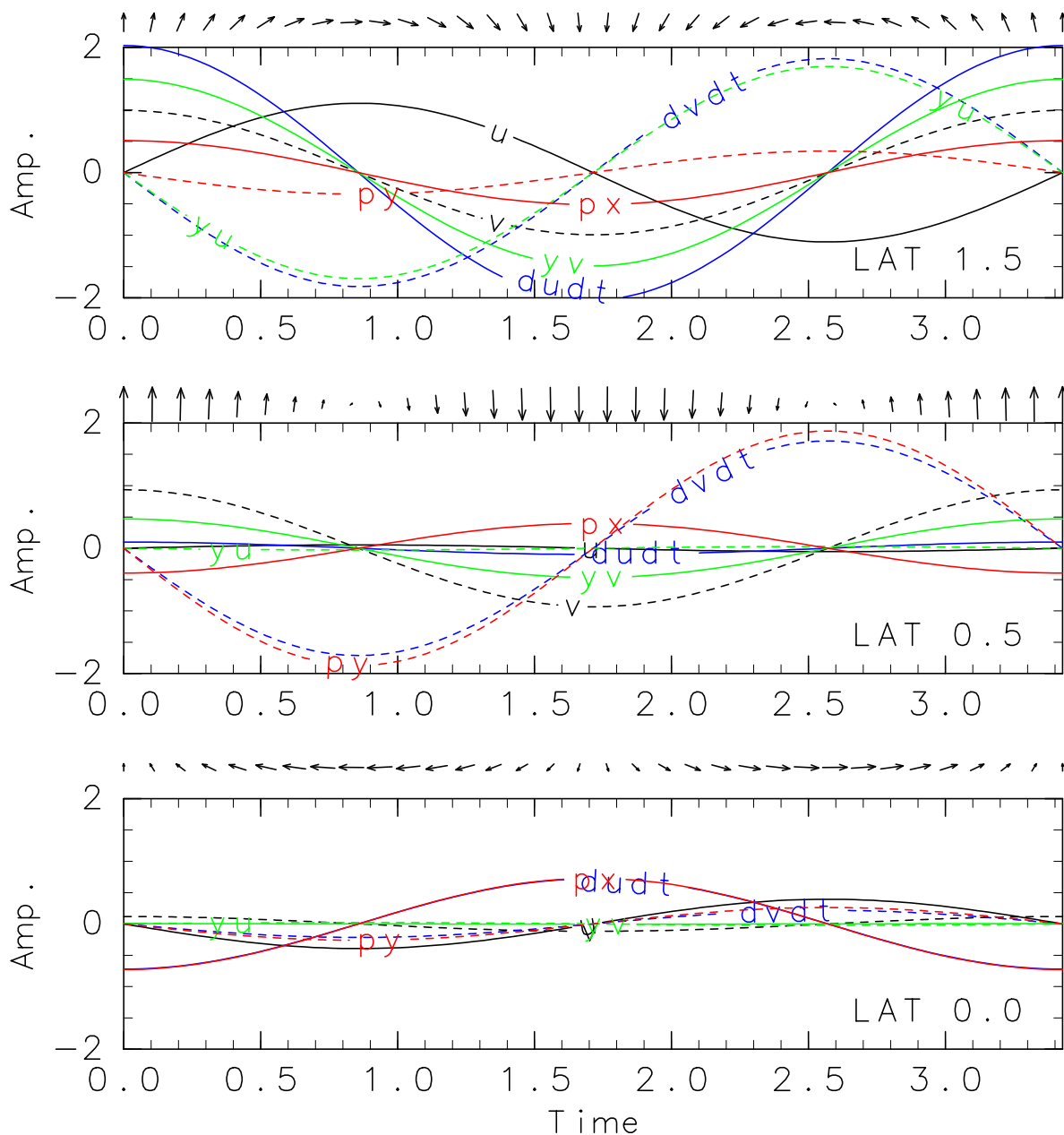


図 4.10: $n = 1, k = 0.6$ の慣性重力波の経度 0 度に於ける速度ベクトルとその成分 ((F.0.1) 式). 黒太線は東西風, 黒点線は南北風, ならびに, 圧力傾度力の x 成分 (赤実線), y 成分 (赤点線) ((F.0.3)), コリオリ力の x 成分 (緑実線), y 成分 (緑点線) ((F.0.2) 式), $\partial u / \partial t$ (青実線), $\partial v / \partial t$ (青点線) の一周期分の時間変化. 横軸は時間, 縦軸は振幅を表す. それぞれ緯度 1.5 度 (上段), 緯度 0.5 度 (中段), 緯度 0.0 度 (下段) の図である.

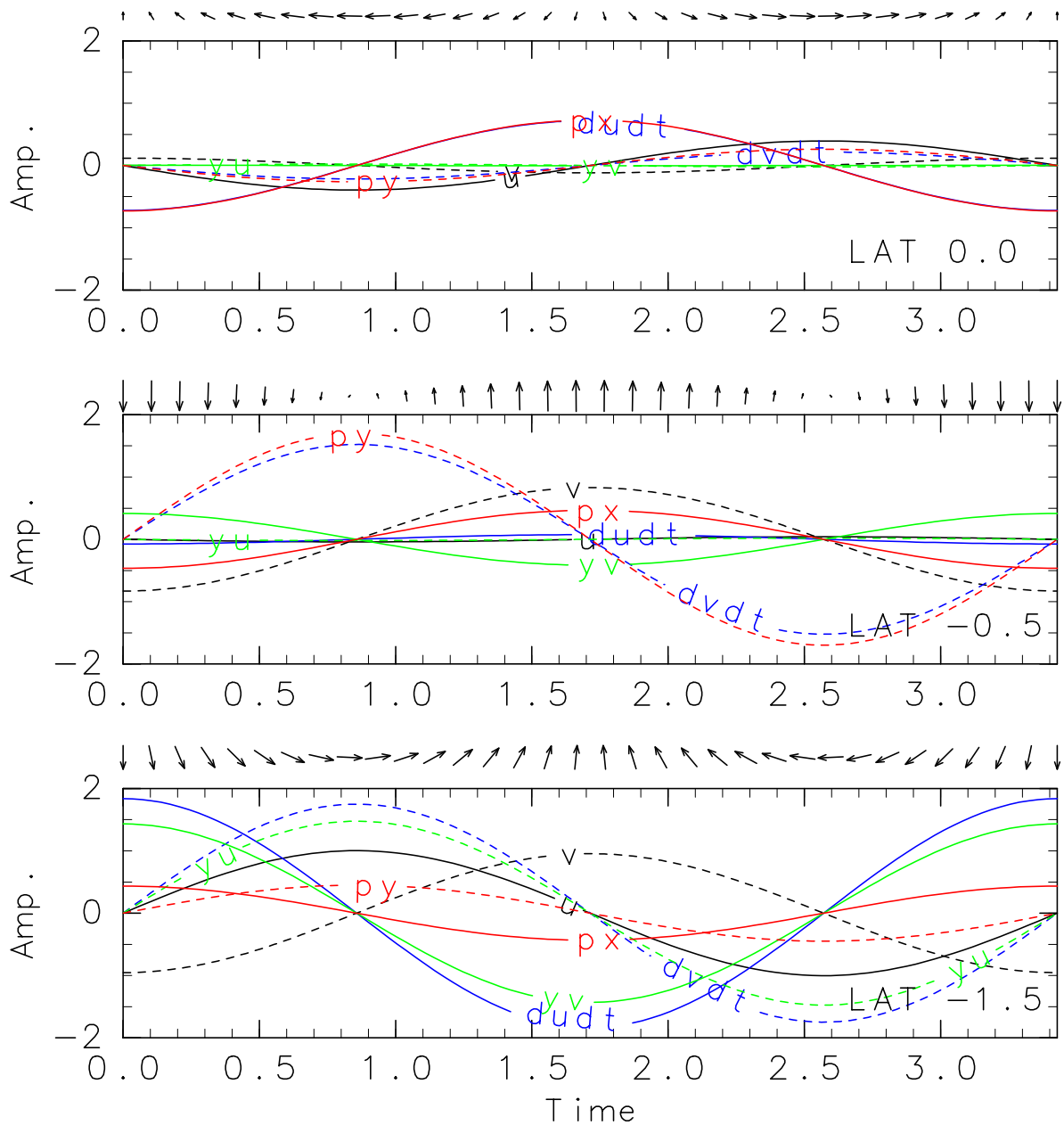


図 4.11: $n = 1, k = 0.6$ の慣性重力波の経度 0 度に於ける速度ベクトルとその成分 ((F.0.1) 式). 黒太線は東西風, 黒点線は南北風, ならびに, 圧力傾度力の x 成分 (赤実線), y 成分 (赤点線) ((F.0.3)), コリオリ力の x 成分 (緑実線), y 成分 (緑点線) ((F.0.2) 式), $\partial u / \partial t$ (青実線), $\partial v / \partial t$ (青点線) の一周期分の時間変化. 横軸は時間, 縦軸は振幅を表す. それぞれ緯度 0.0 度 (上段), 緯度 -0.5 度 (中段), 緯度 -1.5 度 (下段) の図である.

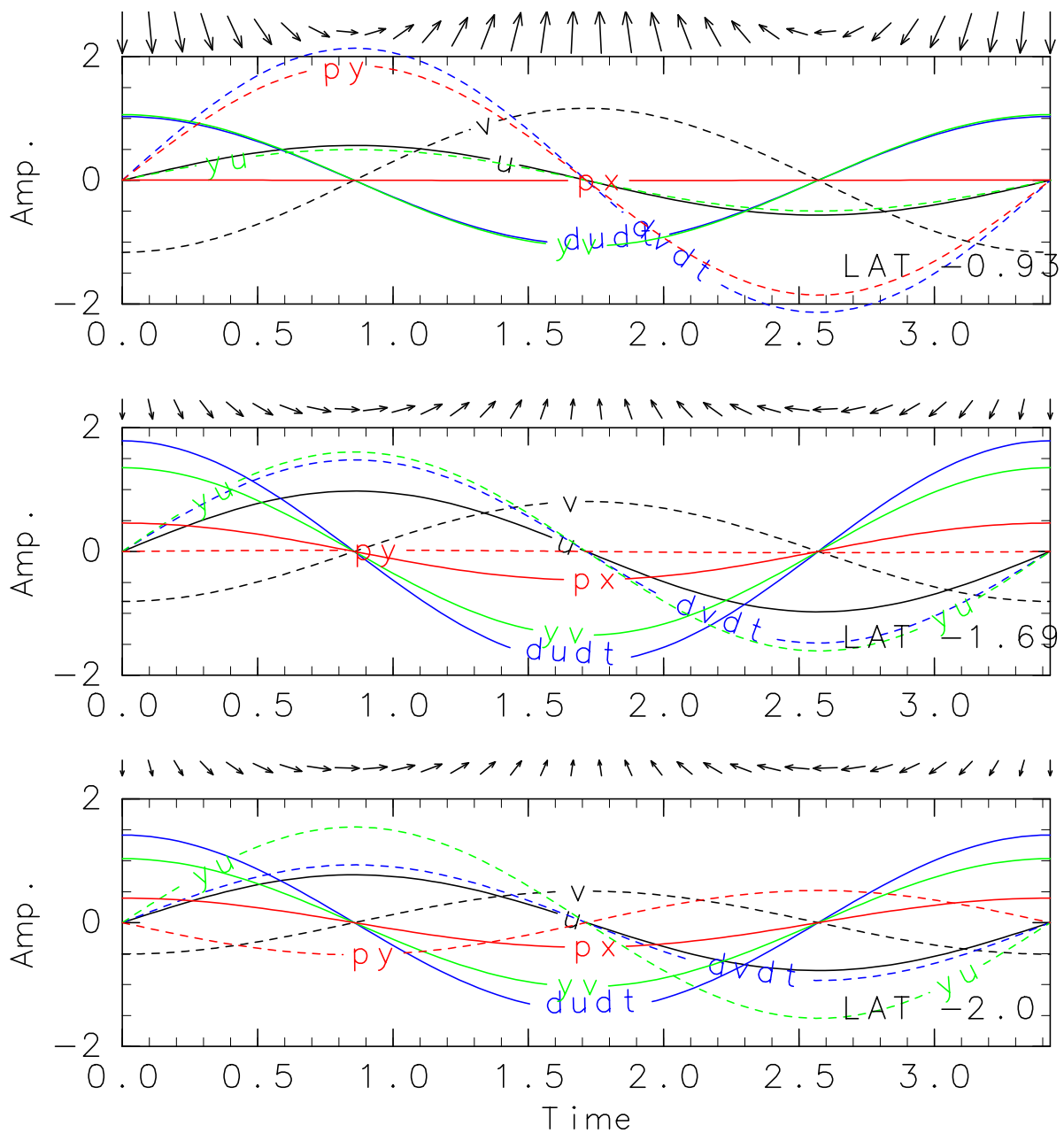


図 4.12: $n = 1, k = 0.6$ の慣性重力波の経度 0 度に於ける速度ベクトルとその成分 ((F.0.1) 式). 黒太線は東西風, 黒点線は南北風, ならびに, 圧力傾度力の x 成分 (赤実線), y 成分 (赤点線) ((F.0.3)), コリオリ力の x 成分 (緑実線), y 成分 (緑点線) ((F.0.2) 式), $\partial u/\partial t$ (青実線), $\partial v/\partial t$ (青点線) の一周期分の時間変化. 横軸は時間, 縦軸は振幅を表す. それぞれ緯度 -0.93 度 (上段), 緯度 -1.69 度 (中段), 緯度 -2.0 度 (下段) の図である.

4.2.2 $k > 1.2$ (高波数) の東進慣性重力波の特徴

高波数 ($k = 2.0$) の場合のモードの構造を図 4.13 に示す. このモードの振動数は, (4.0.1) より $\sqrt{7}$ となり, $k < 1.2$ の場合の振動数と比べてより大きな値を取る.

以下では, 低波数のモードとの相違について, 図 4.13 の高波数のケースから得られる特徴をまとめる.

● 速度ベクトル, ジオポテンシャルの分布と時間変化の様子

速度ベクトル, ジオポテンシャルの分布, 時間変化の特徴は, 基本的に低波数の場合と変わらない. ただし, 東西風速とジオポテンシャルが 0 となる緯度は, $k \rightarrow \infty$ で $y \rightarrow \pm 1/\sqrt{2}$ に落ち着く (第 F 章参照).

● 速度ベクトル, ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズム

- 速度ベクトル, ジオポテンシャルの時間発展の緯度による違いについて
速度ベクトル, ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズムは, 図 4.13 から明らかのように, 低波数の場合と同様に高緯度域と赤道域に分けられる. 高緯度域と赤道域の境界はやはり明確ではないが, 低波数の場合と比べて赤道域と呼ばれる領域が広がる. このことから, 高波数ほど重力波的な特徴が顕著になると考えられる (この詳細は, 以下で述べる).
- 高緯度域の速度ベクトル, ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズム
低波数の場合には, 高緯度域の速度ベクトルの時間変化にコリオリ力が最も寄与していた. 高波数となっても, 基本的に速度ベクトルとジオポテンシャルの位相伝搬メカニズムは変わらない. 高波数になると, 東西風の時間変化に寄与する東西の圧力傾度力の大きさは, コリオリ力に対して相対的に大きくなる. また, ジオポテンシャルの位相伝搬に寄与する成分は, 高波数になるにつれて次第に東西風の収束発散成分の方が効くようになる. 以上の特徴から, 高緯度域では高波数になるにつれて慣性振動的な特徴は弱くなり, 重力波的な特徴が強くなる.
- 赤道域の速度ベクトル, ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズム
高波数となっても, 基本的に赤道域の速度ベクトルとジオポテンシャルの位相伝搬メカニズムは低波数の場合と変わらない. 高波数になるにつれて, これまで赤道域と呼んできた領域は広くなり, 速度ベクトルの位相伝搬に, 圧力傾度力がいっそう寄与するようになる. また, ジオポテンシャルの位相伝搬には, 高緯度域と同様に高波数になるにつれて東西風の収束発散成分がいっそう寄与するようになる. 以上の特徴から, 低緯度域でも高波数になるにつれて, より重力波的なメカニズムで位相伝搬するようになる.

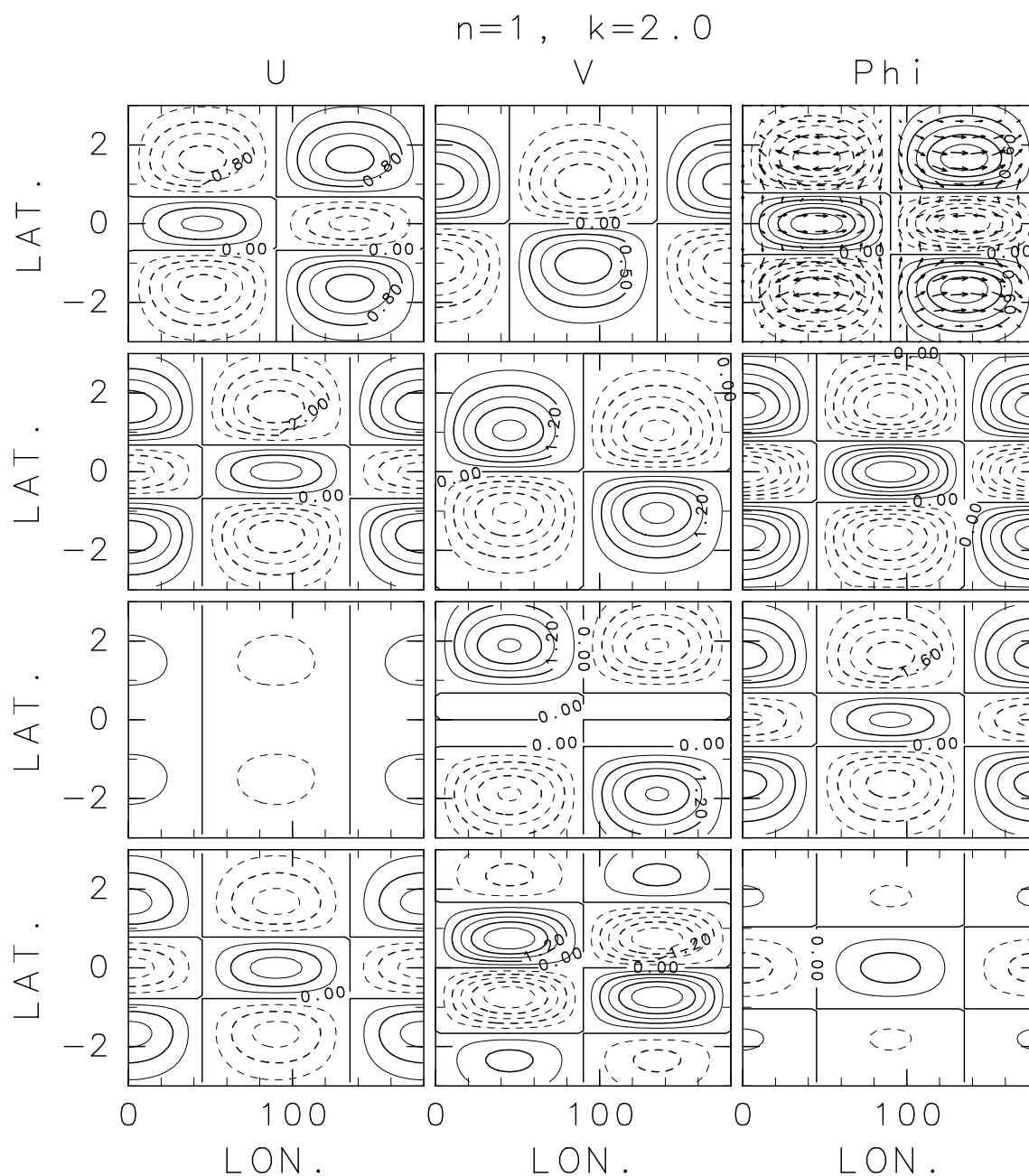


図 4.13: $n = 1, k = 2.0$ (高波数) の東進慣性重力波の (1.22)~(1.24) の各項の水平分布 ($t = 0, \omega = 2.65, c = 1.32$). 等値線間隔は, u, v, Φ の各々の列において下 3 枚が同じ.

u	v	Φ と風速場 (u, v)
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$
yv	$-yu$	$\frac{\partial u}{\partial x}$
$-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$-\frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$-\frac{\partial v}{\partial y}$

4.3 $n = 1, k \neq 0$ の西進慣性重力波

次に, $n = 1, k \neq 0$ の場合の西進慣性重力波の特徴をまとめる.

本節では, これまでと同様の方法で $0 < k \leq 1.1$ の場合を低波数のレジーム, $k > 1.1$ の場合を高波数のレジームとして恣意的に分類し, 議論することにする.

4.3.1 $0 < k \leq 1.1$ (低波数) の西進慣性重力波の特徴

低波数 ($k = 0.6$) の場合のモードの構造を図 4.14 に示す. このモードの振動数は, (4.0.1) より $-\sqrt{3.36}$ となる¹¹. これは, 先に議論した $n = 1, k = 0$ のモードの振動数 $-\sqrt{3}$ と比べて小さな値である.

以下では, $k = 0$ のモードとの相違について, 図 4.14 の低波数のケースから得られる特徴をまとめる.

● 速度ベクトル, ジオポテンシャルの分布と時間変化の様子

- はじめに, 速度ベクトルの分布と時間変化の様子について述べる. 速度ベクトルは, $n = 1, k = 0$ の慣性振動の場合や $n = 1$ の東進慣性重力波 (以下, 東進波と略す) の場合と同様に赤道対称な分布をする. 速度ベクトルが 0 となる緯度は, $n = 1$ の東進波の場合と同様存在しない. 西進波では, 図 4.14 の場合, 西風領域の西側で南風領域, 東側で北風領域となっており, 赤道を除いて東進波の場合 (西風領域の西側で北風領域, 東側で南風領域) と異なる分布をしている. しかし, 進行方向で見ると, 東進波も西進波も南北風が先行し東西風が後行する (1/4 波長のずれ) ので, 見た目の分布の特徴は変わらない.

次に速度ベクトルの時間変化の様子について $\partial u/\partial t, \partial v/\partial t$ の分布を見ると, それぞれ東西風, 南北風の分布と比べて 1/4 波長遅れていることが分かる. このことから速度ベクトルの位相は全体として西進していることが分かる.

- 次に, ジオポテンシャルの分布と時間変化の様子について述べる. ジオポテンシャルも, $n = 1, k = 0$ の慣性振動の場合や $n = 1$ の東進波の場合と同様, 赤道対称な分布をする. ジオポテンシャルが 0 となる緯度は, $\pm\sqrt{\omega/(\omega+k)}$ である ((4.2.10)). 東進波の場合と異なり, 特に赤道付近でジオポテンシャルの振幅が大きくなるという特徴がある.

次にジオポテンシャルの時間変化の様子について $\partial\Phi/\partial t$ の分布を見ると, ジオポテンシャルの分布と比べて 1/4 波長遅れていることが分かる. このことからジオポテンシャルの位相も全体として西進していることが分かる.

¹¹負の波数を導入した場合には $k = 0$ の場合 $\omega = \sqrt{3}$, $k = -0.6$ の場合 $\omega = \sqrt{3.36}$ となる.

● 速度ベクトル, ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズム

- 速度ベクトル, ジオポテンシャルの時間発展の緯度による違いについて

速度ベクトル, ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズムは, $n = 1$ の東進波の場合と異なり, 高緯度域, 低緯度域という切り分けで議論することは出来ない. 図 4.14 の速度ベクトルやジオポテンシャルの時間変化を一見すると, 高緯度でコリオリ力が卓越しているように見えるが, 位相伝搬に寄与しているのは速度ベクトルの収束発散成分と圧力傾度力である. したがって, 全領域で重力波的な振る舞い (第 E.2章) をしている. 以下では, この詳細を述べながら, 位相伝搬のメカニズムをまとめる.

- 速度ベクトル, ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズム

上述した様に, 速度ベクトル, ジオポテンシャルの時間変化は, 共に重力波的な振る舞いをしている. その特徴をまとめると次の様になる.

はじめにジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズムについて考察する. 図 4.14 の経度 300 度付近の速度ベクトルの分布に注目すると, 西側で西風領域, 東側で東風領域, 赤道を挟んで北側で北風領域, 南側で南風領域となるため, この経度帯は速度ベクトルの収束域となっている (図 4.14 の $-\partial u/\partial x$, $-\partial v/\partial y$ 成分参照). この収束により, 経度 300 度付近の赤道域では, $\partial\phi/\partial t$ は正の値を取るようになる (図 4.14 の $\partial\phi/\partial t$ 成分参照). 赤道を離れても, 東西風が収束域であることには変わりはないが, 南北風は発散域となる. 東西風が収束域となる点は, いわゆる非回転の 2 次元浅水系重力波と異なる (非回転 2 次元浅水重力波では, 東西風の収束発散は, 赤道側と高緯度側で逆符号を取る. 図 E.3 参照). これは, 高緯度側でコリオリ成分の寄与により, 速度ベクトルの向きが変わるためである (図 4.14 の高緯度側の yv と $-\partial\phi/\partial x$, $-yu$ と $-\partial\phi/\partial y$ 参照). しかし, このモードでは, 2 次元の浅水重力波の低波数の場合と同様に, 東西風の収束発散成分よりも南北風の収束発散成分の寄与が大きいため, 赤道を離れたところでは, $\partial\phi/\partial t$ は負の値を取るようになる. 他の経度帯でも同様に, ジオポテンシャルの位相伝搬は速度ベクトルの収束発散で決まっている.

次に, 速度ベクトルの位相伝搬について考察する. 図 4.14 の経度 300 度付近のジオポテンシャルの分布に注目すると, 赤道域では, 東側で正の値, 西側で負の値を取る. このため, この領域の東西圧力傾度力 $-\partial\phi/\partial x$ は, 負の値を取る. したがって, この領域での東西風は東風加速を受けるので, 図 4.14 の東西風の分布と見比べると東西風の位相は西に伝播することが分かる. 一方, 図 4.14 の経度 300 度付近の高緯度側のジオポテンシャルの分布に注目すると, 東側で負の値, 西側で正の値を取る. このため, この領域の東西圧力傾度力 $-\partial\phi/\partial x$ は, 正の値を取る. したがって, この領域での東西風は圧力傾度力により西風加速を受ける. これは, 非回転 2 次元浅水重力波の位相伝搬のメカニズムと同様である. 西進慣性重力波の場合, 高緯度側の速度ベクトルは, コリオリ力の影響を受けるので, 東西風は高緯度側でも赤道域と同符号の値を取る (二次元の非回転重力波で本来西風 (東風) であるところが, 東風 (西風) になるまでコリオリ力により向きを変えられている). よって, 東西圧力傾度力の役割は, 見た目には東西風の位相伝搬を

妨げているように見える。しかし、高緯度域ではコリオリ力の大きさも圧力傾度力の大きさより卓越しているため、 $\partial u/\partial t$ の符号には影響しない ($\partial u/\partial t$ は東西風の位相が西進するような分布となる)。つまり、高緯度域の東西風の位相伝搬には、その場所の圧力傾度力は寄与していない。高緯度域の東西風の位相伝搬は、赤道域の圧力傾度力の分布に強く依存していて、いわゆる二次元の非回転重力波の位相伝搬のメカニズムとは異なっている。次に、図 4.14 の経度 150 度付近のジオポテンシャルの分布に注目すると、緯度 1 度 (-1 度) 付近を挟んで北側 (南側) で正の値、南側 (北側) で負の値を取る。このため、この領域の南北圧力傾度力 $-\partial\phi/\partial y$ は、負 (正) の値を取る。したがってこの領域での南北風は北風加速 (南風加速) を受けるので、図 4.14 の南北風の分布と見比べると南北風の位相は西に伝播することが分かる。こうして、速度ベクトルの位相伝搬は、全領域で赤道付近 (緯度 ± 1.5 度) の圧力傾度力により決まっている。

以上の様に、西進慣性重力波には、非回転二次元の浅水重力波と異なる点があるが、基本的には全領域で重力波的なメカニズムで位相伝搬していることが分かる。

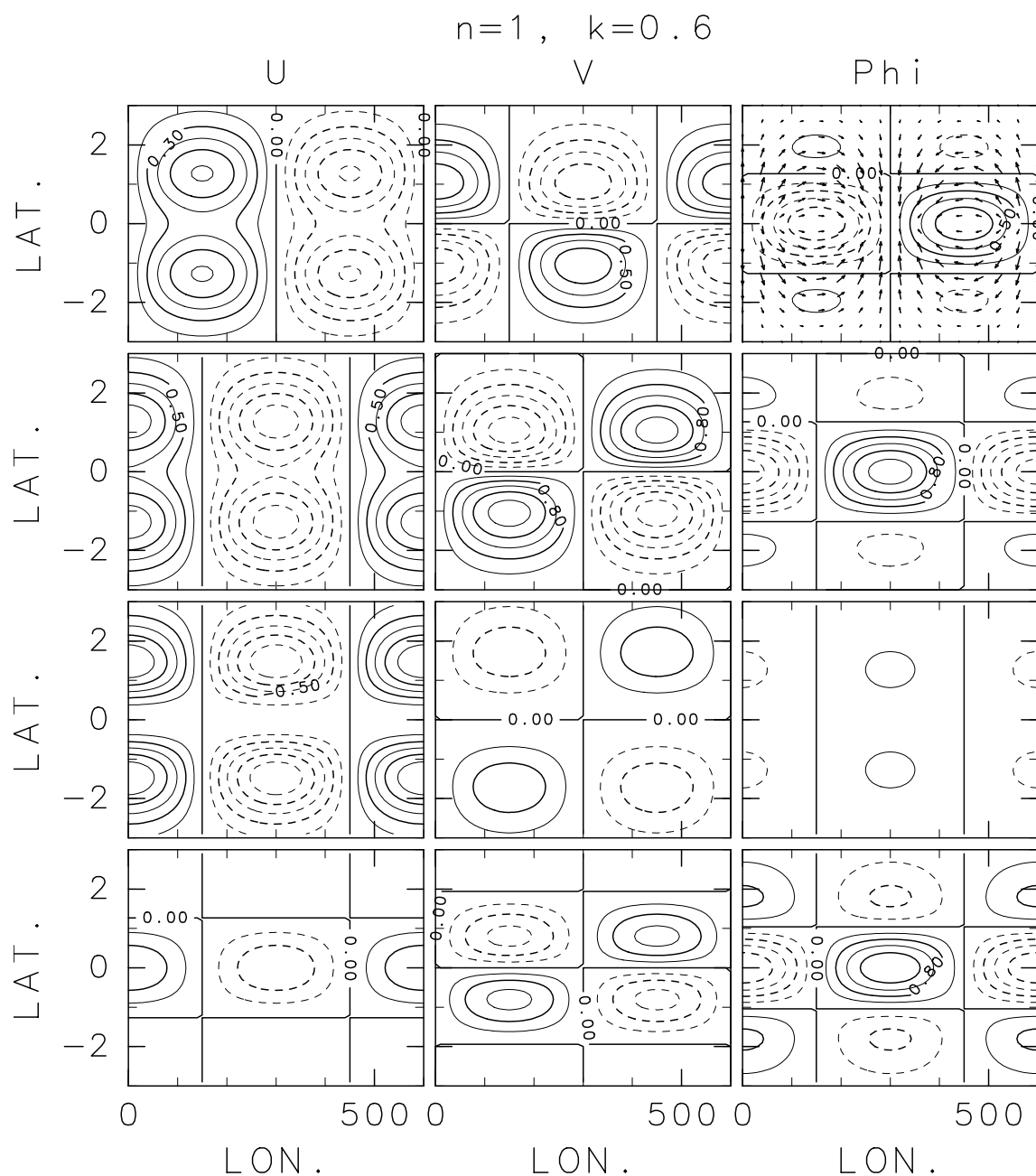


図 4.14: $n = 1, k = 0.6$ (低波数) の西進慣性重力波の (1.2.22)~(1.2.24) の各項の水平分布 ($t = 0, \omega = -1.83, c = -3.06$). 等値線間隔は, u, v, Φ の各々の列において下 3 枚が同じ.

u	v	Φ と風速場 (u, v)
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$
yv	$-yu$	$\frac{\partial u}{\partial x}$
$-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$-\frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$-\frac{\partial v}{\partial y}$

4.3.2 $k > 1.1$ (高波数) の西進慣性重力波の特徴

高波数 ($k = 2.5$) の場合のモードの構造を図 4.15 に示す. このモードの振動数は, (4.0.1) より $-\sqrt{9.25}$ となり¹², $k < 1.1$ の場合の振動数と比べてより小さな値を取る.

以下では, 低波数のモードとの相違について, 図 4.15 の高波数のケースから得られる特徴をまとめる.

● 速度ベクトル, ジオポテンシャルの分布と時間変化の様子

速度ベクトル, ジオポテンシャルの分布, 時間変化の特徴は, 基本的に低波数の場合と変わらない (図 4.15 の u, v, ϕ の分布と $\partial u/\partial t, \partial v/\partial t, \partial \phi/\partial t$ の分布から西進していることが分かる). 低波数の場合との違いは, u, ϕ の振幅の極大・極小の位置が赤道上来ること, これに伴い $\partial u/\partial t, \partial \phi/\partial t$ の振幅の極大・極小の位置が赤道上来ること, の2点である.

● 速度ベクトル, ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズム

- 速度ベクトル, ジオポテンシャルの時間発展の緯度による違いについて

速度ベクトル, ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズムは, 図 4.15 で見られるように, 低波数の場合と同様に全領域で重力波的なメカニズムで位相伝搬している.

- 速度ベクトル, ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズム

高波数となっても, 基本的に速度ベクトルとジオポテンシャルの位相伝搬メカニズムは変わらない. 東進波の場合と同様に, 西進慣性重力波の場合でも, 高波数になると, 東西風の時間変化に寄与する東西の圧力傾度力の大きさは, コリオリ力に対して相対的に大きくなる. また, 同様にジオポテンシャルの位相伝搬には, 高波数になるにつれて次第に東西風の収束発散成分の方が効くようになる. 以上の特徴から, 高波数になるにつれてコリオリ成分は弱くなることが分かる.

¹²負の波数を導入した場合には $k = 0$ の場合 $\omega = \sqrt{3}$, $k = -2.5$ の場合 $\omega = \sqrt{9.25}$ となる.

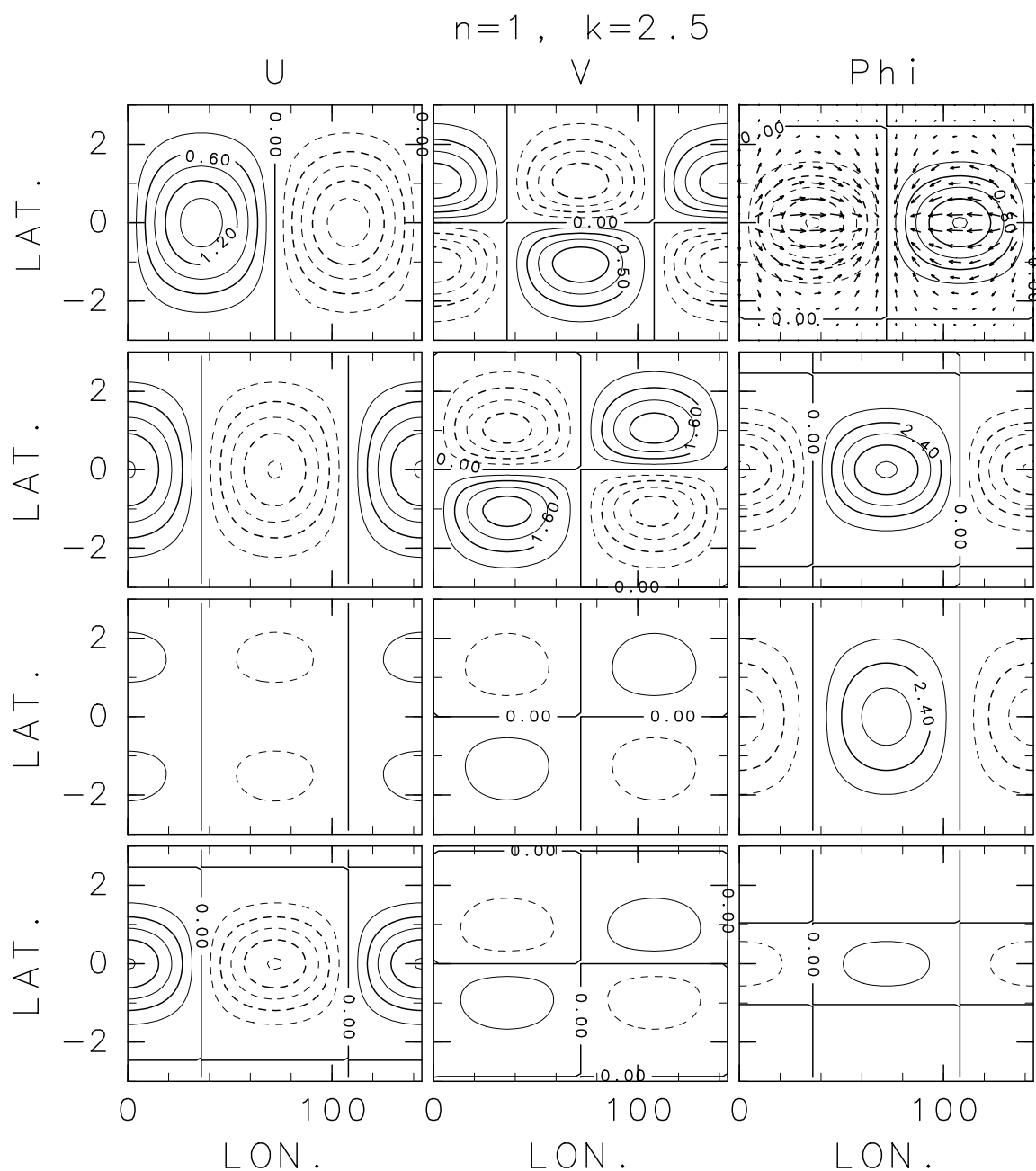


図 4.15: $n = 1, k = 2.5$ (高波数) の西進慣性重力波の (1.2.22)~(1.2.24) の各項の水平分布 ($t = 0, \omega = -3.04, c = -1.21$). 等値線間隔は, u, v, Φ の各々の列において下 3 枚が同じ.

u	v	Φ と風速場 (u, v)
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$
yv	$-yu$	$\frac{\partial u}{\partial x}$
$-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$-\frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$-\frac{\partial v}{\partial y}$

4.4 $n = 2, k = 0$ の慣性重力波

本節では, $n = 2, k = 0$ の慣性重力波 (慣性振動) の特徴について述べる. $k = 0, n = 2$ のモードの振動数は, (4.0.1) より $\pm\sqrt{5}$ となる. Hermite 多項式のモード番号を表す n は, モードの南北構造を決定づけるパラメータであるので n の違いは南北構造に反映される. したがって, $n = 2, k = 0$ のモードであっても $n = 1, k = 0$ のモードとの間にメカニズムの違いは無い. $n = 1$ の場合と異なるのは, 速度ベクトル, ジオポテンシャルの南北構造だけである.

以下では, $n = 1, k = 0$ のモードとの相違点を通して波の特徴をまとめる¹³.

4.4.1 $n = 2, k = 0$ の慣性重力波の特徴

本節では, 図 4.16~図 4.20 中に共通してみられる特徴をまとめる.

- 速度ベクトル, ジオポテンシャルの分布および時間発展は以下の通り:
 - 速度ベクトルは, $\pm 1/\sqrt{2}$ で 0 となる赤道反対称分布をする ((G.0.1) 式). 速度ベクトルの大きさは, 南北半球でそれぞれ 2 つずつ極大値と極小値をもつ ((G.0.2) 式). この様に速度ベクトルの分布が $n = 1$ の場合と異なる他は, $n = 1$ の場合と同様の時間発展をする.
 - ジオポテンシャルも赤道で 0 となる赤道非対称分布をする. ジオポテンシャルは, 南北半球でそれぞれ 2 つずつ異符号の極値をもつ (図 4.16~図 4.20 の ϕ の等値線). この様にジオポテンシャルの分布が $n = 1$ の場合と異なる他は, $n = 1$ の場合と同様の時間発展をする.
- 速度ベクトルの時間発展は以下の様にして決まっている.
 - 速度ベクトルの回転は $n = 1, k = 0$ の場合と同様コリオリ力のために起こる. コリオリ力の働きについても $n = 1$ の場合と同様である.
 - 圧力傾度力の働きも $n = 1$ の場合と同様, 南北流速の大きさを変化させる働きをする (速度ベクトルの大きさを変化させる効果). $n = 2$ の場合, 圧力傾度力が 0 となる緯度は $\pm 1/\sqrt{2}, \pm\sqrt{5}$ であり南北両半球でそれぞれ 2 つずつ存在する. 緯度 $\pm 1/\sqrt{2}$ より赤道側では, 南・北半球で最初の 1/2 周期は北風加速となり, 次の 1/2 周期は南風加速となる¹⁴. 緯度が $1/\sqrt{2}$ と $\sqrt{5}$ の間, もしくは $-1/\sqrt{2}$ と $-\sqrt{5}$ の間では, 南・北半球で最初の 1/2 周期は南風加速となり, 次の 1/2 周

¹³本節で述べる特徴の物理的根拠は, 付録第 G 章に記した.

¹⁴南北風は, 最初の 1/4 周期では南・北半球で南向きの成分を持つので減速し, 次の 1/4 周期では北向きの成分をもつので, 南北風は加速する. 残りの 1/2 周期も同様のメカニズムで南北風は減速, 加速をする.

期は北風加速となる¹⁵. 緯度が $\pm\sqrt{5}$ より極側では, 南・北半球で最初の 1/2 周期は北風加速となり, 次の 1/2 周期は南風加速となる¹⁶. 圧力傾度力が 0 となる緯度 $\pm 1/\sqrt{2}, \pm\sqrt{5}$ では, 圧力傾度力による南北風の加速・減速が起こらないので, 速度ベクトルの大きさは時間変化しない.

- ジオポテンシャルの時間変化は, 以下の様に決まる:
 - ジオポテンシャルの時間発展も, $n = 1, k = 0$ の場合と同様, 南北風の収束発散で決まっており, 東西風と同位相で 1/2 周期毎に符号が反転する ((G.0.5) 式).

4.4.2 $n = 2, k = 0$ の慣性重力波の構造

本節では, 始めに 1/4 周期ごとに速度ベクトルの時間変化を示し, 続いて運動方程式 (1.2.22) ~ (1.2.24) のそれぞれの項の水平分布図を示す. 水平分布図は $n = 1, k = 0$ の構成と同じである.

¹⁵南北風は, 始めの 1/4 周期では南・北半球で北向きの成分を持つので減速し, 次の 1/4 周期では南向きの成分をもつので, 南北風は加速する. 残りの 1/2 周期も同様のメカニズムで南北風は減速, 加速をする.

¹⁶南北風は, 始めの 1/4 周期では南・北半球で北向きの成分を持つので加速し, 次の 1/4 周期では南向きの成分をもつので, 南北風は減速する. 残りの 1/2 周期も同様のメカニズムで南北風は減速, 加速をする.

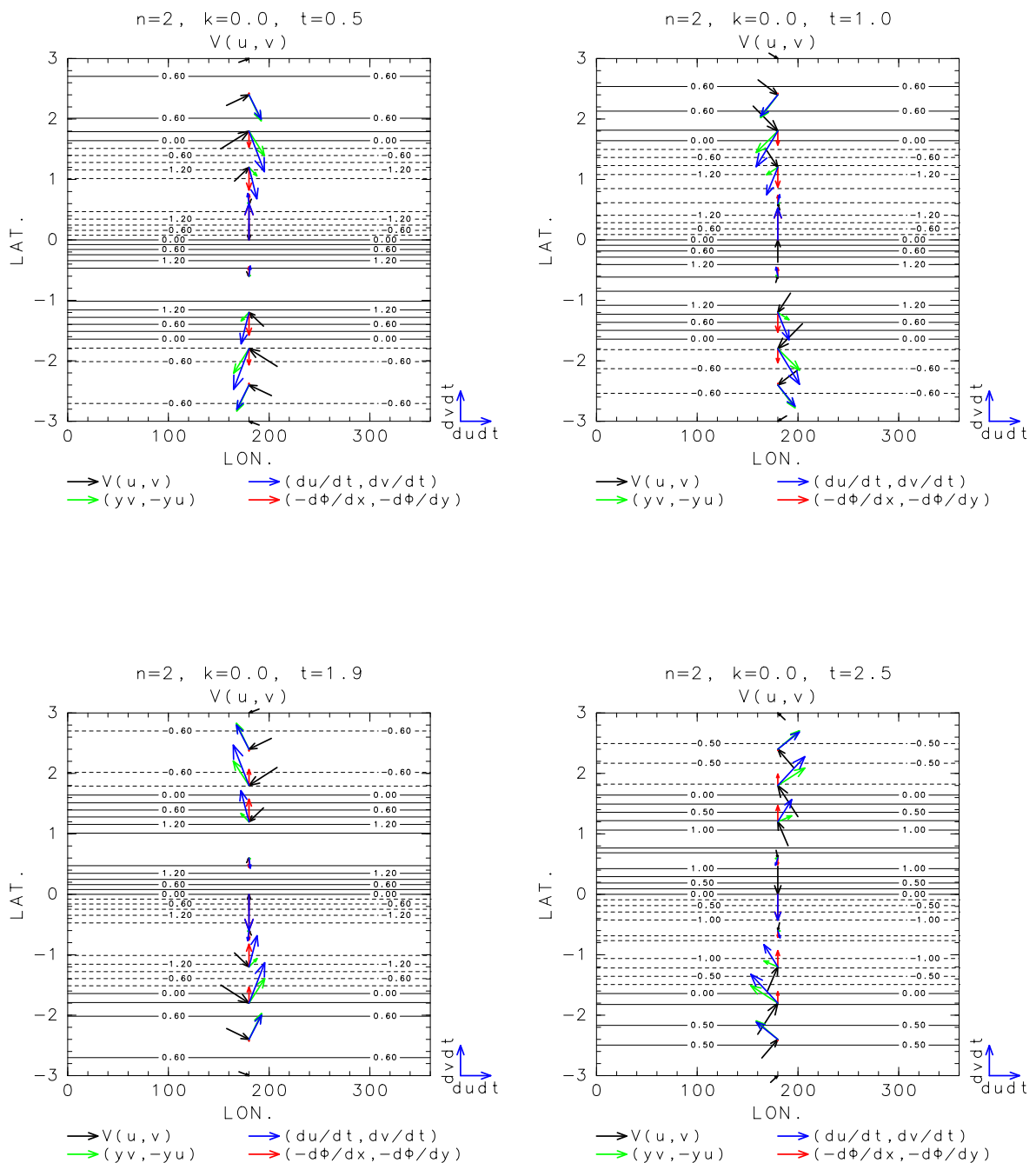


図 4.16: $n = 2, k = 0.0$ の慣性振動の速度ベクトル (黒色のベクトル), ジオポテンシャル (等値線), 圧力傾度力 (赤色のベクトル), コリオリ力 (緑色のベクトル), 加速度ベクトル $(du/dt, dv/dt)$ (青色のベクトル) のスナップショット. それぞれ $t = 0.5$ (上左図), $t = 1.5$ (上右図), $t = 2.5$ (下左図), $t = 3.0$ (下右図) である. ただし, ベクトルは経度 180 度の場合のみ示した. また, 速度ベクトルの終点がその他のベクトルの始点になるように描いている.

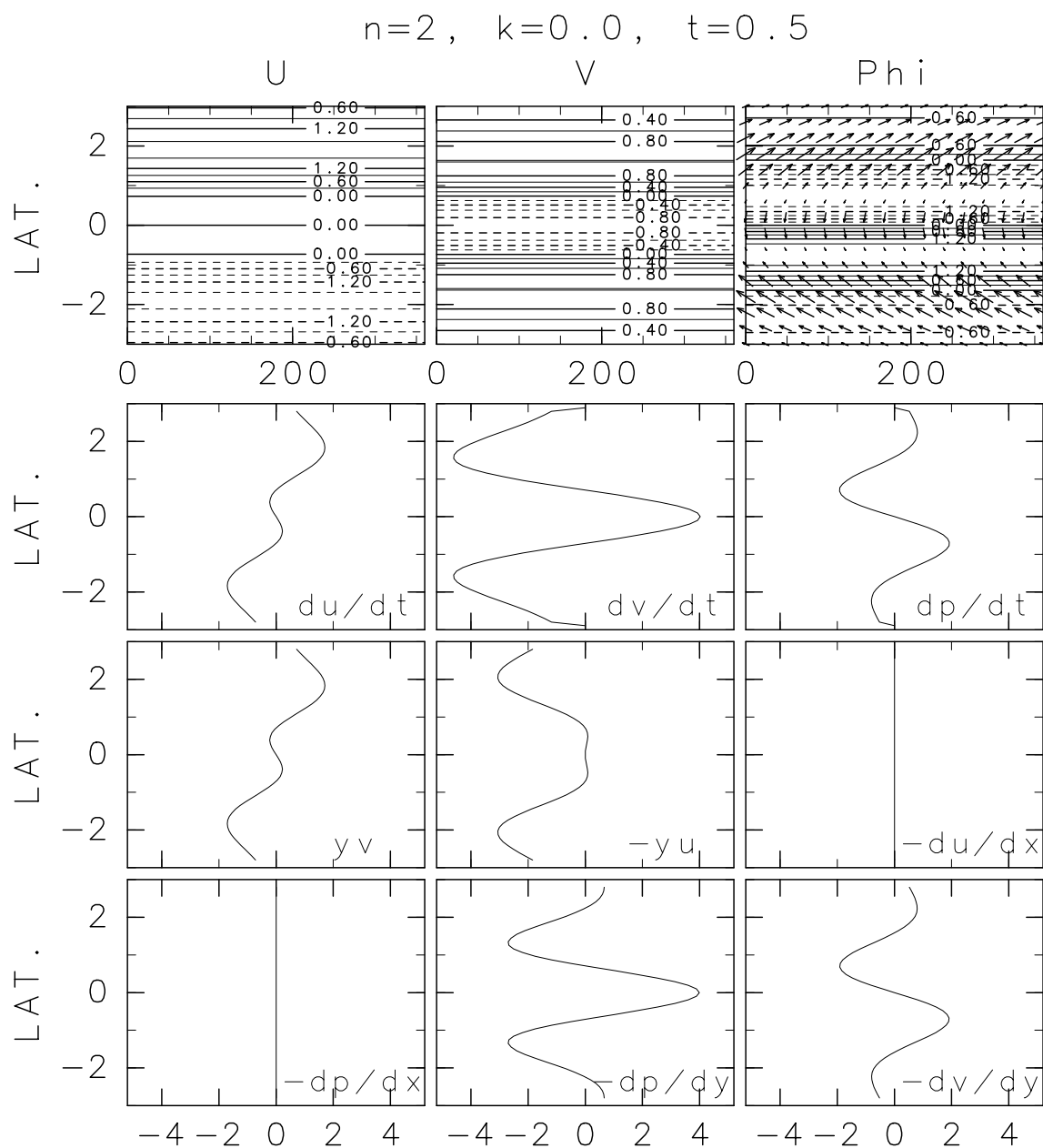


図 4.17: $n = 2, k = 0.0, t = 0.5$ の東進慣性重力波の場合の (1.2.22)~(1.2.24) の各項の水平分布. 下の 3×3 枚の図は振幅の緯度分布を示す.

u	v	Φ と風速場 (u, v)
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$
yv	$-yu$	$\frac{\partial u}{\partial x}$
$-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$-\frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$-\frac{\partial v}{\partial y}$

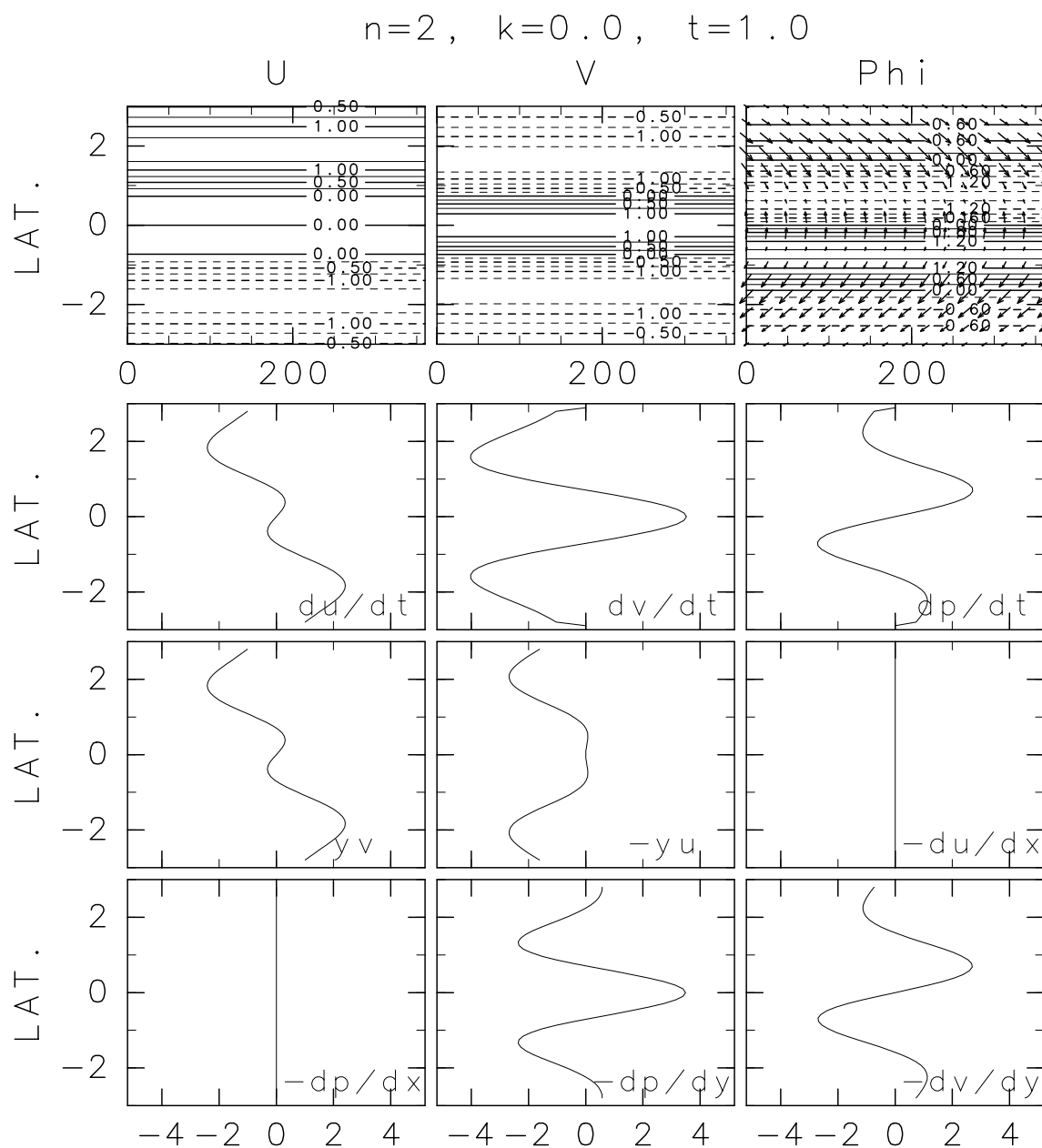


図 4.18: $n = 2, k = 0.0, t = 1.0$ の東進慣性重力波の場合の (1.2.22)~(1.2.24) の各項の水平分布. 下の 3×3 枚の図は振幅の緯度分布を示す.

u	v	Φ と風速場 (u, v)
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$
yv	$-yu$	$\frac{\partial u}{\partial x}$
$-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$-\frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$-\frac{\partial v}{\partial y}$

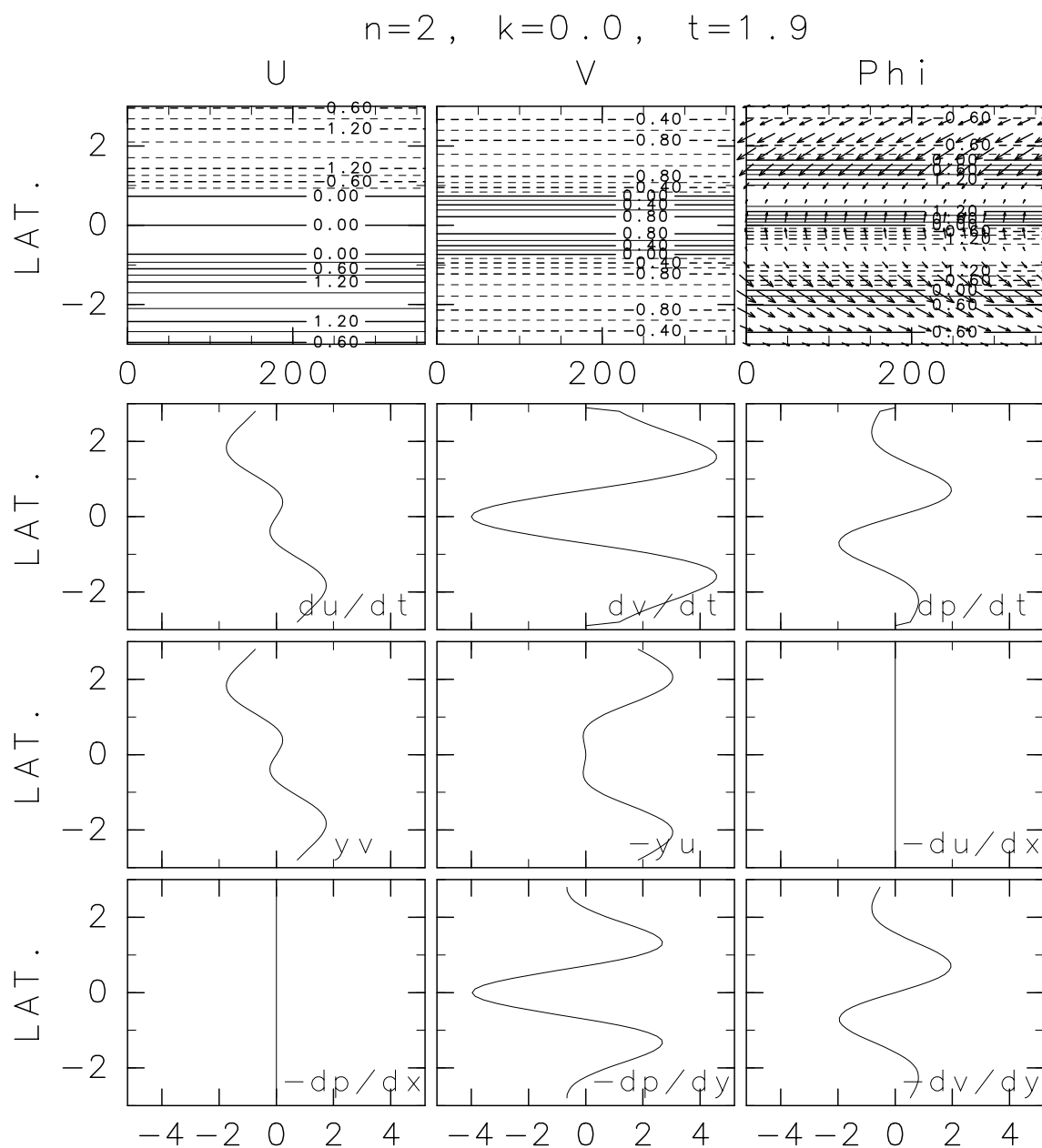


図 4.19: $n = 2, k = 0.0, t = 1.9$ の東進慣性重力波の場合の (1.2.22)~(1.2.24) の各項の水平分布. 下の 3×3 枚の図は振幅の緯度分布を示す.

u	v	Φ と風速場 (u, v)
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$
yv	$-yu$	$\frac{\partial u}{\partial x}$
$-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$-\frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$-\frac{\partial v}{\partial y}$

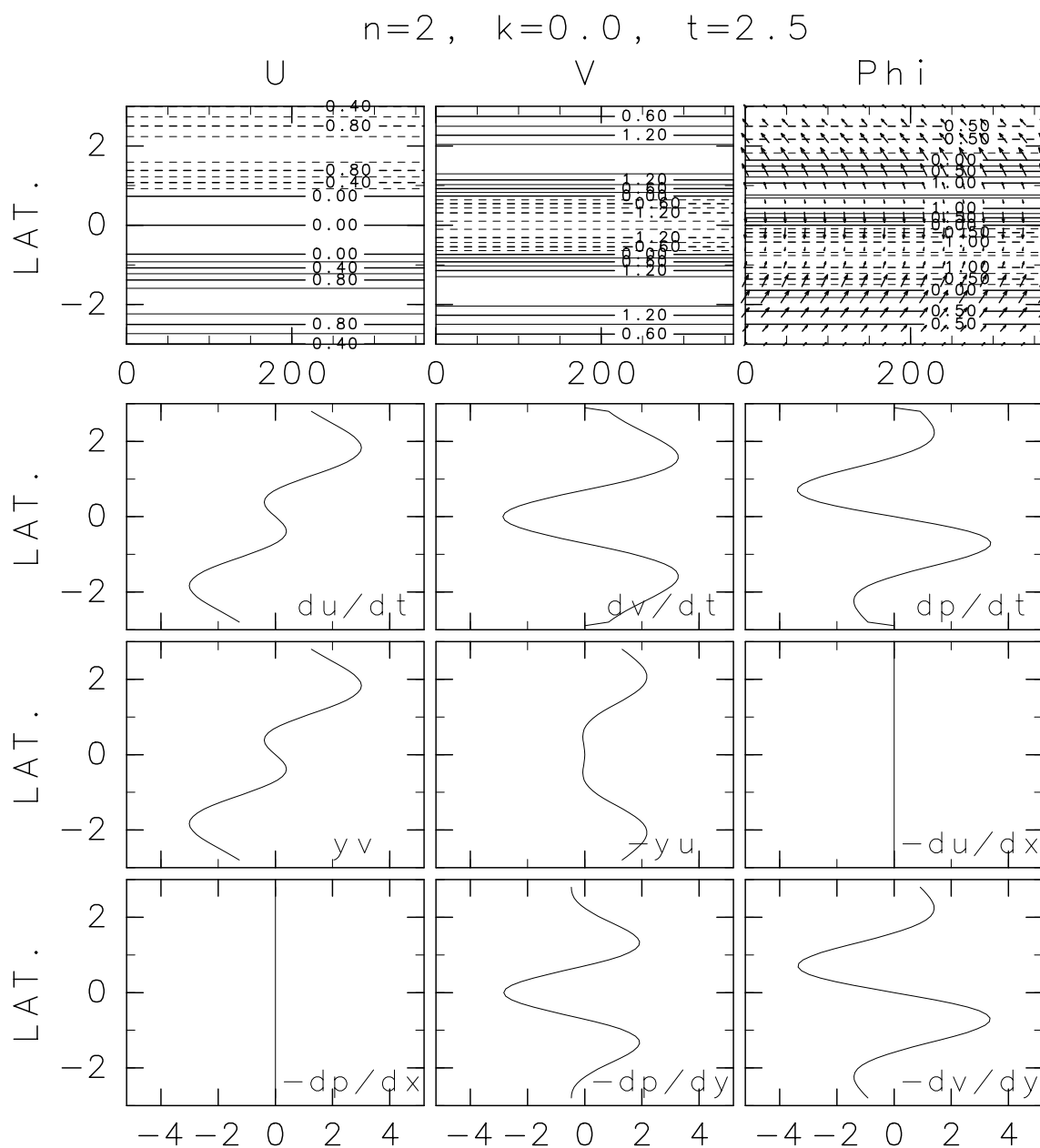


図 4.20: $n = 2, k = 0.0, t = 2.5$ の東進慣性重力波の場合の (1.2.22)~(1.2.24) の各項の水平分布. 下の 3×3 枚の図は振幅の緯度分布を示す.

u	v	Φ と風速場 (u, v)
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$
yv	$-yu$	$\frac{\partial u}{\partial x}$
$-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$-\frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$-\frac{\partial v}{\partial y}$

4.5 $n = 2, k \neq 0$ の東進慣性重力波

本節では, $n = 2, k \neq 0$ の場合の東進慣性重力波の特徴をまとめる.

本節でも, これまでと同様の方法で $0 < k \leq 1.7$ の場合を低波数のレジーム, $k > 1.7$ の場合を高波数のレジームとして私的に分類し, 低波数と高波数の場合を併せて議論することにする.

低波数 ($k = 0.5$) の場合のモードの構造を図 4.21 に示し, 高波数 ($k = 3.0$) の場合のモードの特徴を図 4.22 に示す. これらの図から得られる特徴を以下にまとめる.

● 速度ベクトル, ジオポテンシャルの分布と時間変化の様子

- はじめに, 速度ベクトルの分布と時間変化の様子について述べる. 速度ベクトルは, $n = 1$ の場合と異なり, 赤道反対称な分布をする¹⁷. $n = 2, k \neq 0$ の場合, $n = 1, k \neq 0$ の場合と同様, 速度ベクトルが 0 となる緯度は存在しない. 南北流速が 0 となる緯度は, $\pm 1/\sqrt{2}$, 東西流速が 0 となる緯度は, $k = 0$ の場合と同様に赤道と $\pm \sqrt{(\omega + 5k)/(2(\omega + k))}$ となる緯度である. $n = 1$ の場合と比較して, u, v が 0 となる緯度の数 (節の数) は, それぞれ $2 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 2$ のように変化する. また, 東西風速が 0 となるこれらの緯度は赤道を除いて, $k \rightarrow \infty$ で $y \rightarrow \pm \sqrt{5}/2$ に落ち着く.

次に速度ベクトルの時間変化の様子について $\partial u/\partial t, \partial v/\partial t$ の分布を見ると, それぞれ東西風, 南北風の分布と比べて $1/4$ 波長進んでいることが分かる. このことから確かに速度ベクトルの位相は全体として東進していることが分かる.

- 次に, ジオポテンシャルの分布と時間変化の様子について述べる. ジオポテンシャルも, $n = 1$ の場合と異なり, 赤道反対称な分布をする. ジオポテンシャルは赤道と $\pm \sqrt{(5\omega + k)/(2(\omega + k))}$ となる緯度で 0 となる. $n = 1$ の場合と比較して, Φ が 0 となる緯度の数 (節の数) は, $2 \rightarrow 3$ のように変化する. また, Φ が 0 となるこれらの緯度は赤道を除いて, $k \rightarrow \infty$ で $y \rightarrow \pm 1/\sqrt{2}$ に落ち着く.

次にジオポテンシャルの時間変化の様子について $\partial \Phi/\partial t$ の分布を見ると, ジオポテンシャルの分布と比べて $1/4$ 波長進んでいることが分かる. このことからジオポテンシャルの位相も全体として東進していることが分かる.

¹⁷ $n = 2, k \neq 0$ の場合, (2.4.76) ~ (2.4.78) より,

$$u(x, y, t) = -2y \frac{2(\omega + k)y^2 - \omega - 5k}{\omega^2 - k^2} e^{-(1/2)y^2} \sin(kx - \omega t), \quad (4.5.11)$$

$$v(x, y, t) = (4y^2 - 2) e^{-(1/2)y^2} \cos(kx - \omega t), \quad (4.5.12)$$

$$\phi(x, y, t) = -2y \frac{2(\omega + k)y^2 - 5\omega - k}{\omega^2 - k^2} e^{-(1/2)y^2} \sin(kx - \omega t). \quad (4.5.13)$$

となる.

● 速度ベクトル, ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズム

- 速度ベクトル, ジオポテンシャルの時間発展の緯度による違いについて
速度ベクトル, ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズムは, $n = 1$ の時と同様に高緯度域と赤道域に分けて考えることが出来る. 高緯度と赤道域の境界はやはり明確に決められないが, 図 4.21 では, 緯度 $\pm 1 \sim 1.5$ 度付近にあると考えられる. よって以下では, これまでと同様に “高緯度域, 赤道域” という枠組を用いて位相伝搬のメカニズムを議論する.
- 高緯度域の速度ベクトル, ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズム
高緯度域の速度ベクトル, ジオポテンシャルは, $n = 1$ の東進波の場合と同様のメカニズムで位相伝搬する. 低波数の場合 $n = 1$ の東進波の場合と同様, コリオリ力が圧力傾度力よりも卓越しているのので, 見た目には慣性振動的な振舞いをしている. よって, 位相伝搬に寄与しているのは慣性振動からのずれの部分の東西圧力傾度力である. 低波数から高波数になるにつれて, コリオリ力に対する東西の圧力傾度力の大きさは大きくなり, 東西風速の収束発散成分は南北風速の収束発散成分よりも大きくなる. したがって, 高緯度域では $n = 1$ の場合と同様, 高波数になるにつれて, 慣性振動的な特徴は弱くなり, 重力波的な特徴が強くなる.
- 赤道域の速度ベクトル, ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズム
赤道域の速度ベクトル, ジオポテンシャルは, $n = 1$ の東進波の場合と同様のメカニズムで位相伝搬する. 高波数になると東西の圧力傾度力と東西風速の収束発散成分はより大きな値を取るようになるので, $n = 1$ の東進波の高波数の場合で見られたように, より重力波的なメカニズムで位相伝搬するようになる.

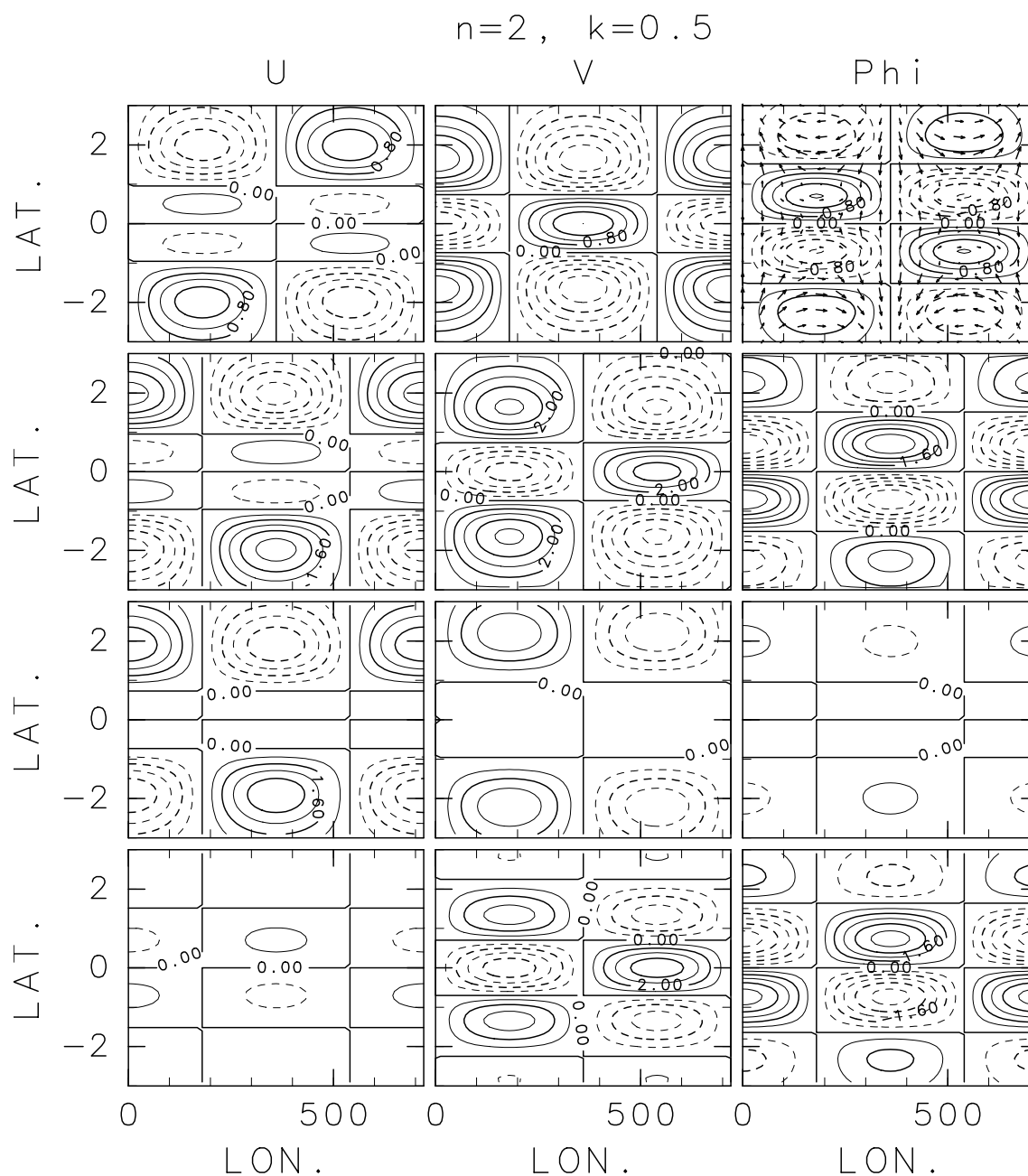


図 4.21: $n = 2, k = 0.5$ (低波数) の東進慣性重力波の (1.2.22)~(1.2.24) の各項の水平分布 ($t = 0, \omega = 2.29, c = 4.58$). 等値線間隔は, u, v, Φ の各々の列において下 3 枚が同じ.

u	v	Φ と風速場 (u, v)
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$
yv	$-yu$	$\frac{\partial u}{\partial x}$
$-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$-\frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$-\frac{\partial v}{\partial y}$

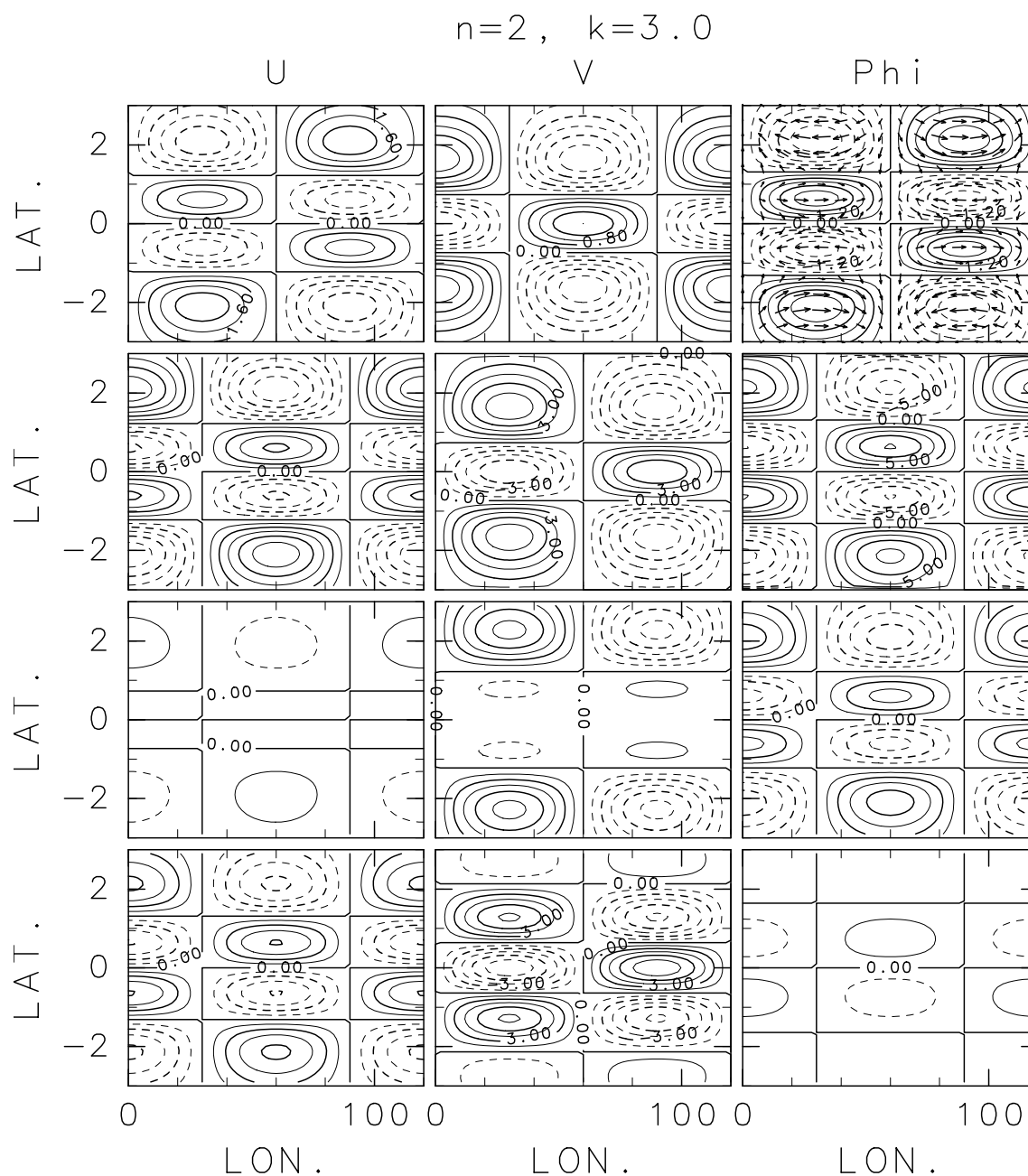


図 4.22: $n = 2, k = 3.0$ (高波数) の東進慣性重力波の (1.2.22)~(1.2.24) の各項の水平分布 ($t = 0, \omega = 3.74, c = 1.25$). 等値線間隔は, u, v, Φ の各々の列において下 3 枚が同じ.

u	v	Φ と風速場 (u, v)
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$
yv	$-yu$	$\frac{\partial u}{\partial x}$
$-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$-\frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$-\frac{\partial v}{\partial y}$

4.6 $n = 2, k \neq 0$ の西進慣性重力波

本節では, $n = 2, k \neq 0$ の場合の西進慣性重力波の特徴をまとめる.

本節でも, これまでと同様の方法で $0 < k \leq 1.6$ の場合を低波数のレジーム, $k > 1.6$ の場合を高波数のレジームとして私的に分類し, 低波数と高波数の場合を併せて議論することにする.

低波数 ($0 < k \leq 1.6$) の場合のモードの構造を図 4.23 に示し, 高波数 ($k > 1.6$) の場合のモードの特徴を図 4.24 に示す. これらの図から得られる特徴を以下にまとめる.

● 速度ベクトル, ジオポテンシャルの分布と時間変化の様子

- はじめに, 速度ベクトルの分布と時間変化の様子について述べる. 速度ベクトルは, $n = 1$ の場合と異なり, 赤道反対称な分布をする. 東西流速が 0 となる緯度は, 赤道だけである¹⁸. 南北流速は東進する場合と同様, 緯度 $\pm 1/\sqrt{2}$ で 0 となる. u, v が 0 となる緯度の数 (節の数) は, $n = 2$ の東進波の場合と同様にそれぞれ 3 個, 2 個である. $n = 1$ の西進慣性重力波の場合と異なるのは, 速度ベクトルの収束発散域が赤道上に無い (図 4.23, 4.24 では, 緯度 ± 1 度付近にある) ことである. しかし, 南北半球で速度ベクトルが収束発散する緯度帯を中心にして ($n = 1$ の場合の赤道として) 見れば, $n = 1$ の時に見られた西進波と東進波の違い (東西流速と南北流速の位相の違い) は, $n = 2$ の場合でも見られる.

次に速度ベクトルの時間変化の様子について $\partial u/\partial t, \partial v/\partial t$ の分布を見ると, それぞれ東西風, 南北風の分布と比べて $1/4$ 波長遅れていることが分かる. このことから確かに速度ベクトルの位相は全体として西進していることが分かる.

- 次に, ジオポテンシャルの分布と時間変化の様子について述べる. ジオポテンシャルも $n = 1$ の場合と異なり, 赤道反対称な分布をする. ジオポテンシャルは赤道と緯度 $\pm \sqrt{(5\omega + k)/2(\omega + k)}$ で 0 となる. Φ が 0 となる緯度の数 (節の数) は, $n = 2$ の東進波の場合と同様である.

次にジオポテンシャルの時間変化の様子について $\partial \Phi/\partial t$ の分布を見ると, ジオポテンシャルの分布と比べて $1/4$ 波長遅れていることが分かる. このことからジオポテンシャルの位相も全体として西進していることが分かる.

● 速度ベクトル, ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズム

- 速度ベクトル, ジオポテンシャルの時間発展の緯度による違いについて
速度ベクトル, ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズムは, 図 4.23, 4.24 から明らかのように, $n = 1$ の西進波の場合と同様に全領域で重力波的である. 上述

¹⁸(4.5.11) に於いて $\omega < 0$ なので, $\omega + 5k > 0, \omega + k < 0$ となり, $u = 0$ となる $y (\neq 0)$ が存在しない.

したように、 $n = 1$ の西進慣性重力波の場合と異なり、速度ベクトルの収束発散域が赤道上に無いが、南北半球で速度ベクトルが収束発散する緯度帯を中心にして見れば、 $n = 1$ の場合と同様に重力波的なメカニズムをしている。以下では、この詳細について述べることにする。

- 速度ベクトル, ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズム

$n = 2$ となっても、基本的に速度ベクトルとジオポテンシャルの位相伝搬メカニズムは変わらない。 $n = 1$ の西進波の場合と同様に、 $n = 2$ の西進波の場合でも、高波数になると、東西風の時間変化に寄与する東西の圧力傾度力の大きさは、コリオリ力に対して相対的に大きくなる。また、同様にジオポテンシャルの位相伝搬には、高波数になるにつれて次第に東西風の収束発散成分の方が効くようになる。以上の特徴から、高緯度域では高波数になるにつれて慣性振動的な特徴は弱くなり、重力波的な特徴が強くなる。

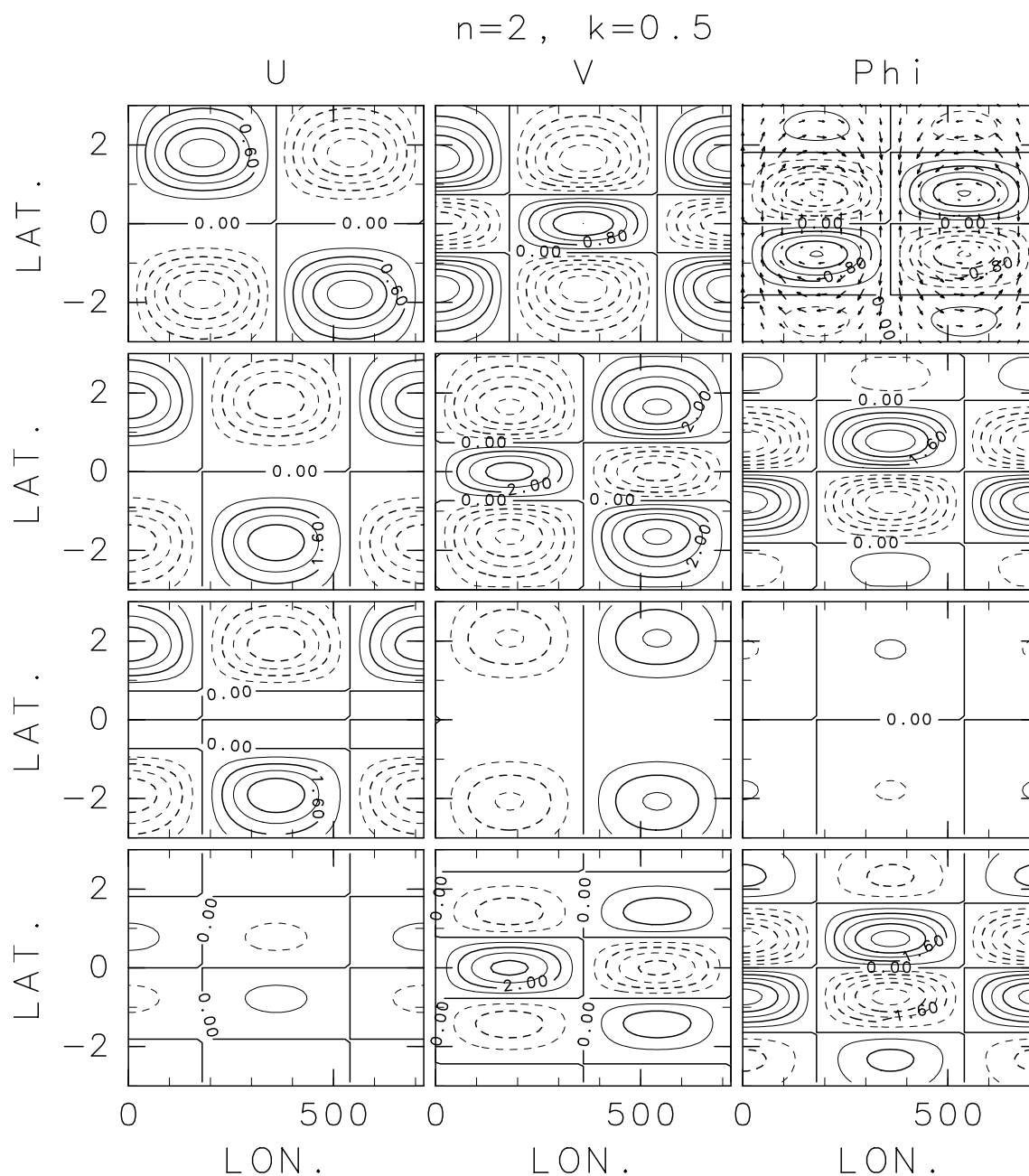


図 4.23: $n = 2, k = 0.5$ (低波数) の西進慣性重力波の (1.2.22)~(1.2.24) の各項の水平分布 ($t = 0, \omega = -2.29, c = -4.58$). 等値線間隔は, u, v, Φ の各々の列において下 3 枚が同じ.

u	v	Φ と風速場 (u, v)
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$
yv	$-yu$	$\frac{\partial u}{\partial x}$
$-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$-\frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$-\frac{\partial v}{\partial y}$

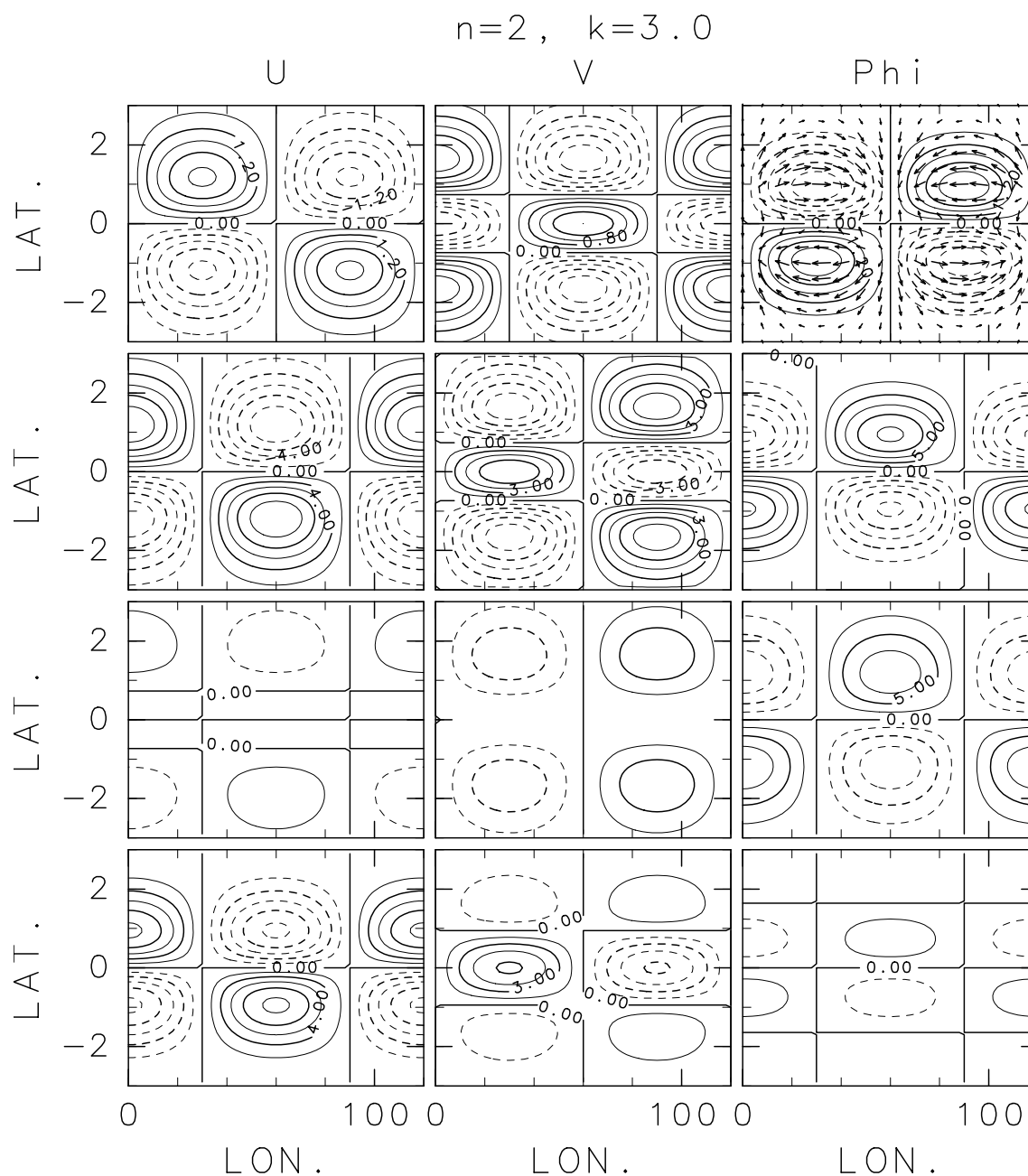


図 4.24: $n = 2, k = 3.0$ (高波数) の西進慣性重力波の (1.2.22)~(1.2.24) の各項の水平分布 ($t = 0, \omega = -3.74, c = -1.25$). 等値線間隔は, u, v, Φ の各々の列において下 3 枚が同じ.

u	v	Φ と風速場 (u, v)
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$
yv	$-yu$	$\frac{\partial u}{\partial x}$
$-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$-\frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$-\frac{\partial v}{\partial y}$

第5章

赤道ロスビー波の水平伝播のメカニズム

第3章の結果よりロスビー波の振動数 ω , 位相速度 c , 群速度 $\partial\omega/\partial k$ は次の様になる:¹

$$\omega = \frac{-k}{k^2 + 2n + 1}, \quad (n \geq 1) \quad (5.0.1)$$

$$c = \frac{-1}{k^2 + 2n + 1}. \quad (n \geq 1) \quad (5.0.2)$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{k^2 - 2n - 1}{(k^2 + 2n + 1)^2}. \quad (n \geq 1) \quad (5.0.3)$$

(5.0.2) より, 位相速度は常に $c < 0$ であるから赤道ロスビー波は西進する. 本節では, 運動方程式の他に, 中緯度のロスビー波の記述でも用いられる渦度方程式を用いて各項の分布を調べる. その中で中緯度域のロスビー波と比較を行う.

はじめに, 赤道 β 平面の方程式系から渦度方程式を導出する. $\frac{\partial}{\partial x}(1.2.23)$, $\frac{\partial}{\partial y}(1.2.22)$ より,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) = -y \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (5.0.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = v + y \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (5.0.5)$$

よって, (5.0.4)–(5.0.5) より相対渦度 ζ の渦度方程式を得る:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -v - y \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (5.0.6)$$

¹有次元系で表記すると, ロスビー波の振動数, 位相速度は次の様になる:

$$\omega = \frac{-k\beta}{k^2 + \frac{\beta}{\sqrt{gH}}(2n + 1)},$$

$$c = \frac{-\beta}{k^2 + \frac{\beta}{\sqrt{gH}}(2n + 1)}.$$

これより相対渦度の時間変化は、コリオリ力の南北経度と速度場の水平発散成分からなっていることが分かる。以下では必要に応じて (5.0.6) 式の各項の水平分布の図を示すことにする。なお、(5.0.6) 式の水平モード展開の詳細は付録 D 章に記述した。

5.1 $n = 1, k = 0$ の赤道ロスビー波

$n = 1, k = 0$ の場合、(5.0.1) を用いると $\omega = 0$ となる。したがって、第 2.4.1 節の $\omega = k$ の場合になるので、用いるべき固有関数は、ケルビン波と同じ (2.4.80)~(2.4.82) となる。この様に、 $k = \omega = 0$ の解は縮退しており、赤道ロスビー波の構造とケルビン波の構造は同じになる。したがって、その構造の詳細と伝搬メカニズムについては、第 7 章でまとめて後述することにする。

5.2 $n = 1, k \neq 0$ の赤道ロスビー波

次に $n \geq 1, k \neq 0$ の場合の赤道ロスビー波として、 $n = 1$ の場合の特徴をまとめる。

以下では、ロスビー波の分散曲線 (図 3.1) の傾きが変わる波数 $k = 2$ を境として、 $0 < k \leq 2.0$ の場合を低波数 (長波, 群速度 $\partial\omega/\partial k < 0$) のレジーム, $k > 2.0$ の場合を高波数 (短波, 群速度 $\partial\omega/\partial k > 0$) のレジームとして分類し議論する。

5.2.1 $0 < k \leq 2.0$ (低波数) の赤道ロスビー波の特徴

低波数 ($k = 1.0$) の場合のモードの構造を図 5.2 に示す。このモードの振動数は、(5.0.1) より -0.25 となる。以下では、図 5.2 の低波数のケースから得られる特徴をまとめる。

● 速度ベクトル, ジオポテンシャルの分布と時間変化の様子

- はじめに、速度ベクトルの分布と時間変化の様子について述べる。速度ベクトルは、赤道対称な分布をする。この特徴は、 $n = 1$ のモード (他に慣性重力波がある) に共通して見られる²。東西流速は赤道で 0 とならないので速度ベクトル自

² $n = 1, k \neq 0$ の場合、(2.4.76) ~ (2.4.78) より、以下の様になる (再掲):

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= -2 \frac{(\omega + k)y^2 - k}{\omega^2 - k^2} e^{-(1/2)y^2} \sin(kx - \omega t), \\ v(x, y, t) &= 2ye^{-(1/2)y^2} \cos(kx - \omega t), \end{aligned}$$

身も赤道で 0 とならない。東西風速が 0 となるのは、緯度 $\pm\sqrt{k/(\omega+k)}$ である。南北流速は、赤道反対称な分布をする。南北流速は赤道で 0 となる。

次に、速度ベクトルの時間変化の特徴について $\partial u/\partial t, \partial v/\partial t$ の分布を見ると、それぞれ東西風、南北風の分布と比べて 1/4 波長遅れていることが分かる。このことから速度ベクトルの位相は全体として西進していることが分かる。

- 次に、ジオポテンシャルの分布と時間変化の様子について述べる。ジオポテンシャルも、速度ベクトルと同様、赤道対称な分布をする。ジオポテンシャルが 0 となる緯度は、 $\pm\sqrt{\omega/(\omega+k)}$ である (本ページ脚注参照)。

次に、ジオポテンシャルの時間変化の特徴について $\partial\Phi/\partial t$ の分布を見ると、ジオポテンシャルの分布と比べて 1/4 波長遅れていることが分かる。このことからジオポテンシャルの位相も全体として西進していることが分かる。

● 速度ベクトル, ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズム

- 速度ベクトル, ジオポテンシャルの位相伝搬は、基本的には中緯度のロスビー波と同様に β 効果で起こっている。まずここでは、中緯度のロスビー波の伝搬メカニズムを簡単にまとめておく。

中緯度のロスビー波は、中緯度 β 平面に於ける線形化した準地衝流渦度方程式で記述される (付録 I 章参照)。波長の長い ($k \rightarrow 0$) のロスビー長波の場合を考えると、水平スケール (L) が非常に大きくなるので、相対渦度は、流体柱の伸縮による渦位変化や惑星渦度による渦位変化と比べて相対的に無視することが出来る。こうして、絶対渦度保存則は以下の様に近似して考えることが出来る:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{f+\zeta}{h} \right) \simeq \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{f}{h} \right) = 0 \quad (5.2.7)$$

ただし、ここで $f = f_0 + \beta y$, ζ は、流体の相対渦度, h は流体中の厚さを示す。例えば、北半球の場合には、ジオポテンシャルが正の領域の西側で $v > 0$, 東側で $v < 0$ の地衝流が流れている状況を考える。この南北流に伴い、惑星渦度は西側で増加し、東側で減少するので、(5.2.7) の絶対渦度の保存により、流体柱は西側で増加し東側で減少する (上述した様に、相対渦度はほとんど変化しない)。その結果、ジオポテンシャルの正の領域も西に伝播していく。

- 速度ベクトル, ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズム

上述した様に、中緯度のロスビー波の速度ベクトル, ジオポテンシャルの位相伝搬には β 効果が効いている。ここでも、はじめに渦度方程式 (5.0.6) 式を用いて、中緯度のロスビー波と対比させながら赤道域のロスビー波の位相伝搬メカニズムをまとめる。

$$\phi(x, y, t) = -2 \frac{(\omega+k)y^2 - \omega}{\omega^2 - k^2} e^{-(1/2)y^2} \sin(kx - \omega t).$$

図 5.3 を見ると、相対渦度の時間変化 ($\partial\zeta/\partial t$) は、 $-v$ とほとんどバランスしていることが分かる。このため、相対渦度の位相伝搬に対する速度場の発散成分の寄与は小さく、南北流による惑星渦度の生成 (β 効果) が、位相伝搬に大きく寄与していることが分かる。つまり、(5.0.6) 式に於いて、右辺第二項が無視できる状態にある:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} \simeq -v = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \quad (5.2.8)$$

β 効果で位相伝搬する点は、中緯度のロスビー波の位相伝搬のメカニズムと同様であるが、発散成分の寄与が小さいという点は、中緯度のロスビー波と異なる (中緯度のロスビー波では、 β 効果と速度の収束発散 (流体中の伸縮) がバランスしていた)。したがって、絶対渦度保存則は、赤道ロスビー波に適用する場合、以下の様に近似して考えることが出来る:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{f + \zeta}{h} \right) \simeq \frac{\partial}{\partial t} (f + \zeta) = 0 \quad (5.2.9)$$

こうして、(5.2.8) より、東西方向に圧力傾度力が存在すれば、そこで圧力傾度力と逆符号の地衝流による南北流 v が発生し、この南北流に伴う惑星渦度の生成 βv (β 効果) と釣り合うように相対渦度が生成される。例えば、相対渦度が正の領域の西側で $v > 0$ 、東側で $v < 0$ となる。これに伴い、惑星渦度は西側で増加し、東側で減少するので、(5.2.9) の絶対渦度の保存により、相対渦度は西側で減少し東側で増加する (上述した様に、収束発散成分 (流体柱の伸縮) は非常に小さいので、考えなくて良い)。その結果、相対渦度が正の領域 (相対渦度が負の領域) も西に伝播していく (図 5.1 参照)。

次に、速度ベクトルとジオポテンシャルの位相伝搬を運動方程式から議論することにする。ジオポテンシャルの位相伝搬は運動方程式を用いて説明できるが、速度ベクトルの位相伝搬はうまく説明できない。

はじめに、ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズムについて考察する。図 5.2 の経度 180 度付近の速度ベクトルの分布を見ると、赤道域では西側で東風、東側で西風、南側で南風、北側で北風となるので、この経度帯の東西風は発散域となり、南北風は収束域となっていることが分かる (図 5.2 の $-\partial u/\partial x$, $-\partial v/\partial y$ 成分参照)。赤道域では東西風の収束発散成分の寄与が大きいので、東西風の発散により経度 180 度付近の赤道域では、 $\partial\phi/\partial t$ は負の値を取るようになる (図 5.2 の $\partial\phi/\partial t$ 成分参照)。赤道を離れると、東西風、南北風の収束発散の仕方、その大小はそれぞれ赤道域と逆転し、南北風の収束発散成分が卓越するようになる。このため、赤道を離れたところでは、南北風の発散により $\partial\phi/\partial t$ は負の値を取るようになる。他の経度帯でも同様に、ジオポテンシャルの位相伝搬は速度ベクトルの収束発散で決まっている。このように、速度ベクトルとしての収束発散成分は重力波の場合と比べて非常に小さい (上述した様に、東西風の収束発散成分と南北風の収束発散成分がほぼバランスしている) が、東西風と南北風に分けて考えると、ジオポテンシャルの位相伝搬は、速度ベクトルの収束発散に応じて決まっているにすぎない。

次に、速度ベクトルの位相伝搬について考察する。速度ベクトルの位相伝搬を運動方程式から解釈しようとする、以下に述べるようにうまくいかない。図 5.2 の経度 180 度付近の赤道域のジオポテンシャルの分布に注目すると、西側で正の値、東側で負の値を取る。このため、この領域の東西圧力傾度力 $-\partial\phi/\partial x$ は、正の値を取る。したがって、この領域での東西風は西風加速を受けるので、図 5.2 の東西風の分布と見比べると、赤道域の東西風の位相は確かに西に伝播することが分かる。ところが、図 4.14 の経度 180 度付近の高緯度側のジオポテンシャルの分布も赤道域と同じ符号を取る、この領域の東西圧力傾度力 $-\partial\phi/\partial x$ も、正の値を取る。この領域の東西風の分布と見比べると、高緯度側の速度ベクトルの位相伝搬に圧力傾度力は寄与していないことが分かる。高緯度側の速度ベクトルの向きを決めているのは、コリオリ力である。速度ベクトルの位相伝搬のメカニズムを議論するためには、渦度方程式を用いれば良い。例えば、図 4.14 の右上の速度ベクトルと相対渦度の分布に注目する。経度 180 度付近では、相対渦度は正の値を取る、先程説明した様に西に伝播する。また、速度ベクトルの分布は、相対渦度の西への伝播に応じて決まるので、速度ベクトルの位相も西に伝播することが分かる。一方、赤道上ではコリオリ力が働かないので、基本的にジオポテンシャルの分布による圧力傾度力の方向に従って、速度ベクトルは位相伝搬している。これは、上述した通りである。

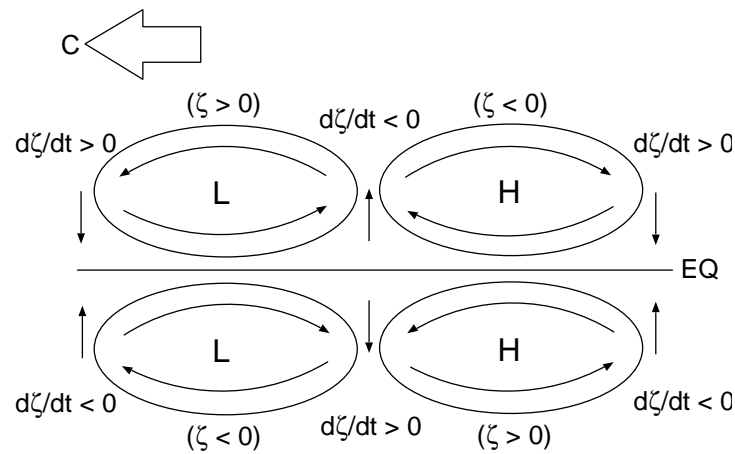
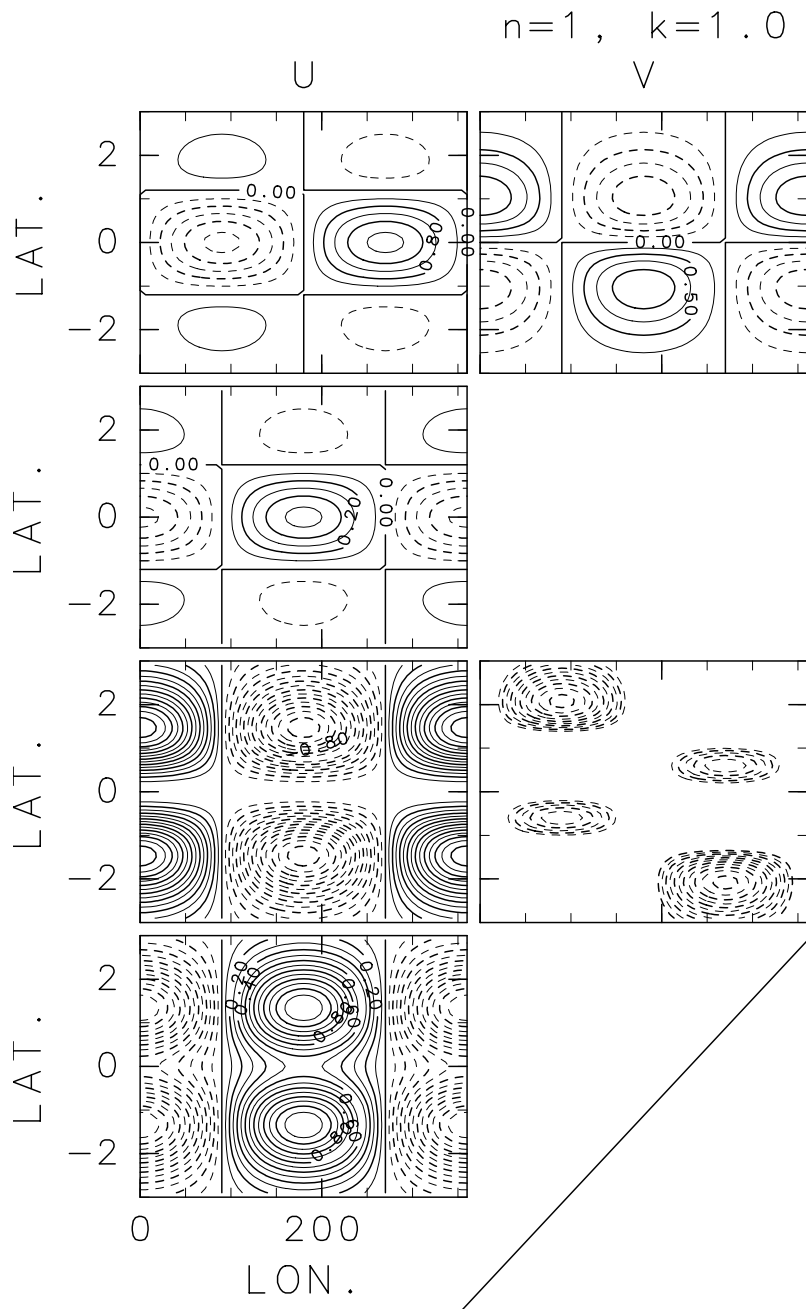


図 5.1: $n = 1$ の赤道ロスビー波の伝播メカニズム.



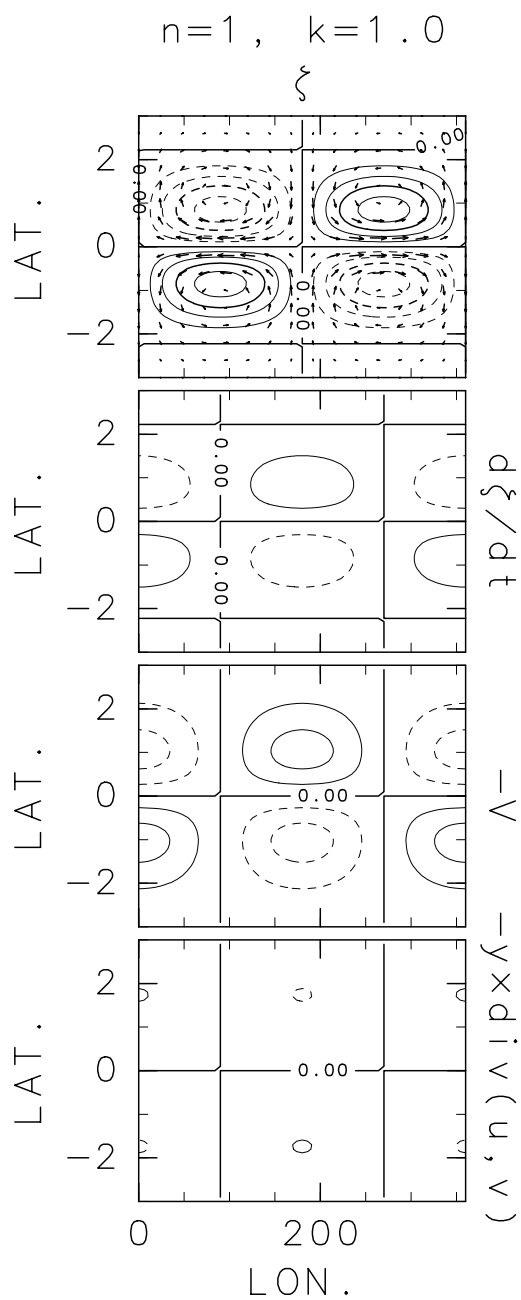


図 5.3: $n=1, k=1.0$ (低波数) のロスビー波の相対渦度 ζ と $d\zeta/dt$, さらに $d\zeta/dt$ を構成する各々の成分の水平分布 ($t=0, \omega=-0.25, c=-0.25$). 等値線間隔は, 下3枚が同じ.

ζ
$\frac{\partial \zeta}{\partial t}$
$-v$
$-y \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$

5.2.2 $k > 2.0$ (高波数) の赤道ロスビー波の特徴

高波数 ($k = 2.5$) の場合のモードの構造を図 5.4 に示す. このモードの振動数は, (4.0.1) より -0.27 となる.

以下では, 低波数のモードとの相違について, 図 5.4 の高波数のケースから得られる特徴をまとめる.

● 速度ベクトル, ジオポテンシャルの分布と時間変化の様子

速度ベクトル, ジオポテンシャルの分布の特徴は, 低波数の場合と変わらない. 低波数のモードと異なり, 高波数のモードでは群速度が正となり符号が変わるが, 図 5.4 からはその特徴は分からない.

● 速度ベクトル, ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズム

- 速度ベクトルの回転運動, 位相伝搬のメカニズムは低波数の場合と同様である. 低波数の場合との違いは, 速度場がより地衝流バランスに近付いていることである. このため, 速度場の収束発散によって伝搬するといった重力波的な特徴はよりいっそう弱くなり, β 効果により相対渦度が時間変化する中緯度のロスビー波的な伝搬メカニズムにシフトしていることが分かる.
- ジオポテンシャルの位相伝搬メカニズムも低波数の場合と同様である. しかし, 低波数の場合と比べて東西流速の収束発散成分がより大きくなるので, 南北流速の収束発散成分とほぼキャンセルするようになり, 速度ベクトルの収束発散成分は 0 に近づく.

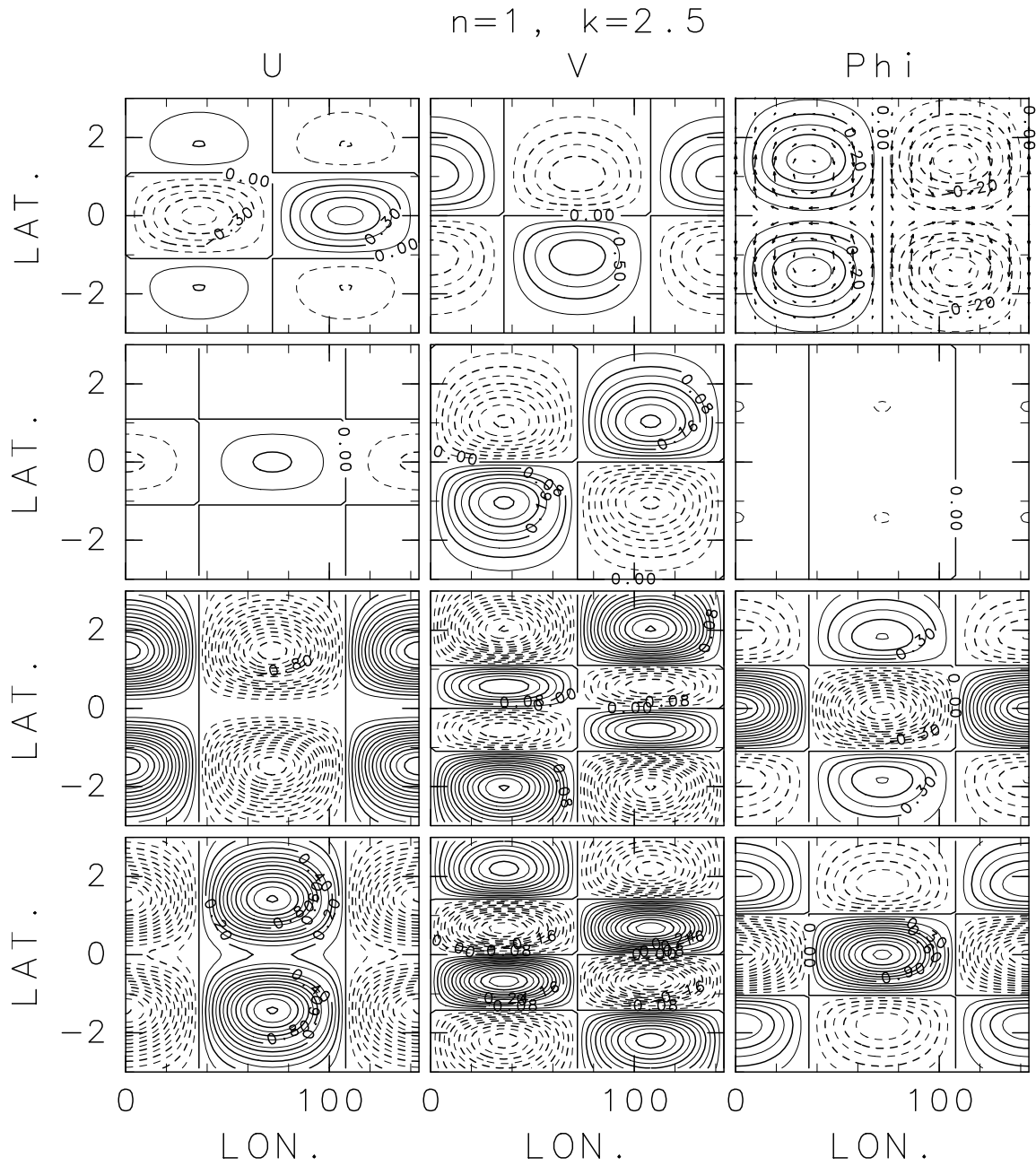


図 5.4: $n = 1, k = 2.5$ (高波数) の赤道ロスビー波の (1.2.22)~(1.2.24) の各項の水平分布 ($t = 0, \omega = -0.27, c = -0.11, \partial\omega/\partial k = 0.004$). 等値線間隔は, u, v, Φ の各列で下 3 枚が同じ.

u	v	Φ と風速場 (u, v)
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$
yv	$-yu$	$\frac{\partial u}{\partial x}$
$-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$-\frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$-\frac{\partial v}{\partial y}$

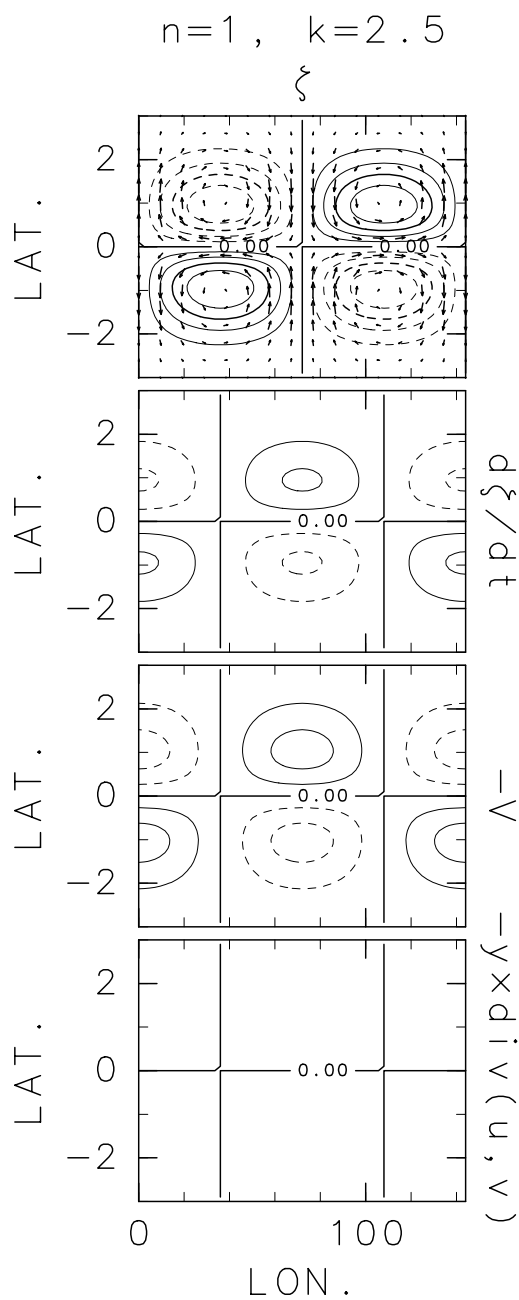


図 5.5: $n = 1, k = 2.5$ (高波数) のロスビー波の相対渦度 ζ と $d\zeta/dt$, さらに $d\zeta/dt$ を構成する各々の成分の水平分布 ($t = 0, \omega = -0.27, c = -0.11$). 等値線間隔は, 下 3 枚が同じ.

ζ
$\frac{\partial \zeta}{\partial t}$
$-v$
$-y \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$

5.3 $n \geq 2, k \neq 0$ の赤道ロスビー波

$n \geq 2, k \neq 0$ の赤道ロスビー波の図を, 図 5.6~図 5.9に載せる. n の値が大きくなると, 南北の構造は変化するが, 位相伝搬のメカニズムは $n = 1, k \neq 0$ のロスビー波と変わらない.

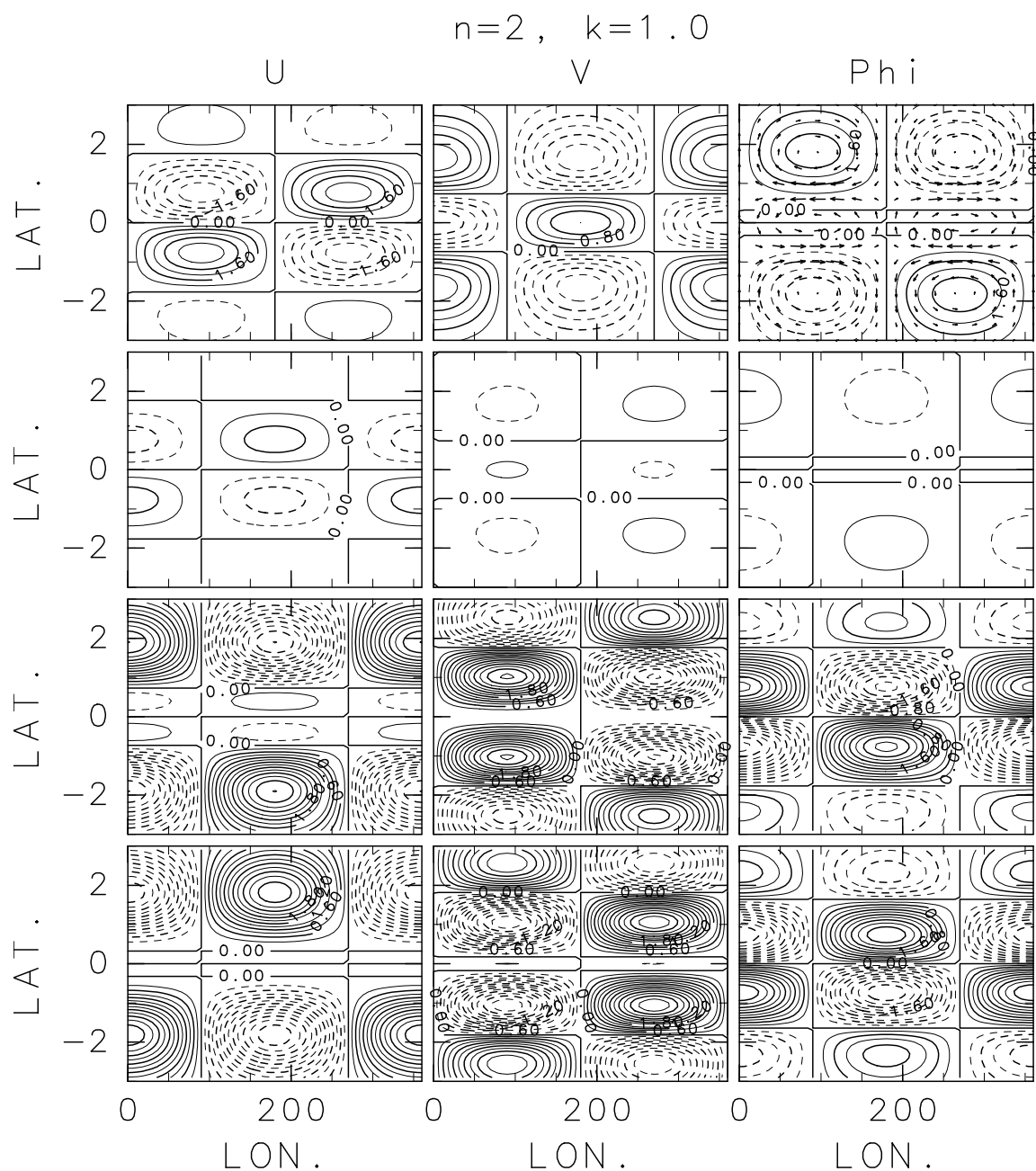


図 5.6: $n = 2, k = 1.0$ (低波数) の赤道ロスビー波の (1.2.22)~(1.2.24) の各項の水平分布 ($t = 0, \omega = -0.17, c = -0.17$). 等値線間隔は, u, v, Φ の各々の列において下 3 枚が同じ.

u	v	Φ と風速場 (u, v)
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$
yv	$-yu$	$\frac{\partial u}{\partial x}$
$-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$-\frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$-\frac{\partial v}{\partial y}$

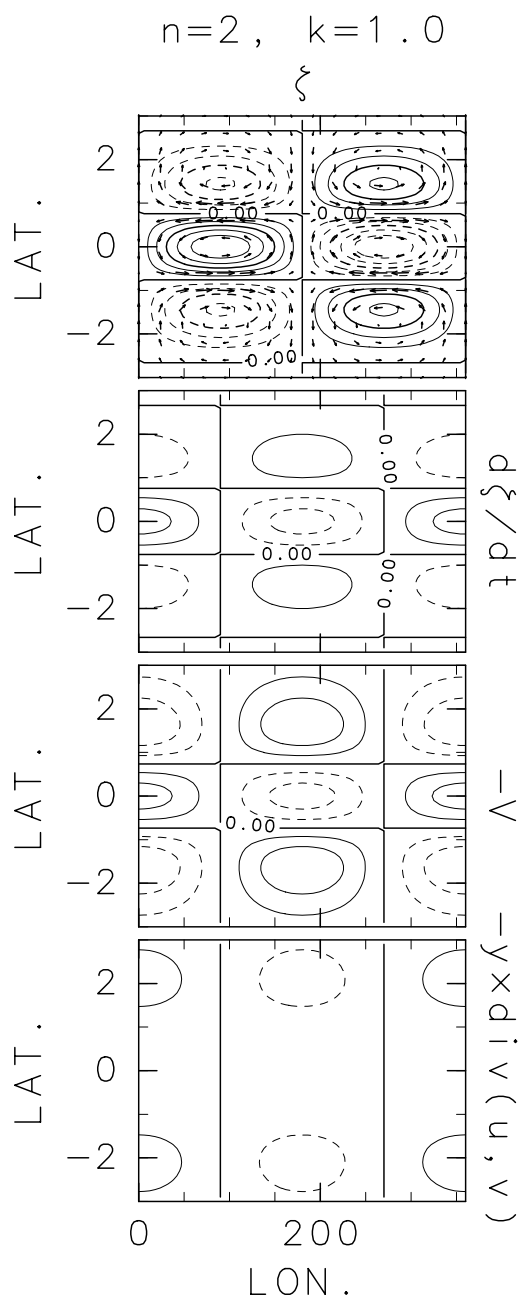


図 5.7: $n = 2, k = 1.0$ (低波数) のロスビー波の相対渦度 ζ と $d\zeta/dt$, さらに $d\zeta/dt$ を構成する各々の成分の水平分布 ($t = 0, \omega = -0.17, c = -0.17$). 等値線間隔は, 下 3 枚が同じ.

ζ
$\frac{\partial \zeta}{\partial t}$
$-v$
$-y \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$

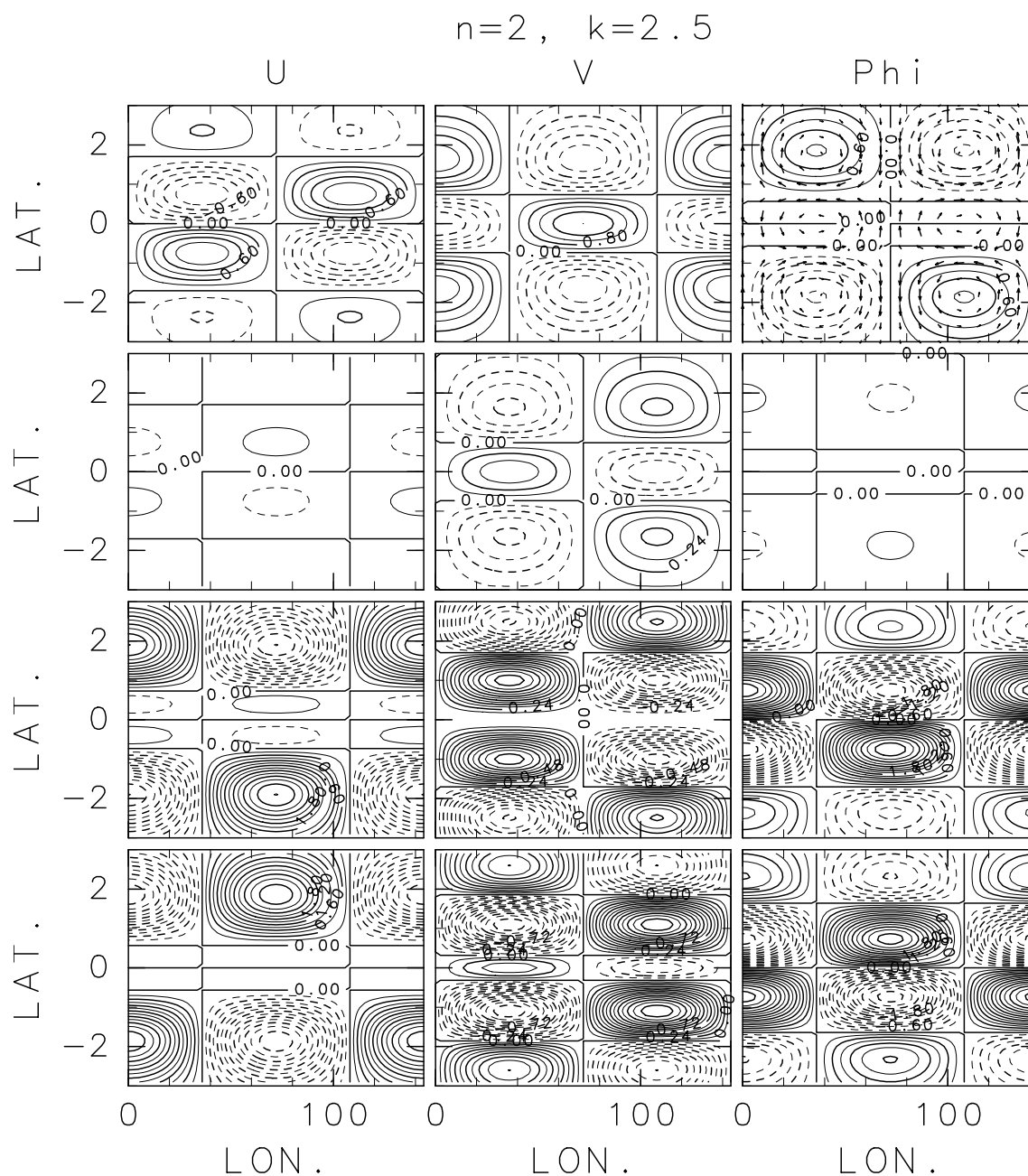


図 5.8: $n = 2, k = 2.5$ (高波数) の赤道ロスビー波の (1.2.22)~(1.2.24) の各項の水平分布 ($t = 0, \omega = -0.22, c = -0.09$). 等値線間隔は, u, v, Φ の各々の列において下 3 枚が同じ.

u	v	Φ と風速場 (u, v)
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$
yv	$-yu$	$\frac{\partial u}{\partial x}$
$-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$-\frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$-\frac{\partial v}{\partial y}$

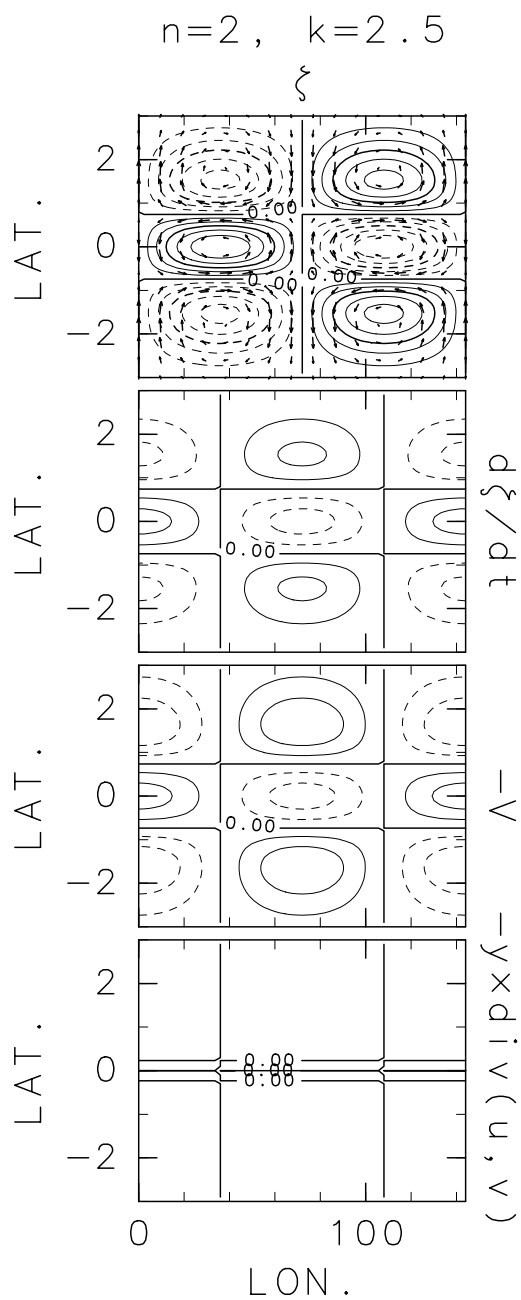


図 5.9: $n = 2, k = 2.5$ (高波数) のロスビー波の相対渦度 ζ と $d\zeta/dt$, さらに $d\zeta/dt$ を構成する各々の成分の水平分布 ($t = 0, \omega = -0.22, c = -0.09$). 等値線間隔は, 下 3 枚が同じ.

ζ
$\frac{\partial \zeta}{\partial t}$
$-v$
$-y \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$

第 6 章

混合ロスビー重力波の水平伝播のメカニズム

第 3.3 節の結果より混合ロスビー重力波の振動数 ω , 位相速度 c をまとめると次の様になる:¹

$$\omega = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 4}}{2} \quad (\text{for } n = 0) \quad (6.0.1)$$

$$c = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{k^2}} \right) \quad (\text{for } n = 0) \quad (6.0.2)$$

(6.0.2) より, 混合ロスビー重力波には東進するものと西進するものが存在する.

6.1 $n = 0, k = 0$ の混合ロスビー重力波

本節では, $n = 0, k = 0$ の混合ロスビー重力波の特徴について述べる. $n = 0, k = 0$ のモードの振動数は, (6.0.1) より $\omega = 1 = \beta$ となる. $n = 0$ のモードは, $n \geq 1$ のモードとは異なる構造を持つ. なぜなら, n はモードの南北構造を規定し, n の違いは南北構造に反映されるからである.

¹有次元系で表記すると, 混合ロスビー重力波の振動数, 位相速度は次の様になる:

$$\omega = \frac{1}{2} \left(k\sqrt{gH} \pm \sqrt{k^2gH + 4\beta\sqrt{gH}} \right) \quad (\text{for } n = 0)$$

$$c = \frac{1}{2} \left(\sqrt{gH} \pm \sqrt{gH + \frac{4\beta\sqrt{gH}}{k^2}} \right) \quad (\text{for } n = 0)$$

以下では, $n = 1, 2, k = 0$ のモードとの相違点を通して, $n = 0, k = 0$ のモードの特徴をまとめる².

6.1.1 $n = 0, k = 0$ の混合ロスビー重力波の特徴

本節では, 図 6.1~図 6.5 中に共通してみられる特徴をまとめる.

- 速度ベクトル, ジオポテンシャルの分布および時間発展は以下の通り:
 - 速度ベクトルは, 赤道反対称分布をする ((H.0.1) 式). これは, n が偶数だからである. 速度ベクトルの大きさは, 南北半球でそれぞれ 1 つずつ同符号の極値をもつ ((H.0.2) 式). この様に速度ベクトルの分布が $n = 1, 2$ の場合と異なる他は, $n = 1, 2, k = 0$ のモードと同様に, 速度ベクトルは慣性振動で回転し, その大きさは南北圧力傾度力により延び縮みする.
 - ジオポテンシャルも赤道で 0 となる赤道反対称分布をする. ジオポテンシャルは, 南北半球でそれぞれ 1 つずつ異符号の極値をもつ (図 6.1~図 6.5 の ϕ の等値線). この様にジオポテンシャルの分布が, $n = 1, 2$ の場合と異なる他は, $n = 1, 2, k = 0$ のモードと同様に, 速度ベクトルの向きにより符号を変える.
- 速度ベクトルの時間発展は以下の様にして決まっている.
 - 速度ベクトルの回転は, $n = 1, 2, k = 0$ の場合と同様コリオリ力のために起こる. コリオリ力の働きについても $n = 1, 2$ の場合と同様である.
 - 速度ベクトルの大きさは, 南北方向の圧力傾度力で決まる. その詳細は, $n = 1, 2, k = 0$ の場合と同様である.
- ジオポテンシャルの時間変化は, 以下の様に決まる:
 - ジオポテンシャルの時間発展は, $n = 1, 2, k = 0$ の場合と同様, 南北風の収束発散で決まる. 詳細は $n = 1, 2, k = 0$ の節で述べた通りである.

6.1.2 $n = 0, k = 0$ の混合ロスビー重力波の構造

本節では, 始めに 1/4 周期ごとに速度ベクトルの時間変化を示し, 続いて運動方程式 (1.2.22) ~ (1.2.24) のそれぞれの項の水平分布図を示す. 水平分布図の構成はこれまでと同様である.

²本節で述べる特徴の物理的根拠は, 付録第 H 章に記した.

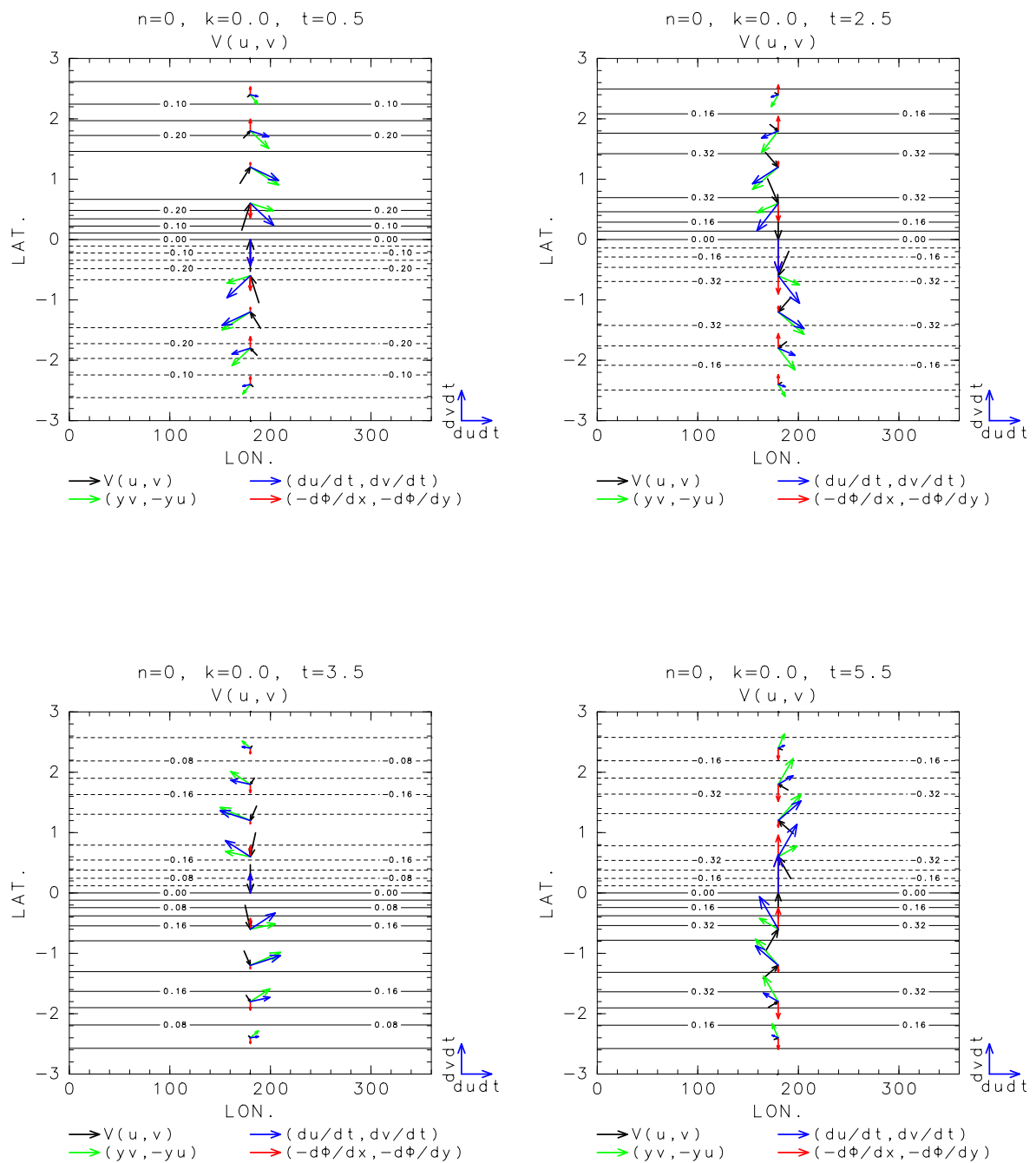


図 6.1: $n = 0, k = 0.0$ の慣性振動の速度ベクトル (黒色のベクトル), ジオポテンシャル (等値線), 圧力傾度力 (赤色のベクトル), コリオリ力 (緑色のベクトル), 加速度ベクトル $(du/dt, dv/dt)$ (青色のベクトル) のスナップショット. それぞれ $t = 0.5$ (上左図), $t = 2.5$ (上右図), $t = 3.5$ (下左図), $t = 5.5$ (下右図) である. ただし, ベクトルは経度 180 度の位置のもののみ示した. また, 速度ベクトルの終点が決他のベクトルの始点になるように描いている.

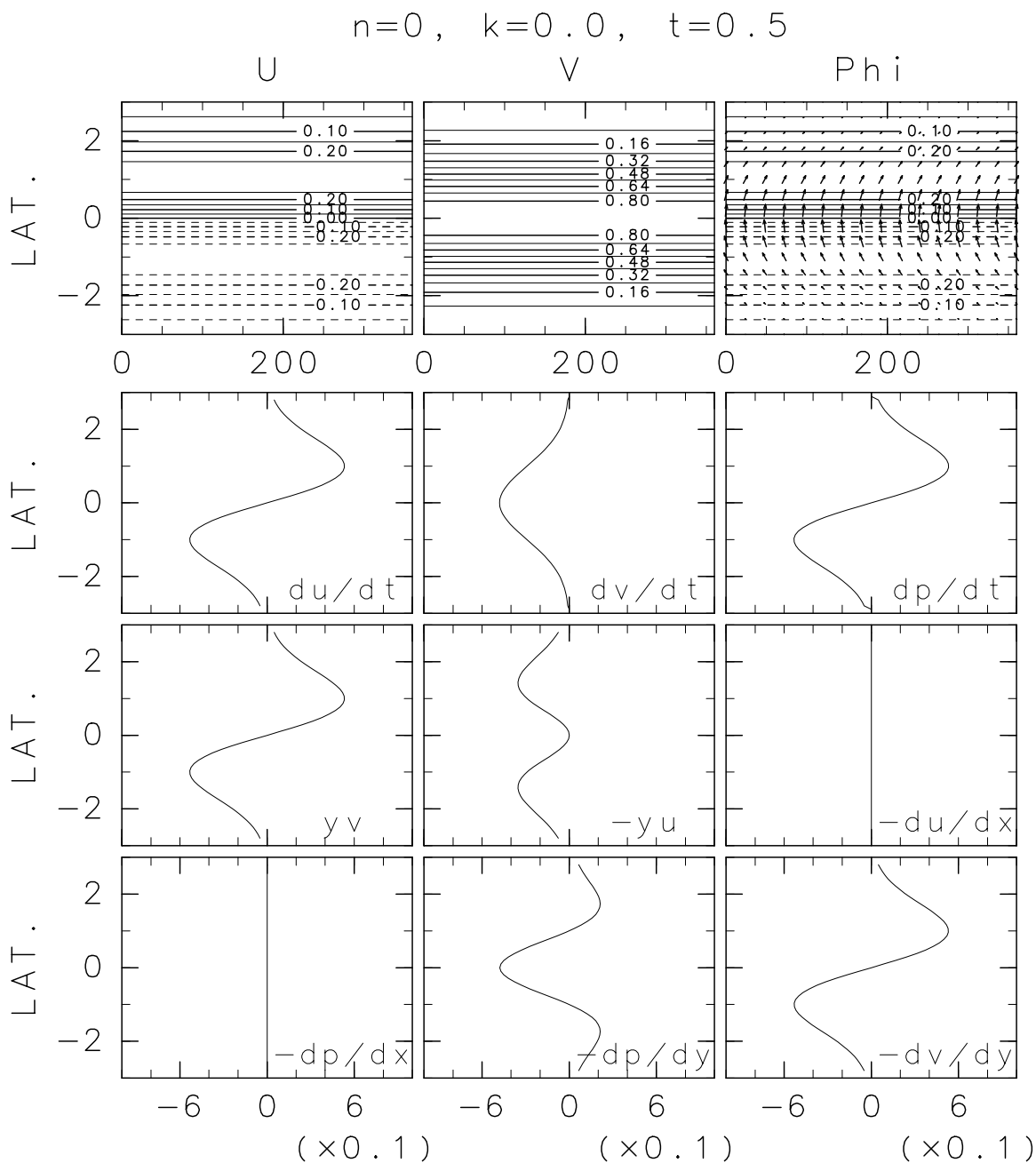


図 6.2: $n = 0, k = 0.0, t = 0.5$ の東進混合ロスビー重力波 (慣性振動) の場合の (1.2.22)~(1.2.24) の各項の水平分布. 下の 3×3 枚の図は振幅の緯度分布を示す.

u	v	Φ と風速場 (u, v)
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$
yv	$-yu$	$\frac{\partial u}{\partial x}$
$-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$-\frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$-\frac{\partial v}{\partial y}$

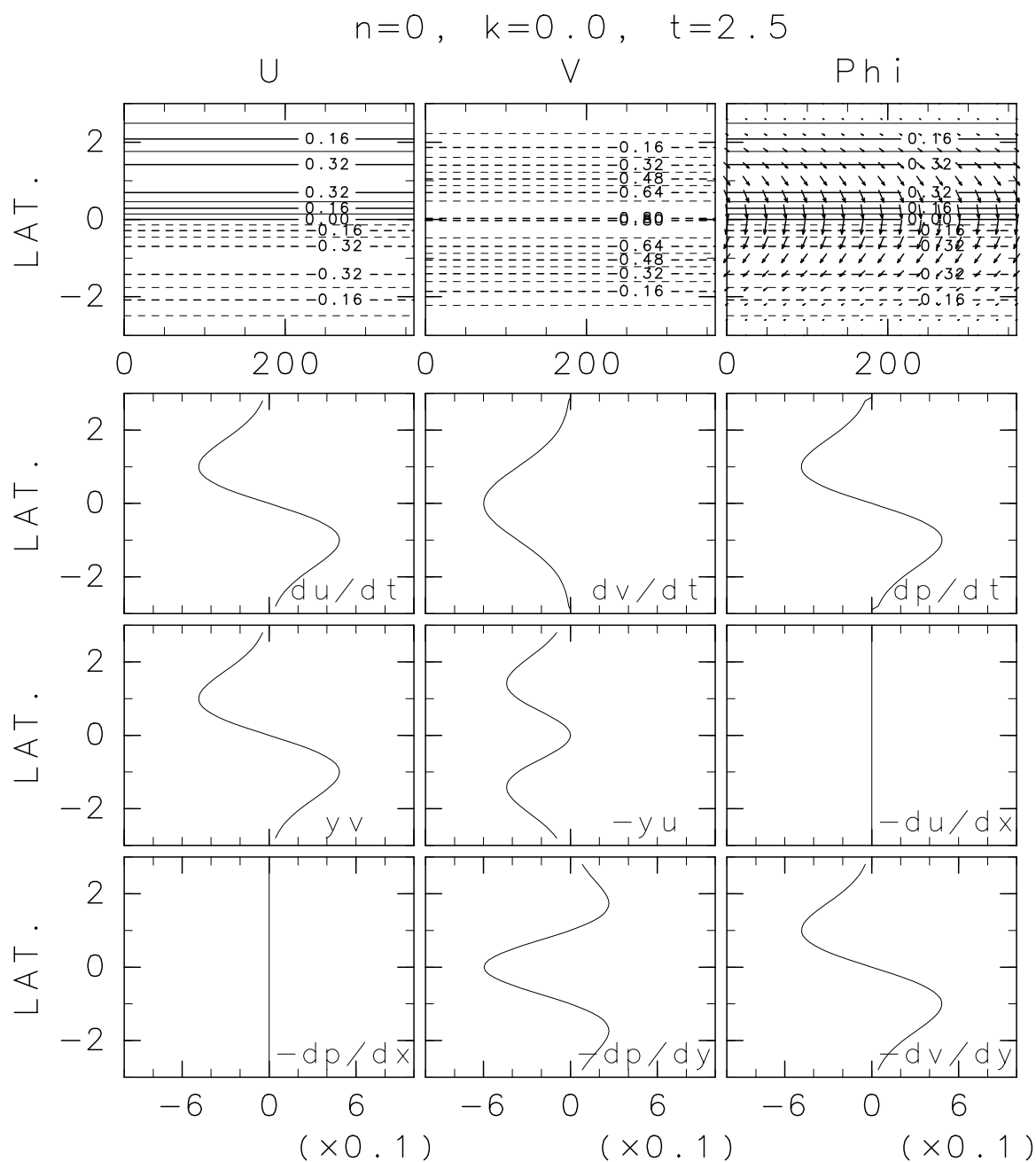


図 6.3: $n = 0, k = 0.0, t = 2.5$ の東進混合ロスビー重力波 (慣性振動) の場合の (1.2.22)~(1.2.24) の各項の水平分布. 下の 3×3 枚の図は振幅の緯度分布を示す.

u	v	Φ と風速場 (u, v)
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$
yv	$-yu$	$-\frac{\partial u}{\partial x}$
$-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$-\frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$-\frac{\partial v}{\partial y}$

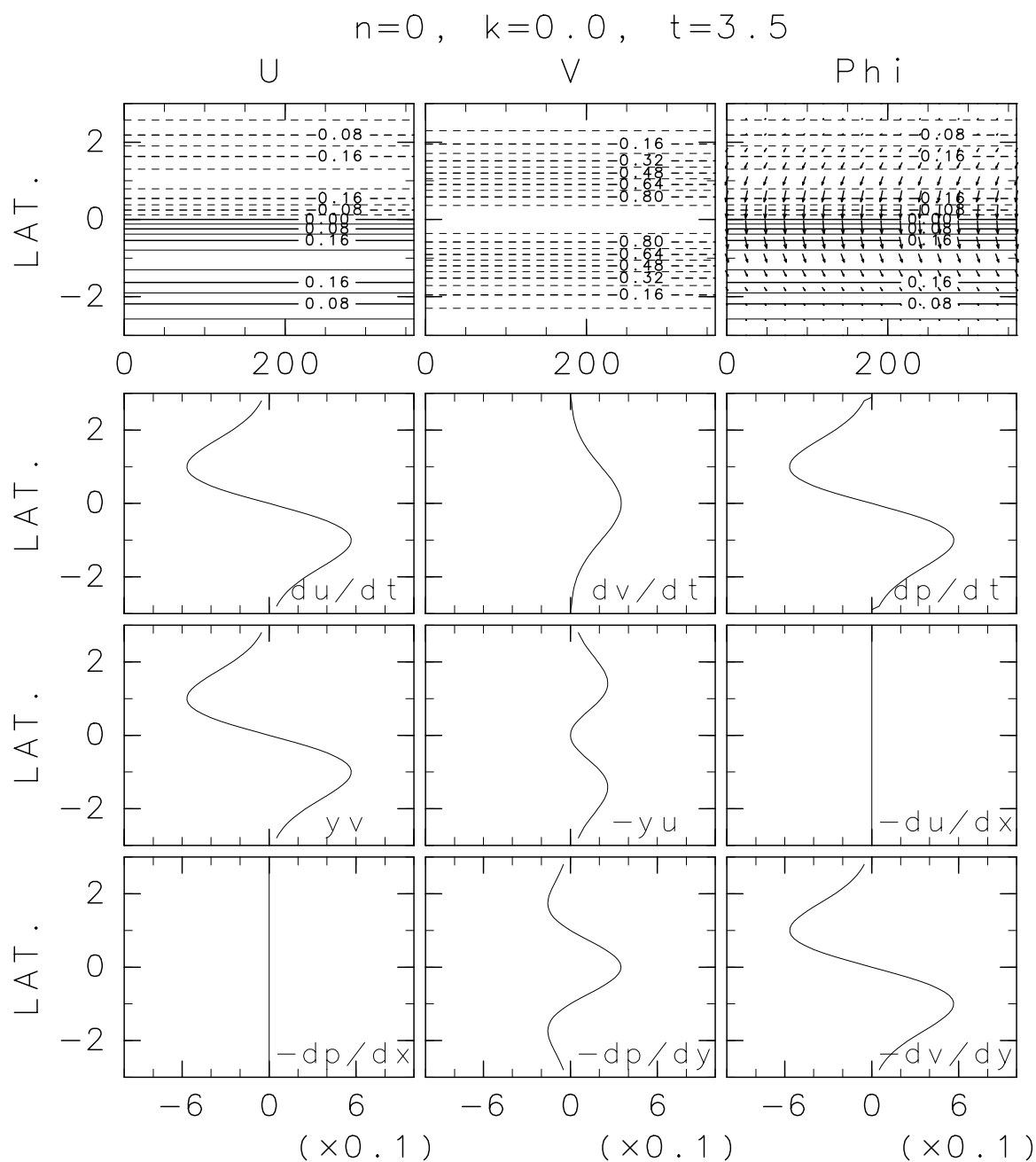


図 6.4: $n = 0, k = 0.0, t = 3.5$ の東進混合ロスビー重力波 (慣性振動) の場合の (1.2.22)~(1.2.24) の各項の水平分布. 下の 3×3 枚の図は振幅の緯度分布を示す.

u	v	Φ と風速場 (u, v)
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$
yv	$-yu$	$\frac{\partial u}{\partial x}$
$-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$-\frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$-\frac{\partial v}{\partial y}$

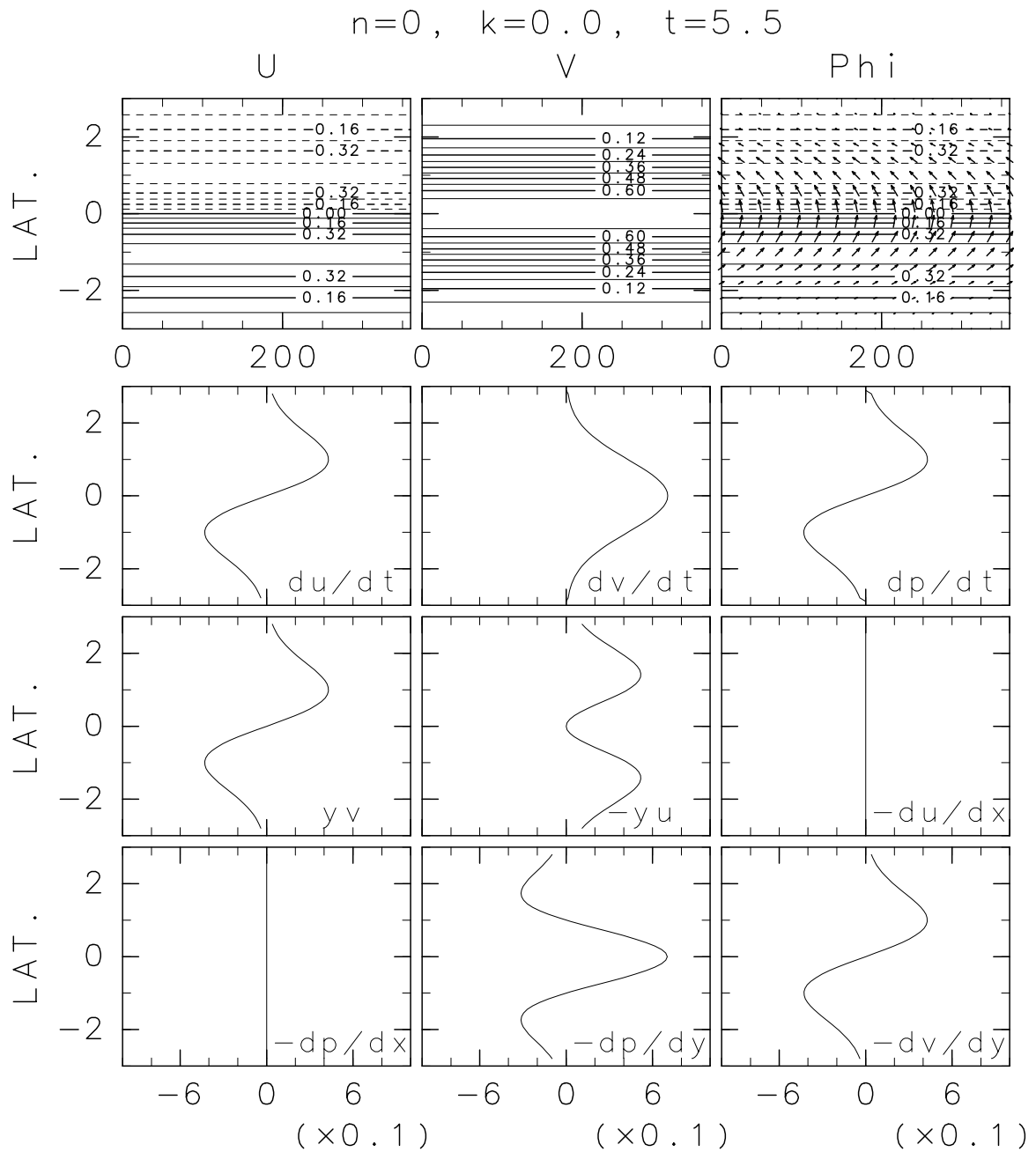


図 6.5: $n = 0, k = 0.0, t = 5.5$ の東進混合ロスビー重力波 (慣性振動) の場合の (1.2.22)~(1.2.24) の各項の水平分布. 下の 3×3 枚の図は振幅の緯度分布を示す.

u	v	Φ と風速場 (u, v)
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$
yv	$-yu$	$\frac{\partial u}{\partial x}$
$-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$-\frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$-\frac{\partial v}{\partial y}$

6.2 $n = 0, k \neq 0$ の東進混合ロスビー重力波

本節では, $n = 0, k \neq 0$ の東進混合ロスビー重力波の特徴をまとめる.

東進混合ロスビー重力波の伝搬メカニズム, 基本的な性質は, k の値に依らない. しかし, 慣性重力波の場合と同様, 運動方程式中で卓越する項は k の値により大きく変化する. 運動方程式の x 成分に於いてコリオリ力の項に対する圧力傾度力の項の大きさは, k が増大するにつれて大きくなり, $k = 0.7$ で同程度になる. そこで以下では, 低波数レジームの $k = 0.5$ のモードの構造と高波数レジームの $k = 1.4$ のモードの構造を示し議論する.

6.2.1 $0 < k \leq 0.7$ (低波数) の東進混合ロスビー波の特徴

低波数 ($k = 0.5$) の場合のモードの特徴を図 6.6, 6.7 に示す. このモードの振動数は, (6.0.1) より 1.28 となる.

以下では, 東進慣性重力波やロスビー波との相違について, 図 6.6, 6.7 から得られる特徴をまとめる.

● 速度ベクトル, ジオポテンシャルの分布と時間変化の様子

- はじめに, 速度ベクトルの分布と時間変化の様子について述べる. 速度ベクトルは, $n = 2$ の東進慣性重力波の場合と同様, 赤道反対称な分布をする³. 速度ベクトルが 0 となる緯度は存在せず, 東西風速だけが, 赤道上で 0 となる.
次に速度ベクトルの時間変化の様子について $\partial u/\partial t, \partial v/\partial t$ の分布を見ると, それぞれ東西風, 南北風の分布と比べて $1/4$ 波長進んでいることが分かる. このことから確かに速度ベクトルの位相は全体として東進していることが分かる.
速度ベクトル分布, 時間変化の様子は, 東進慣性重力波の $n = 2$ の場合 (例えば, 図 4.21) の赤道付近と良く似ており, 東進慣性重力波的な構造をしている.
- 次に, ジオポテンシャルの分布と時間変化の様子について述べる. ジオポテンシャルも, $n = 2$ の東進慣性重力波の場合と同様, 赤道反対称な分布をする. ジオポテンシャルは, 赤道上で 0 となる.

³ $n = 0, k \neq 0$ の場合, (2.4.67)~(2.4.69) より,

$$u(x, y, t) = -\frac{y}{\omega - k} e^{-(1/2)y^2} \sin(kx - \omega t), \quad (6.2.3)$$

$$v(x, y, t) = e^{-(1/2)y^2} \cos(kx - \omega t), \quad (6.2.4)$$

$$\phi(x, y, t) = -\frac{y}{\omega - k} e^{-(1/2)y^2} \sin(kx - \omega t). \quad (6.2.5)$$

となる.

次にジオポテンシャルの時間変化の様子について $\partial\Phi/\partial t$ の分布を見ると、ジオポテンシャルの分布と比べて $1/4$ 波長進んでいることが分かる。このことからジオポテンシャルの位相も全体として東進していることが分かる。

ジオポテンシャルの分布、時間変化の様子も、東進慣性重力波の $n = 2$ の場合 (例えば、図 4.21) の赤道付近と良く似ており、東進慣性重力波的な構造をしている。

● 速度ベクトル、ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズム

- 速度ベクトル、ジオポテンシャルの時間発展の大まかな特徴

速度ベクトル、ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズムは、 $n = 2$ の東進慣性重力波の特徴と同様に重力波的である。このため、高緯度域、赤道域という切り分けで議論することが出来る。以下で、この位相伝搬のメカニズムをまとめる。

- 速度ベクトル、ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズム

上述した様に、速度ベクトル、ジオポテンシャルの時間変化は、全体として重力波的な振る舞いをしている。以下では、図 6.6, 6.7 から得られる位相伝搬のメカニズムをまとめる。

- 運動方程式の各項の振る舞いから見た位相伝搬のメカニズム

ジオポテンシャルは、 $n = 2$ の東進慣性重力波の場合と同様に速度ベクトルの収束発散で位相伝搬する。そのメカニズムの詳細は、第 4.5 節 で述べた通りである。

速度ベクトルも、 $n = 2$ の東進慣性重力波の場合と同様に全領域で赤道付近 (緯度 ± 1.5 度) の圧力傾度力による加速、減速により位相伝搬している。そのメカニズムの詳細は、第 4.5 節 で述べた通りである。

- 渦度方程式の各項の振る舞いから見た位相伝搬のメカニズム

次に、図 6.7 の渦度方程式から見た位相伝搬のメカニズムをまとめる。図 6.7 を見ると、相対渦度の時間変化 ($\partial\zeta/\partial t$) は、赤道域では $-v$ 、高緯度域では $-y\text{div}(u, v)$ で決まっていることが分かる。つまり、先にまとめたロスビー波の場合と異なり、高緯度域で速度ベクトルの収束発散は無視することができない。赤道域では、速度ベクトルの収束発散が β 効果に比べて小さいので、ポテンシャル渦度として $f + \zeta$ が保存される。図 6.7 の、経度 350 度付近の赤道域に注目すると、この領域の南北流は南北半球共に南向きであるので、この南北流に伴う惑星渦度の減少 (β 効果) と釣合うように相対渦度が生成される。その結果、相対渦度が正の領域 (相対渦度が負の領域) が東に伝播していく。逆に高緯度域では、この β 効果は速度ベクトルの収束発散成分と比べて小さい。したがって、相対渦度の位相伝搬には速度ベクトルの収束発散の効果効いている。例えば、図 6.7 の、経度 350 度付近の高緯度域に注目すると、この領域の速度ベクトルは北半球で発散、南半球で収束していることが分かる。したがって、この速度ベクトルの収束発散により南北半球の高緯度域で負の相対渦度が生成される。その結果、相対渦度が負の領域は東に伝搬していく。

以上述べた渦度方程式の各項から見た位相伝搬のメカニズムは、 $n = 2$ の東進慣性重力波 (例えば, 図 6.17) の赤道付近の位相伝搬メカニズムと良く似ている. その違いは, 混合ロスビー重力波の場合 $-v$ の項 (β 効果) が緯度により符号を変えないのに対して, 東進混合ロスビー重力波では $-v$ の項が緯度により符号を変えることである.

以上のように, 東進混合ロスビー重力波は, 渦度方程式の各項の振る舞いから見ても, 全領域で重力波的な振る舞いをしていることが分かる.

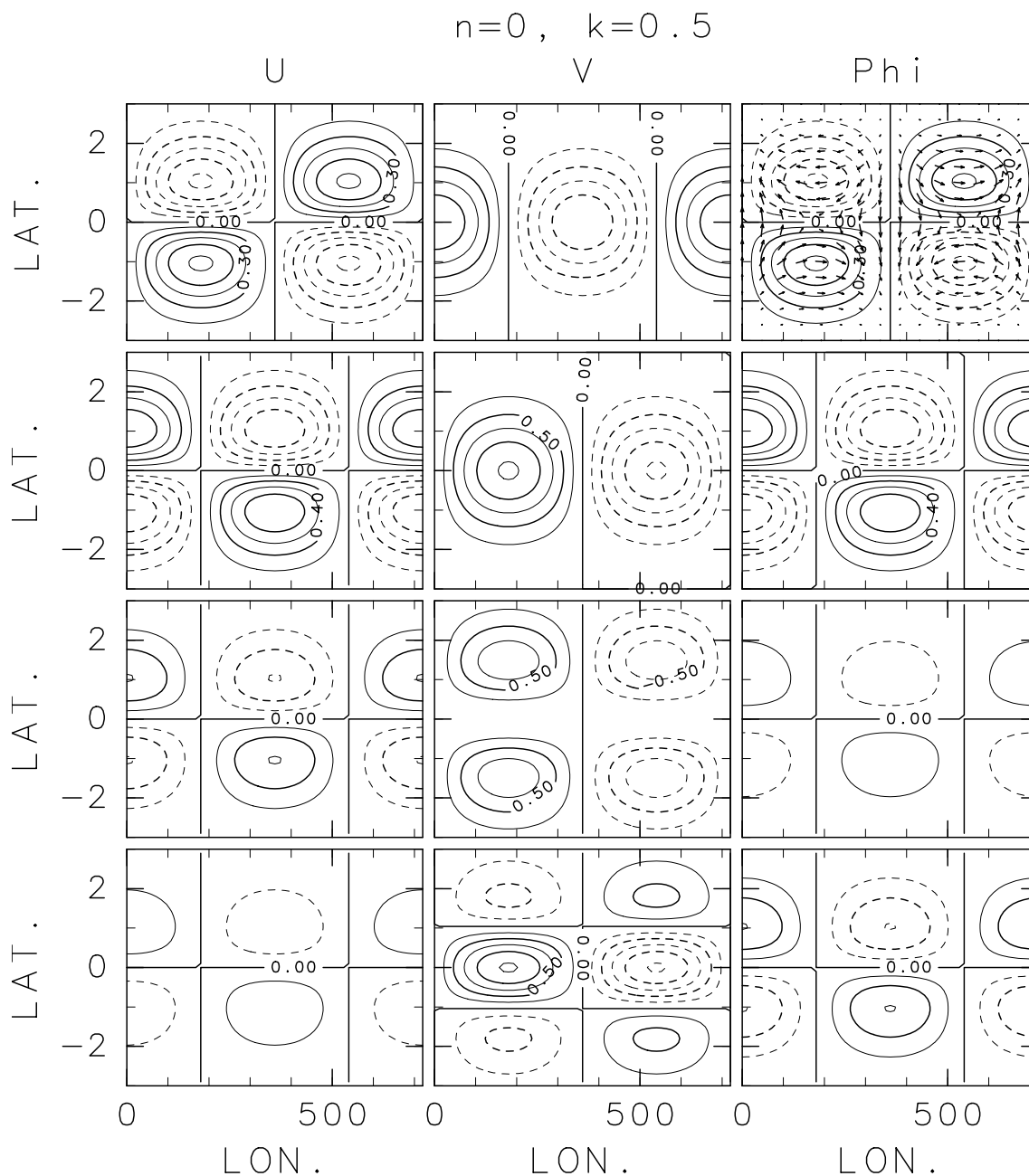


図 6.6: $n = 0, k = 0.5$ (低波数) の東進混合ロスビー重力波の (1.2.22)~(1.2.24) の各項の水平分布 ($t = 0, \omega = 1.28, c = 2.56$). 等値線間隔は, u, v, Φ の各々の列において下 3 枚が同じ.

u	v	Φ と風速場 (u, v)
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$
yv	$-yu$	$\frac{\partial u}{\partial x}$
$-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$-\frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$-\frac{\partial v}{\partial y}$

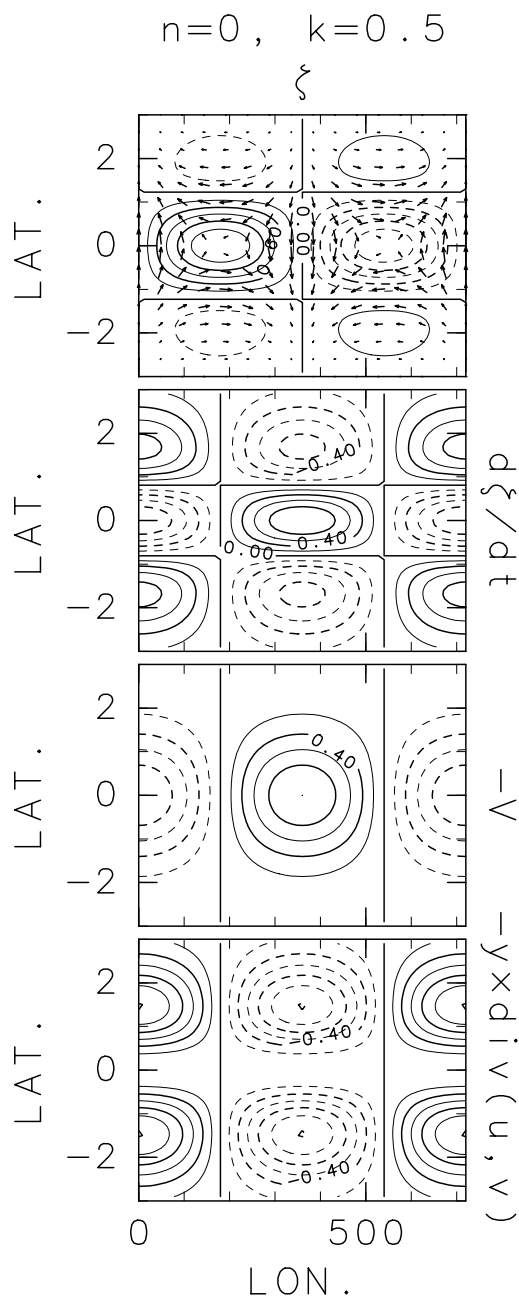


図 6.7: $n = 0, k = 0.5$ (低波数) の東進混合ロスビー重力波の相対渦度 ζ と $d\zeta/dt$, $d\zeta/dt$ を構成する各成分の水平分布 ($t = 0, \omega = 1.28, c = 2.56$). 等値線間隔は, 下 3 枚が同じ.

ζ
$\frac{\partial \zeta}{\partial t}$
$-v$
$-y \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$

6.2.2 $k > 0.7$ (高波数) の東進混合ロスビー波の特徴

高波数 ($k = 1.4$) の場合のモードの構造を図 6.8, 6.9 に示す. このモードの振動数は, (6.0.1) より 1.92 となる.

以下では, 低波数のモードとの相違について, 図 6.8, 6.9 の高波数のケースから得られる特徴をまとめる.

● 速度ベクトル, ジオポテンシャルの分布と時間変化の様子

速度ベクトル, ジオポテンシャルの分布, 時間変化の特徴 (図 6.8) は, 基本的に低波数の場合と変わらない.

● 速度ベクトル, ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズム

- 速度ベクトルの回転運動, 位相伝搬のメカニズムは基本的には低波数の場合と同様である. 高波数になるにつれて, 東西風の時間変化に寄与する東西の圧力傾度力の大きさがコリオリ力に対して相対的に大きくなる (図 6.8 参照). これにより, β 効果の効く領域は狭くなり, 広い領域で重力波的な位相伝搬が見られるようになる.
- ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズムも低波数の場合と同様である. 上述したように, 高波数になるにつれて東西の圧力傾度力が増す (図 6.8 参照) ので, 東西風の収束発散成分は南北風の収束発散成分よりも大きくなり, ジオポテンシャルの位相伝搬には, 東西風の収束発散成分が効くようになる.
- 渦度方程式 (図 6.9) で見ても, 位相伝搬のメカニズムは低波数の場合と同じである.

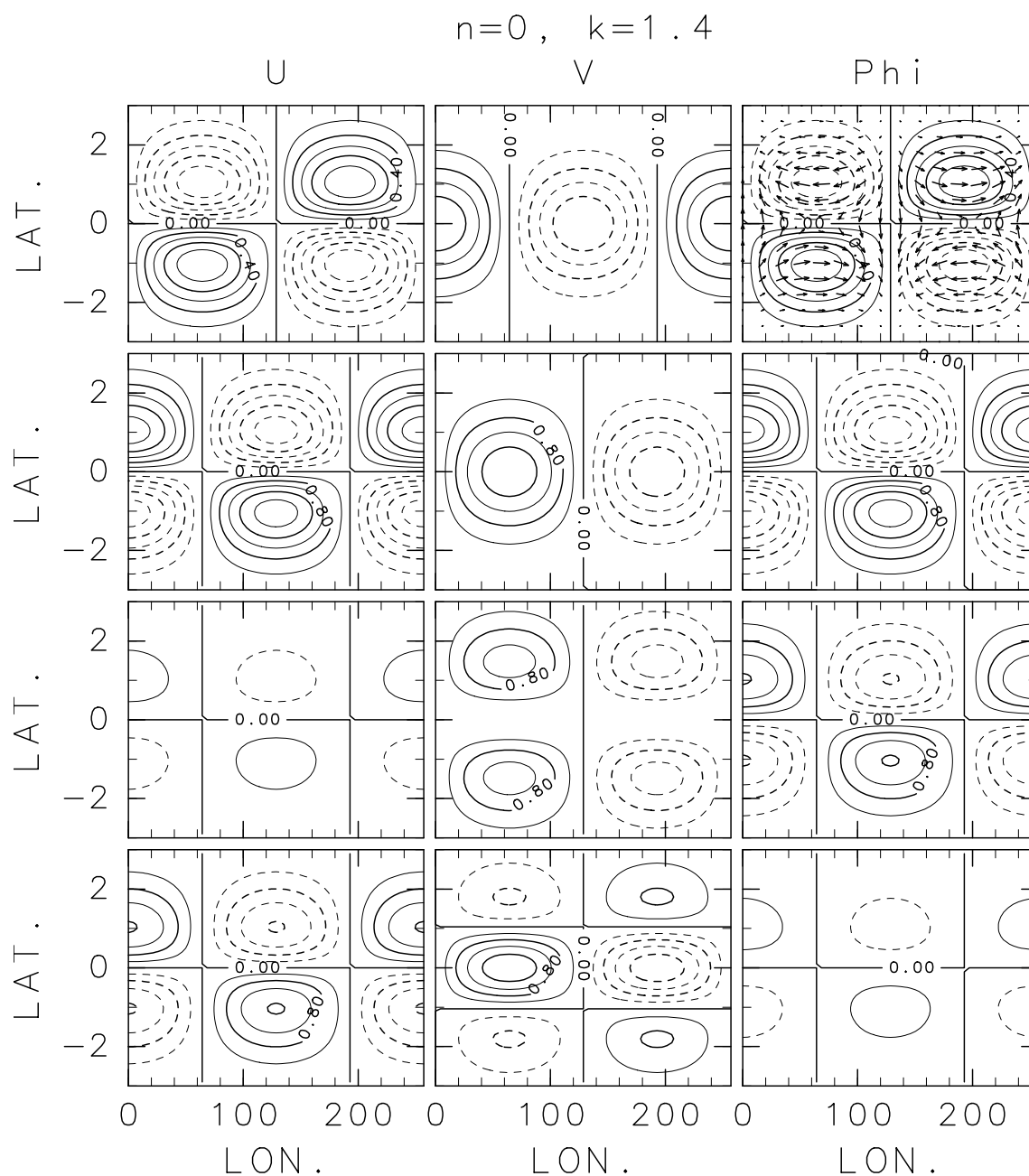


図 6.8: $n=0, k=1.4$ (高波数) の東進混合ロスビー重力波の (1.2.22)~(1.2.24) の各項の水平分布 ($t=0, \omega=1.92, c=1.37$). 等値線間隔は, u, v, Φ の各々の列において下 3 枚が同じ.

u	v	Φ と風速場 (u, v)
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$
yv	$-yu$	$\frac{\partial u}{\partial x}$
$-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$-\frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$-\frac{\partial v}{\partial y}$

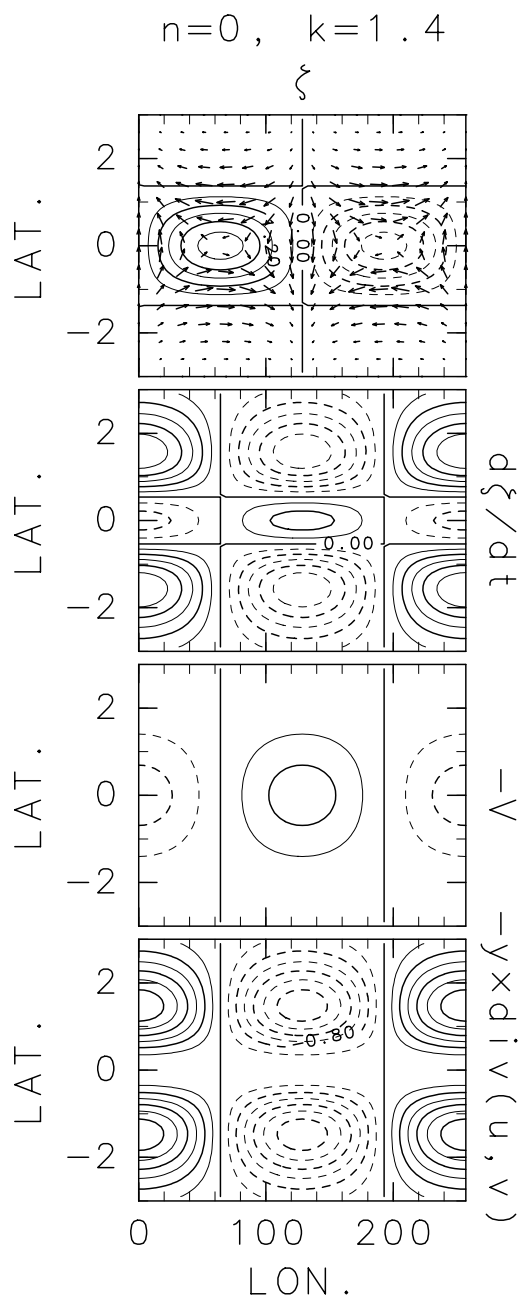


図 6.9: $n = 0, k = 1.4$ (高波数) の東進混合ロスビー重力波の相対渦度 ζ と $d\zeta/dt$, $d\zeta/dt$ を構成する各成分の水平分布 ($t = 0, \omega = 1.92, c = 1.37$). 等値線間隔は, 下 3 枚が同じ.

ζ
$\frac{\partial \zeta}{\partial t}$
$-v$
$-y \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$

6.3 $n = 0, k \neq 0$ の西進混合ロスビー重力波

次に西進する混合ロスビー重力波の伝播メカニズムを考察する。東進混合ロスビー重力波と同様に、西進混合ロスビー重力波でも運動方程式の各項の考察に加えて、渦度方程式の各項についても考察を行う。

西進混合ロスビー重力波の伝播メカニズム、基本的な性質は k の値に依らない。しかし、これまでと同様に、運動方程式の x 成分に於いてコリオリ力の項に対する圧力傾度力の項の大きさは、 k が増大するにつれて大きくなり $k = 2.5$ で同程度になる。そこで以下では、低波数レジームの $k = 0.6$ のモードの構造と、高波数レジームの $k = 3.0$ のモードの構造を示し議論する。

東進混合ロスビー重力波の構造、位相伝播が東進慣性重力波的であったのに対し、西進混合ロスビー重力波の構造、位相伝播のメカニズムは、基本的には赤道ロスビー波的である。この特徴は、赤道から離れる程強くなる。図 3.8 の分散曲線から想像されるように、西進混合ロスビー重力波は低波数から高波数へ遷移するにつれて、赤道ロスビー波的な特徴が強くなる。

6.3.1 $0 < k \leq 2.5$ (低波数) の西進混合ロスビー波の特徴

低波数 ($k = 0.6$) の場合のモードの構造を図 6.11, 6.12 に示す。このモードの振動数は、(4.0.1) より -0.46 となる⁴。

以下では、 $k = 0$ のモード、東進混合ロスビー重力波のモードとの相違について、図 6.11, 6.12 の低波数のケースから得られる特徴をまとめる。

● 速度ベクトル, ジオポテンシャルの分布と時間変化の様子

- はじめに、速度ベクトルの分布と時間変化の様子について述べる。速度ベクトルは、 $k = 0$ の場合と同様、赤道反対称な分布をする。東進混合ロスビー重力波の場合と同様、速度ベクトルが 0 となる緯度は存在せず、東西風速だけが、赤道上で 0 となる。図 6.11 や図 6.12 から分かるように、速度ベクトルの分布を見ると、赤道上を中心として渦を描く様な配置をしているのが特徴である。このため、赤道域では非地衝流的 (重力波的) な速度分布をしている⁵のに対して、高緯度域では地衝流的 (ロスビー波的) な速度分布をしている。この特徴は、 $n = 2$ の赤道ロ

⁴負の波数を導入した場合には $k = 0$ の場合 $\omega = 1$, $k = -0.6$ の場合 $\omega = 0.46$ となる。

⁵ただし、東西風とジオポテンシャルの位相関係を見ると、西進慣性重力波 (図 4.23 の $n = 2$ のケース) の場合には逆位相であるのに対して、西進混合ロスビー重力波は同位相である。ちなみに、赤道ロスビー波 (図 5.6 の $n = 2$ のケース) の場合、東西風とジオポテンシャルの位相関係は赤道域では同位相である。

スビー波 (図 5.6) の赤道域の特徴と同じである (西進慣性重力波の構造とは異なる).

次に速度ベクトルの時間変化の様子について $\partial u/\partial t, \partial v/\partial t$ の分布を見ると, それぞれ東西風, 南北風の分布と比べて $1/4$ 波長遅れていることが分かる. このことから確かに速度ベクトルの位相は全体として西進していることが分かる.

- 次に, ジオポテンシャルの分布と時間変化の様子について述べる. ジオポテンシャルも, $k = 0$ の場合と同様, 赤道反対称な分布をする. ジオポテンシャルも赤道上でのみ 0 となる.

次にジオポテンシャルの時間変化の様子について $\partial\Phi/\partial t$ の分布を見ると, ジオポテンシャルの分布と比べて $1/4$ 波長遅れていることが分かる. このことからジオポテンシャルの位相も全体として西進していることが分かる.

● 速度ベクトル, ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズム

- 速度ベクトル, ジオポテンシャルの時間発展の大きな特徴

速度ベクトル, ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズムは, 基本的には $n = 2$ の赤道ロスビー波の赤道域と同じである. そのため, 東進混合ロスビー重力波の場合と異なり, 高緯度域, 赤道域という切り分けで議論することが出来ない. 以下では, この詳細を述べながら, 位相伝搬のメカニズムをまとめる.

- 速度ベクトル, ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズム

上述した様に, 速度ベクトル, ジオポテンシャルの時間変化は, 全領域で赤道ロスビー波的な振る舞いをしている. 赤道ロスビー波の場合と同様に, 位相伝搬のメカニズムを見るためには渦度方程式 (図 6.12) を用いれば良い. 運動方程式 (図 6.11) を用いて解釈しないのは, 赤道ロスビー波の節 (第 5.2 節, 第 5.3 節) で述べたのと同様に速度ベクトルの位相伝搬が説明できないからである. そのため, 運動方程式から見た特徴は, ジオポテンシャルに限り述べておく.

- 渦度方程式の各項の振る舞いから見た位相伝搬のメカニズム

次に, 図 6.12 の渦度方程式から見た位相伝搬のメカニズムをまとめる. 相対渦度も, 基本的には赤道ロスビー波と同様に β 効果で位相伝搬する (第 5.2 節, 第 5.3 節). 赤道ロスビー波との違いは, $-v$ の符号が全領域で同符号となることである ($n = 2$ の赤道ロスビー波 (図 5.7) の $-v$ の符号は, 赤道域と高緯度域で異符号を取る).

以上の様に, 西進混合ロスビー重力波は, 東進混合ロスビー重力波の場合と異なり, 全領域でロスビー波的なメカニズムで位相伝搬している.

- 運動方程式の各項の振る舞いの特徴

上述したように, ロスビー波の場合と同様に運動方程式の各項からでは, 速度ベクトルの位相伝搬は説明できない. ここでは, ジオポテンシャルの特徴だけ見ておく.

ジオポテンシャルに関しては, $n = 2$ の赤道ロスビー波の場合と同様に, 速度ベクトルの収束発散で位相伝搬する (第 5.2 節, 第 5.3 節). その違いは, 赤

道ロスビー波が東西風と南北風の収束発散はほぼバランスしている (南北風の収束発散がわずかに卓越する) のに対して, 西進混合ロスビー重力波では, 東西風よりも南北風の収束発散の寄与が大きいことである (東西風と南北風の収束発散が逆符号であるという点は, 西進慣性重力波の高緯度側の特徴と同じである).

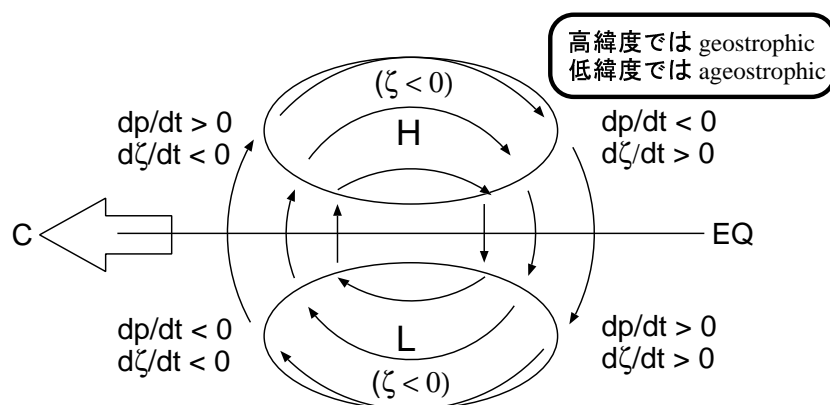


図 6.10: 西進する混合ロスビー重力波の伝播メカニズム.

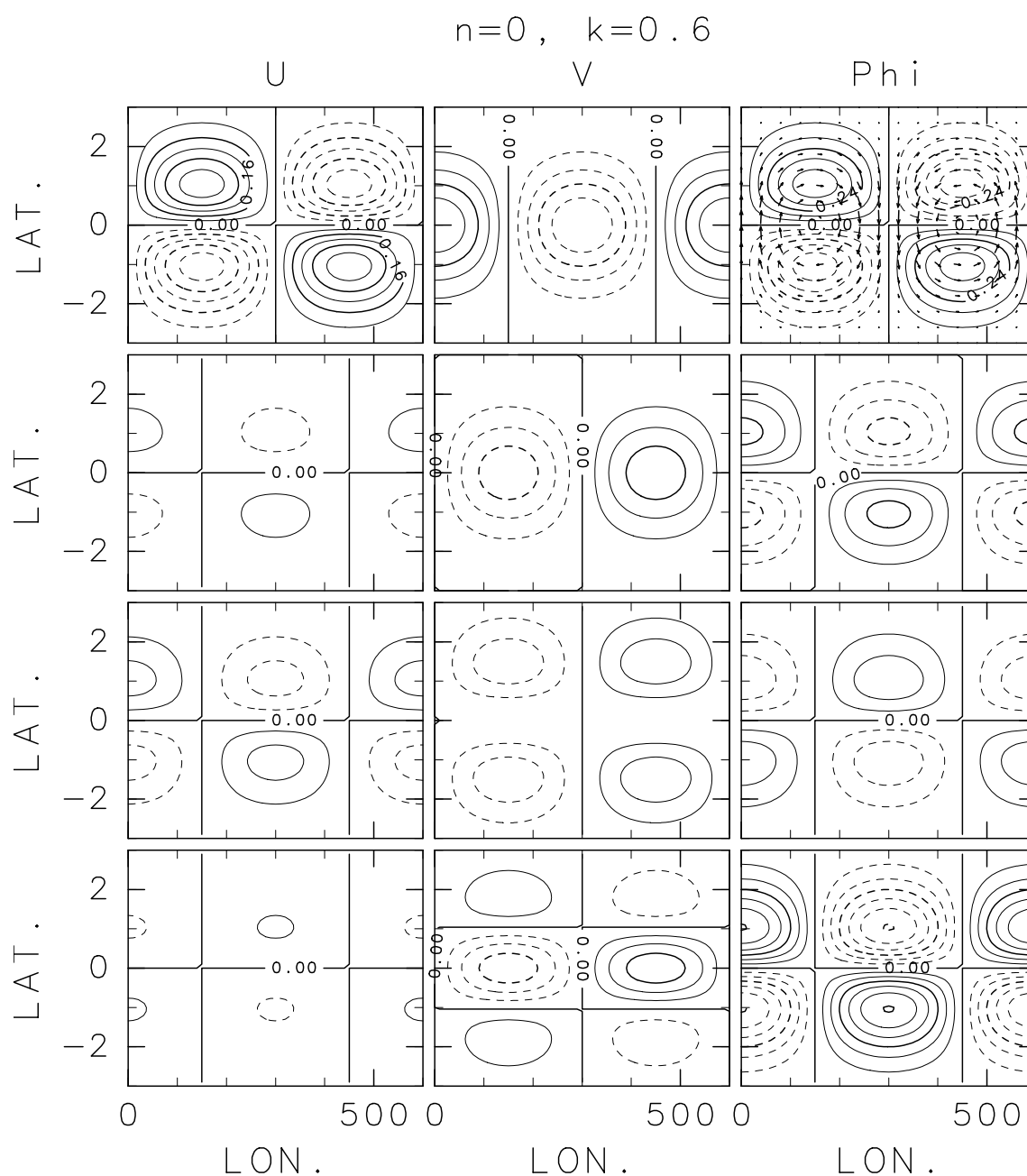


図 6.11: $n = 0, k = 0.6$ (低波数) の西進混合ロスビー重力波の (1.2.22)~(1.2.24) の各項の水平分布 ($t = 0, \omega = -0.46, c = -1.24$). 等値線間隔は, u, v, Φ の各列の下 3 枚が同じ.

u	v	Φ と風速場 (u, v)
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$
yv	$-yu$	$\frac{\partial u}{\partial x}$
$-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$-\frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$-\frac{\partial v}{\partial y}$

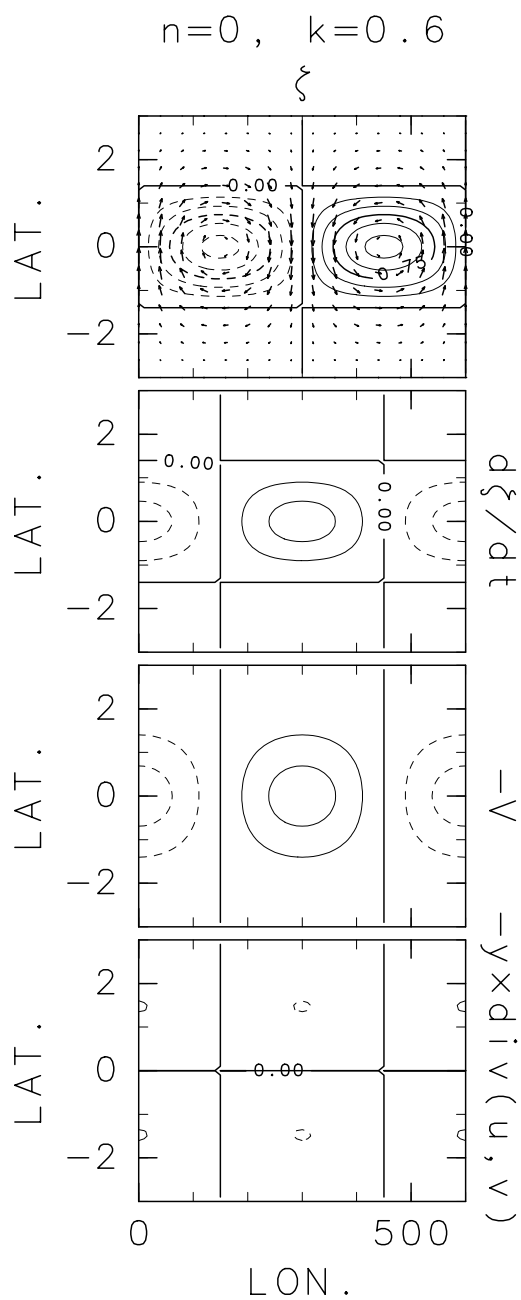


図 6.12: $n = 0, k = 0.6$ (低波数) の西進混合ロスビー重力波の相対渦度 ζ と $d\zeta/dt$, $d\zeta/dt$ を構成する各成分の水平分布 ($t = 0, \omega = -0.46, c = -1.24$). 等値線間隔は, 下 3 枚が同じ.

ζ
$\frac{\partial \zeta}{\partial t}$
$-v$
$-y \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$

6.3.2 $k > 2.5$ (高波数) の西進混合ロスビー波の特徴

高波数 ($k = 3.0$) の場合のモードの特徴を図 6.13, 6.14 に示す. このモードの振動数は, (6.0.1) より -0.30 となる.

以下では, 低波数のモードとの相違について, 図 6.13, 6.14 の高波数のケースから得られる特徴をまとめる.

● 速度ベクトル, ジオポテンシャルの分布と時間変化の様子

速度ベクトル, ジオポテンシャルの分布, 時間変化の特徴は, 基本的に低波数の場合と変わらない.

● 速度ベクトル, ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズム

- 速度ベクトルの回転運動, 位相伝搬のメカニズムは基本的には低波数の場合と同様である. 高波数になるにつれて, 東西風の時間変化に寄与する東西の圧力傾度力の大きさとコリオリ力がほぼバランスするようになる. これにより, 東西風の振幅は小さくなり, 東西方向はほぼ地衝流バランスした状態になる. また, 東西風の収束発散成分と南北風の収束発散成分もほぼキャンセルするようになるので, 低波数の場合よりも広い領域で β 効果で位相伝搬するようになる. このため, 高波数になるほど赤道ロスビー波な特徴が強くなる.
- ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズムも低波数の場合と同様である. 上述したように, 高波数になるにつれて東西の圧力傾度力が増すので, 東西風の収束発散成分は南北風の収束発散成分とキャンセルするようになり, ジオポテンシャルの位相伝搬は, 全領域でポテンシャル渦度の保存による β 効果で決まるようになる. このため, ジオポテンシャルの位相伝搬に於いても, 高波数になるほど赤道ロスビー波な特徴が強くなる.
- 渦度方程式 (図 6.14) で見ても, 位相伝搬のメカニズムは低波数の場合と同じである. 高波数になるほど相対渦度の位相伝搬に対する $-v$ の寄与が大きくなり, やはり赤道ロスビー波的な特徴が強くなる.

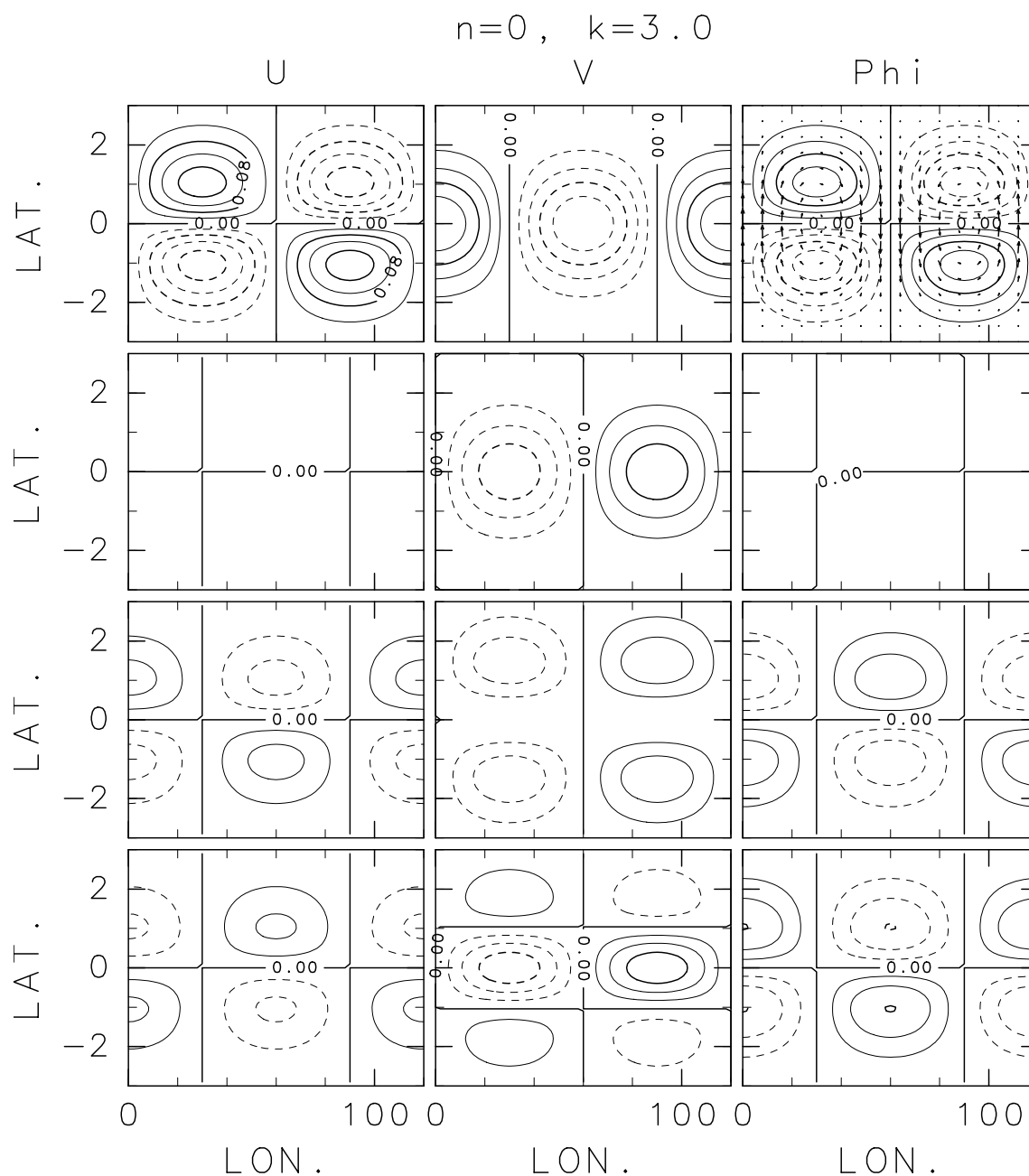


図 6.13: $n = 0, k = 3.0$ (高波数) の西進混合ロスビー重力波の (1.2.22)~(1.2.24) の各項の水平分布 ($t = 0, \omega = -0.30, c = -0.10$). 等値線間隔は, u, v, Φ の各列の下 3 枚が同じ.

u	v	Φ と風速場 (u, v)
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$
yv	$-yu$	$\frac{\partial u}{\partial x}$
$-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$-\frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$-\frac{\partial v}{\partial y}$

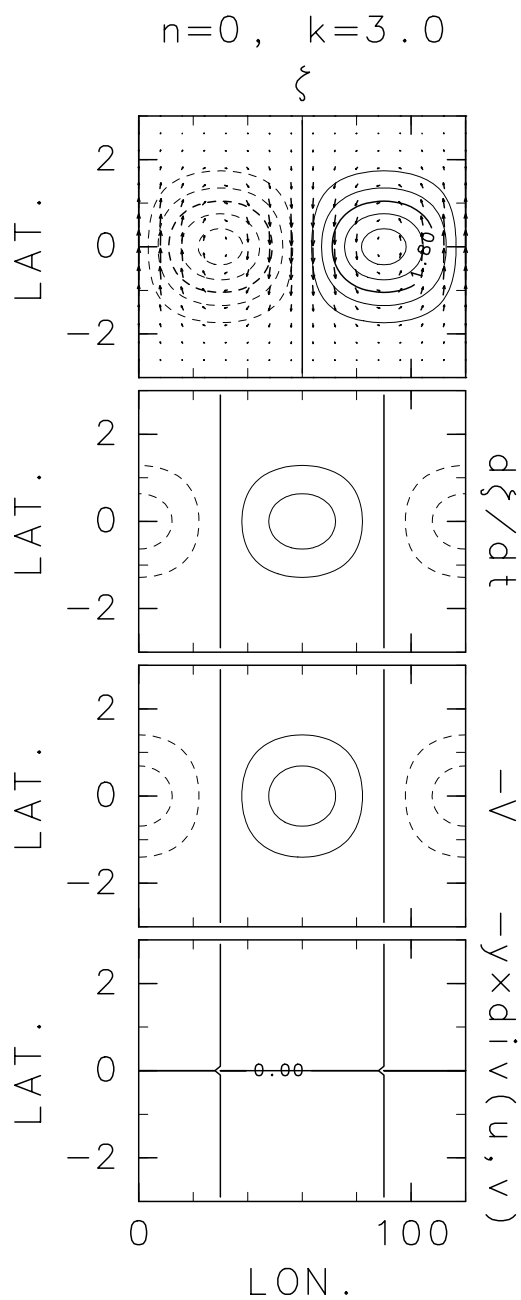


図 6.14: $n = 0, k = 3.0$ (高波数) の西進混合ロスビー重力波の相対渦度 ζ と $d\zeta/dt$, $d\zeta/dt$ を構成する各成分の水平分布 ($t = 0, \omega = -0.30, c = -0.10$). 等値線間隔は, 下 3 枚が同じ.

ζ
$\frac{\partial \zeta}{\partial t}$
$-v$
$-y \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$

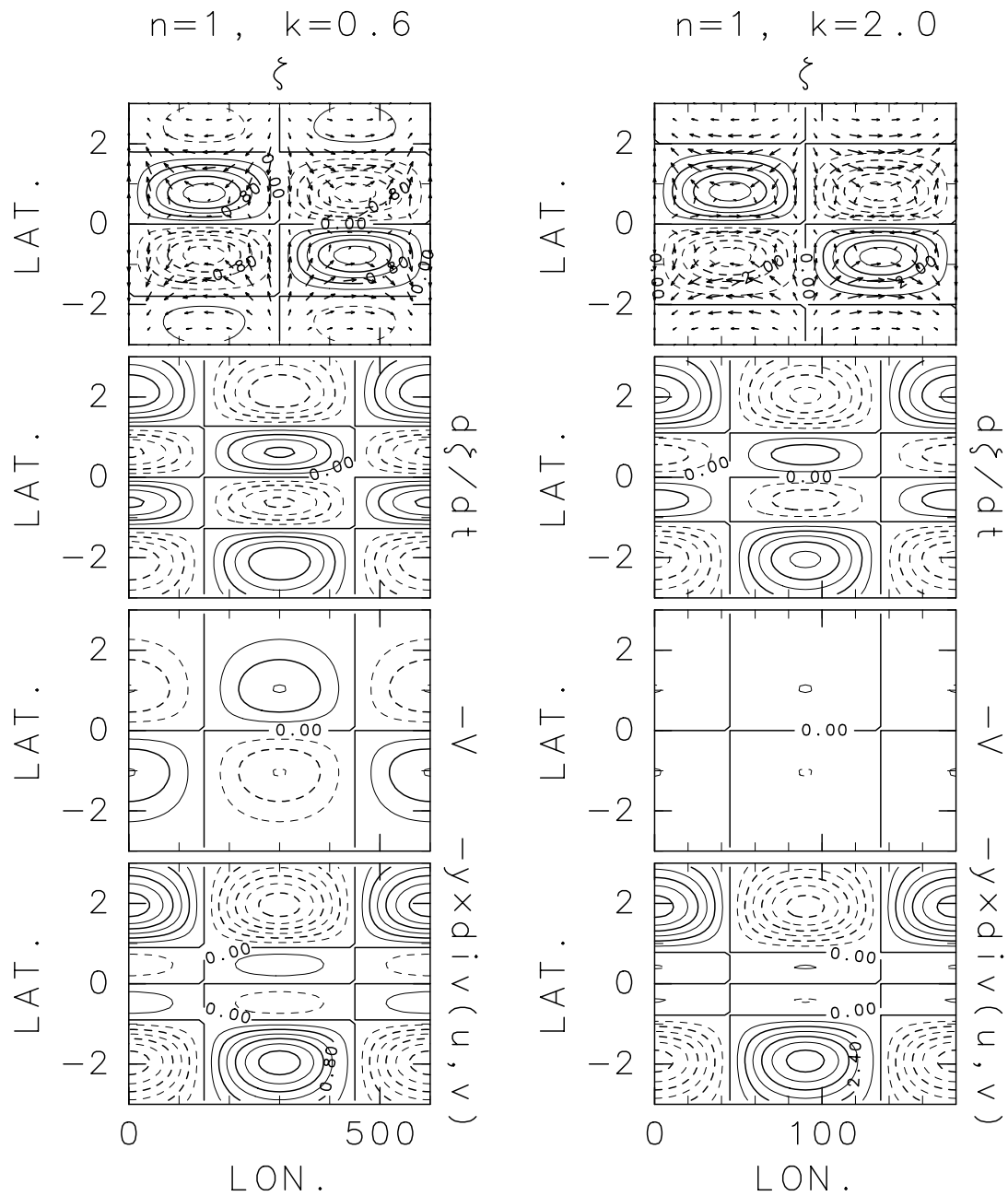


図 6.15: 参考図 1: $n = 1, k = 0.6$ (低波数)(左), $n = 1, k = 2.0$ (高波数)(右) の東進慣性重力波の相対渦度 ζ と $d\zeta/dt$, さらに $d\zeta/dt$ を構成する各々の成分の水平分布 (左: $t = 0, \omega = 1.83, c = 3.06$, 右: $t = 0, \omega = 2.65, c = 1.32$). 等値線間隔は, 下 3 枚が同じ.

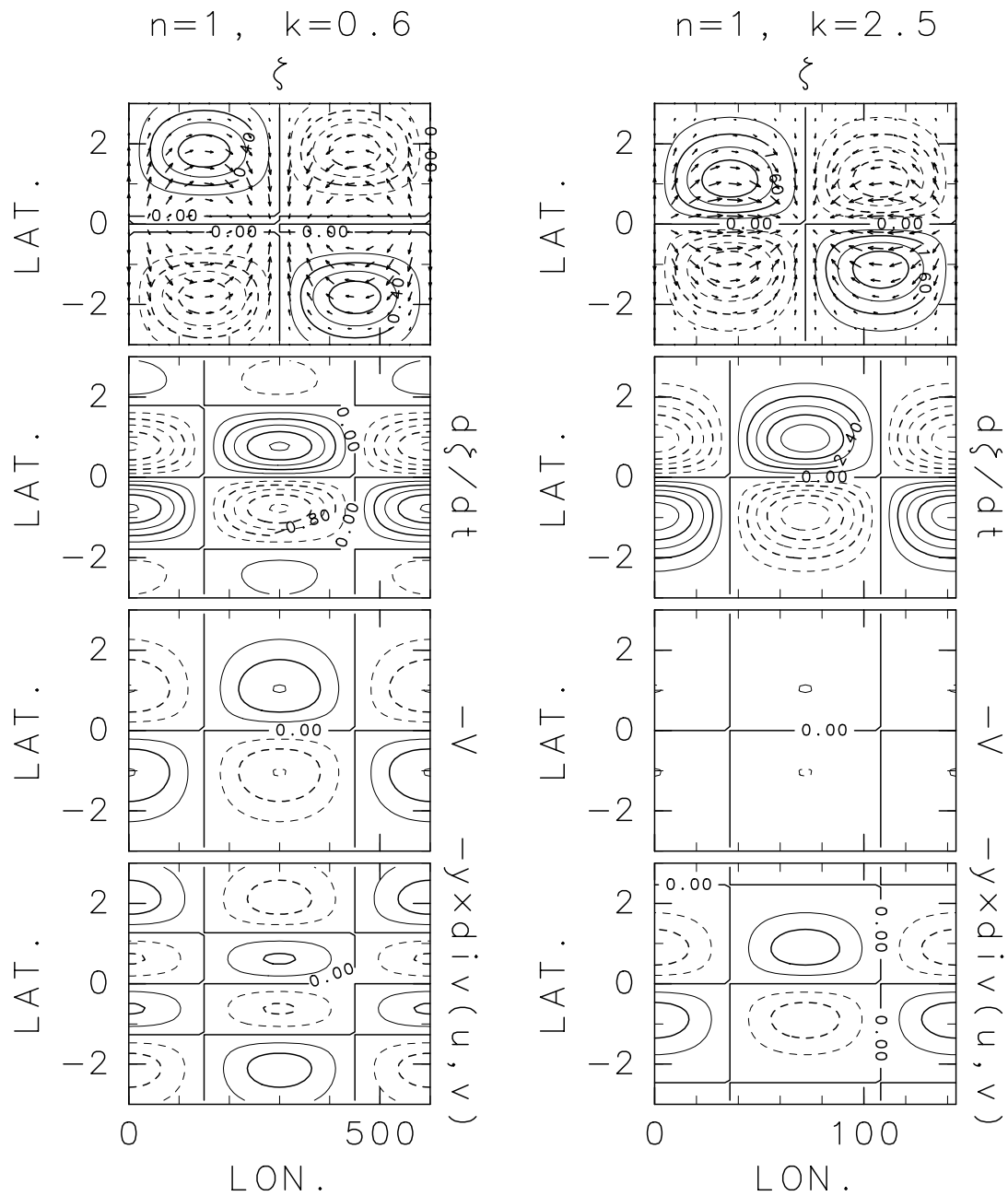


図 6.16: 参考図 2: $n = 1, k = 0.6$ (低波数)(左), $n = 1, k = 2.5$ (高波数)(右) の西進慣性重力波の相対渦度 ζ と $d\zeta/dt$, さらに $d\zeta/dt$ を構成する各々の成分の水平分布 (左: $t = 0, \omega = -1.83, c = -3.06$, 右: $t = 0, \omega = -3.04, c = -1.21$). 等値線間隔は, 下 3 枚が同じ.

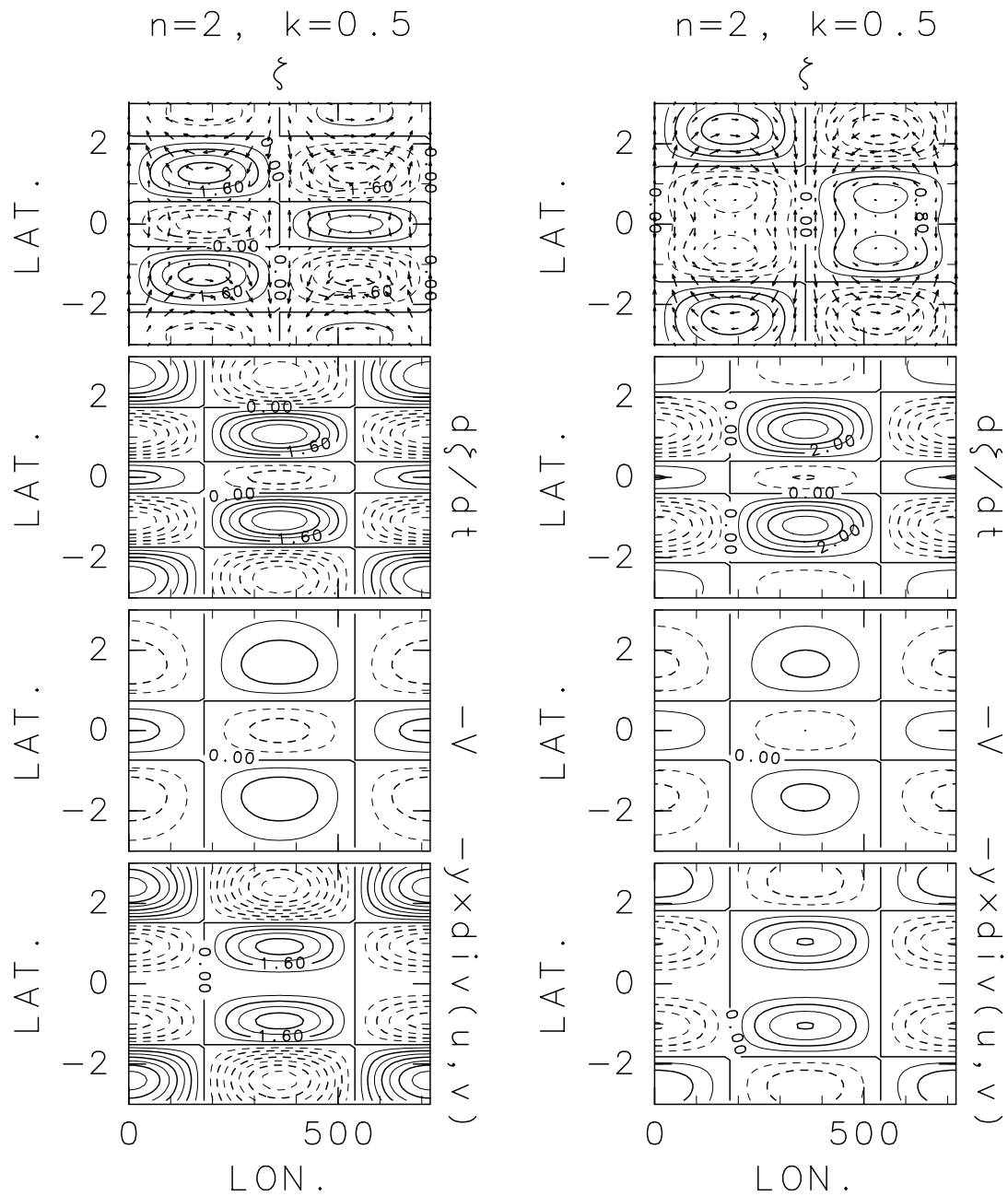


図 6.17: 参考図 3: $n = 2, k = 0.5$ (低波数, 東進)(左), $n = 2, k = 0.5$ (低波数, 西進)(右)の慣性重力波の相対渦度 ζ と $d\zeta/dt$, さらに $d\zeta/dt$ を構成する各々の成分の水平分布 (左: $t = 0, \omega = 2.29, c = 4.58$, 右: $t = 0, \omega = -2.29, c = -4.58$). 等値線間隔は, 下 3 枚が同じ.

第7章

赤道ケルビン波の水平伝播のメカニズム

第3章の結果よりケルビン波の振動数 ω , 位相速度 c をまとめると次のようになる:¹

$$\omega = k, \quad (7.0.1)$$

$$c = 1. \quad (7.0.2)$$

(7.0.2) より, ケルビン波は東進する.

慣性重力波やロスビー波, 混合ロスビー重力波の場合と違い, 低波数から高波数になっても, 構造に変化は見られない. したがって, 低波数, 高波数といった区別をせずに議論することにする.

ケルビン波のモードの特徴を図 7.1 に示す. この図から得られる特徴を以下にまとめる.

● 速度ベクトル, ジオポテンシャルの分布と時間変化の様子

(2.4.80)~(2.4.82) の構造から明らかなように, 速度ベクトル, ジオポテンシャルは共に, $k = 0$ のモードと同様, 赤道対称な分布をする. また, 南北流速は常に 0 である. 低波数から高波数にシフトしても速度ベクトル, ジオポテンシャルの分布に変化は見られ無い.

● 速度ベクトル, ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズム

¹有次元系で表記すると, ケルビン波の振動数, 位相速度は次の様になる:

$$\omega = k\sqrt{gH}$$

$$c = \sqrt{gH}$$

$\partial u/\partial t$, $\partial \Phi/\partial t$ の分布と東西風, ジオポテンシャルの分布を見比べると, このモードは全体として東進していることが分かる. その伝搬メカニズムは, 以下の様にして決まっている. 100 度付近の速度ベクトルの分布を見ると, 西側で西風領域, 東側で東風領域となるので, この経度帯は速度ベクトルの収束域となっている (図 7.1 の $-\partial u/\partial x$, $-\partial v/\partial y$ 成分参照). この収束により, 経度 100 度付近の赤道域では, $\partial \phi/\partial t$ は正の値を取るようになる (図 7.1 の $\partial \phi/\partial t$ 成分参照) ので, 図 7.1 のジオポテンシャルの位相は確かに東に伝播することが分かる. 他の経度帯でも同様に, ジオポテンシャルの位相伝搬は速度ベクトルの収束発散で決まっている. 次に, 経度 100 度付近のジオポテンシャルの分布を見る. すると, 西側で正の値, 東側で負の値を取るので, この領域の圧力傾度力 $-\partial \phi/\partial x$ は, 正の値を取る (図 7.1 の $-\partial \phi/\partial x$ 参照). したがって, この領域の東西風は西風加速を受けるので, 図 7.1 の東西風の位相も確かに東に伝播することが分かる. 他の経度帯でも同様に速度ベクトルの位相伝搬は, 圧力傾度力により決まっている. 速度ベクトルのうち, 南北風は常に 0 で時間変化しない. これは, 南北方向の科リオリ力と圧力傾度力がバランスしているからである. このように, 赤道ケルビン波は, 1 次元非回転系の重力波的なメカニズム (第 E.1 章) で伝搬している.

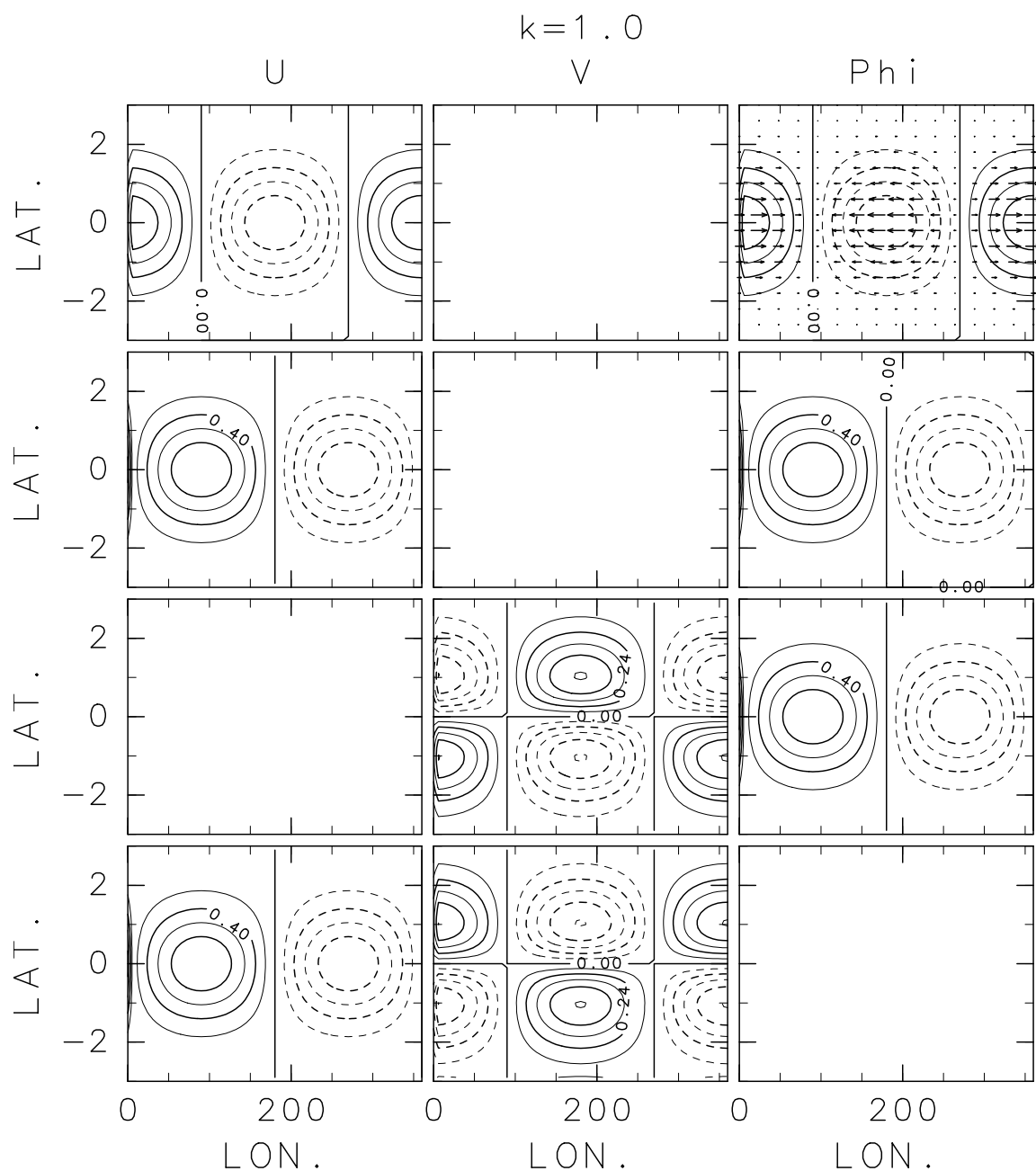


図 7.1: $n = -1, k = 1.0$ の赤道ケルビン波の (1.2.22)~(1.2.24) の各項の水平分布 ($t = 0, \omega = 1.0, c = 1.0$). 等値線間隔は, u, v, Φ の各々の列において下 3 枚が同じ.

u	v	Φ と風速場 (u, v)
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$
yv	$-yu$	$\frac{\partial u}{\partial x}$
$-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$-\frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$-\frac{\partial v}{\partial y}$

参考文献

- 1) Gill, A. E., 1982: Atmosphere-Ocean Dynamics, 662pp.
- 2) Kundu, P. K., 1990: Fluid Mechanics, 638pp.
- 3) Holton, J. R., 1992: An Introduction to Dynamic Meteorology, 511pp.
- 4) Matsuno, T., 1966: Quasi-Geostrophic Motions in the Equatorial Area. *J. Meteor. Soc. Japan*, **44**, 25-43.
- 5) Pedlosky, J., 1986: Geophysical Fluid Dynamics, 710pp.
- 6) Satomura, T., 1981: An Investigation of Shear Instability in a Shallow Water, *J. Meteor. Soc. Japan*, **59**, 148-166.
- 7) 小倉義光, 1994: 気象力学通論. 東京大学出版会, 249pp.
- 8) 小野寺 嘉孝, 1993: 物理のための応用数学. 裳華房, 225pp.
- 9) 九州大学大学院総合理工学府大気海洋環境システム学専攻編, 2001: 地球環境を学ぶための流体力学. 成山堂書店, 323pp.
- 10) 寺沢 寛一, 1992: 自然科学者のための数学概論. 岩波書店, 711pp.
- 11) 林 祥介, 1989: 赤道波. GFD ノート, 地球流体電脳倶楽部.
- 12) 原島 鮮, 1992: 初等量子力学. 裳華房, 323pp.

Appendix A

赤道波の固有値・固有関数 (有次元系)

本章では, 第2章で導出した無次元の固有値・固有関数に対応して, 有次元での赤道波の解をまとめる.

A.1 固有値問題の定式化

(2.1.1) を (1.1.2)~(1.1.4) に代入して以下を得る:

$$-i\omega\hat{u} - \beta y\hat{v} = -ik\hat{\Phi}, \quad (\text{A.1.1})$$

$$-i\omega\hat{v} + \beta y\hat{u} = -\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial y}, \quad (\text{A.1.2})$$

$$-i\omega\hat{\Phi} + gH \left(ik\hat{u} + \frac{\partial\hat{v}}{\partial y} \right) = 0. \quad (\text{A.1.3})$$

上式で $\beta = 1, \sqrt{gH} = 1$ としたものが, 無次元化した場合の結果である. さらに, 上式から \hat{v} だけの式を導出すると以下の様になる:

$$\frac{\partial^2\hat{v}}{\partial y^2} + \left[\left(\frac{\omega^2}{gH} - k^2 - \frac{k}{\omega}\beta \right) - \frac{\beta^2 y^2}{gH} \right] \hat{v} = 0. \quad (\text{A.1.4})$$

\hat{v} は, 上式と, 境界条件 (赤道に捕捉される条件),

$$v \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow \pm\infty),$$

を満たす k の関数として決められる. よって, この境界条件を用いると, (A.1.4) の固有値問題は以下の式を解くという問題に帰着される:

$$\frac{\sqrt{gH}}{\beta} \left(-\frac{k}{\omega}\beta - k^2 + \frac{\omega^2}{gH} \right) = 2n + 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (\text{A.1.5})$$

ゆえに,

$$\omega^3 - \{k^2 gH + \beta \sqrt{gH}(2n+1)\}\omega - kgH\beta = 0. \quad (\text{A.1.6})$$

A.2 固有値, 固有関数のまとめ

無次元系での方法と同様に固有値・固有関数の導出を行うと次の様になる. ここでは, 結果だけをまとめる.

A.2.1 $\hat{v} \neq 0$ の解

$n = 0$ の場合の分散関係と固有関数は以下の通りである.

$$\omega_i = \frac{1}{2} \left(k\sqrt{gH} \pm \sqrt{k^2 gH + 4\beta \sqrt{gH}} \right) \quad (i = 1, 2), \quad (\text{A.2.7})$$

$$\hat{u}(y) = \frac{i}{\omega_i - k} \frac{\beta}{\sqrt{gH}} y H_0 e^{-\frac{1}{2} \frac{\beta}{\sqrt{gH}} y^2}, \quad (\text{A.2.8})$$

$$\hat{v}(y) = H_0 e^{-\frac{1}{2} \frac{\beta}{\sqrt{gH}} y^2}, \quad (\text{A.2.9})$$

$$\hat{\Phi}(y) = \frac{i}{\omega_i - k} \frac{\beta}{\sqrt{gH}} y H_0 e^{-\frac{1}{2} \frac{\beta}{\sqrt{gH}} y^2}. \quad (\text{A.2.10})$$

$n \geq 1$ の場合の分散関係と固有関数は以下の通りである.

$$\omega_1 \simeq \frac{-k\beta}{k^2 + \frac{\beta}{\sqrt{gH}}(2n+1)}, \quad (\text{A.2.11})$$

$$\omega_2 \simeq -\sqrt{k^2 gH + \beta \sqrt{gH}(2n+1)}, \quad (\text{A.2.12})$$

$$\omega_3 \simeq \sqrt{k^2 gH + \beta \sqrt{gH}(2n+1)}, \quad (\text{A.2.13})$$

$$\hat{u}(y) = \frac{i}{\omega^2 - k^2} \left(\omega y H_n(y) \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\beta}{\sqrt{gH}} y^2\right) - k \left[\frac{dH_n(y)}{dy} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\beta}{\sqrt{gH}} y^2\right) - \frac{\beta}{\sqrt{gH}} y H_n(y) \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\beta}{\sqrt{gH}} y^2\right) \right] \right), \quad (\text{A.2.14})$$

$$\hat{v}(y) = H_n e^{-\frac{1}{2} \frac{\beta}{\sqrt{gH}} y^2}, \quad (\text{A.2.15})$$

$$\hat{\Phi}(y) = \frac{i}{\omega^2 - k^2} \left(k y H_n(y) \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\beta}{\sqrt{gH}} y^2\right) - \omega \left[\frac{dH_n(y)}{dy} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\beta}{\sqrt{gH}} y^2\right) - \frac{\beta}{\sqrt{gH}} y H_n(y) \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\beta}{\sqrt{gH}} y^2\right) \right] \right). \quad (\text{A.2.16})$$

A.2.2 $\hat{v} = 0$ の解

$v = 0$ の場合の解は以下の通りである.

$$\omega = k\sqrt{gH}, \quad (\text{A.2.17})$$

$$\hat{u}(y) = u_0 e^{-\frac{1}{2\sqrt{gH}}y^2}, \quad (\text{A.2.18})$$

$$\hat{v}(y) = 0, \quad (\text{A.2.19})$$

$$\hat{\Phi}(y) = u_0\sqrt{gH}e^{-\frac{1}{2\sqrt{gH}}y^2}. \quad (\text{A.2.20})$$

Appendix B

$n \geq 1$ の分散関係式の解

本章では, $n \geq 1$ の場合の分散関係式の厳密解と近似解を導出をまとめる. (2.2.30) より, 分散関係式は以下の様になる:

$$\omega_i^3 - \omega_i k^2 - k = \omega_i(2n + 1), \quad i = 1, 2, 3 \quad (n \geq -1) \quad (\text{B.0.1})$$

(B.0.1) は, 変数 n を含んだ一般的な 3 次方程式であり厳密解として固有値 ω は 3 つ存在する. 以下では, はじめに厳密解を導出したあと, ω の大小によってこれら 3 つの固有値を近似的に取り出す方法を示す.

B.1 $n \geq 1$ の場合の分散関係式の厳密解

本節では, (B.0.1) の厳密解を導出する. ここでは, $k = 0$ の場合と $k \neq 0$ の場合とに分けて考える. $k = 0$ の場合は簡単に解が求まるが, $k \neq 0$ の場合には解は簡単に求まらないので, カルダノ・タルタリアの解法を用いて (B.0.1) の厳密解を導出することにする.

(1) $k = 0$ の場合

(B.0.1) より,

$$\omega_i^3 = \omega_i(2n + 1), \quad i = 1, 2, 3 \quad (n \geq 1) \quad (\text{B.1.2})$$

$$\omega_i \{ \omega_i^2 - (2n + 1) \} = 0. \quad (\text{B.1.3})$$

ゆえに,

$$\omega = \begin{cases} \omega_1 = 0, \\ \omega_2 = -\sqrt{2n + 1}, \\ \omega_3 = \sqrt{2n + 1}. \end{cases} \quad (\text{B.1.4})$$

(2) $k \neq 0$ の場合

カルダノ・タルタリアの方法を用いて (B.0.1) の厳密解を導出する. (B.0.1)

$$\omega_i^3 - (k^2 + 2n + 1)\omega_i - k = 0. \quad i = 1, 2, 3 \quad (n \geq 1) \quad (\text{B.1.5})$$

において, $\omega = \alpha + \beta$ とおき, α と β を求めることにする.

ω^3 に $\omega = \alpha + \beta$ を代入すると, 次式を得る:

$$\omega^3 - 3\alpha\beta\omega - (\alpha^3 + \beta^3) = 0 \quad (\text{B.1.6})$$

(B.1.5) と (B.1.6) を比較して

$$3\alpha\beta = k^2 + 2n + 1.$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = k.$$

よって,

$$\begin{cases} \alpha^3\beta^3 = \frac{(k^2 + 2n + 1)^3}{27}, \\ \alpha^3 + \beta^3 = k. \end{cases}$$

これより α^3, β^3 は次の 2 次方程式の解である:

$$A^2 - kA + \frac{(k^2 + 2n + 1)^3}{27} = 0. \quad (\text{B.1.7})$$

この方程式の解は,

$$A = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - \frac{4}{27}(k^2 + 2n + 1)^3}}{2}.$$

ここで, 根号 $\sqrt{\quad}$ の中は,

$$k^2 - \frac{4}{27}(k^2 + 2n + 1)^3 = -\frac{4}{27}k^6 - \frac{12}{27}k^4(2n + 1) - \frac{4}{27}k^2 \underbrace{\left\{ (2n)^2 + 4n - \frac{5}{4} \right\}}_{n \geq 1 \text{ の場合必ず正の値}} - \frac{12}{27}(2n + 1)^3 < 0 \quad (\text{B.1.8})$$

となり, $n \geq 1$ の場合には必ず負となる. よって,

$$A = \frac{k \pm i\sqrt{\frac{4}{27}(k^2 + 2n + 1)^3 - k^2}}{2}. \quad (\text{B.1.9})$$

ここで,

$$A = ae^{\pm i\theta}, \quad (\text{B.1.10})$$

とおく. ただし, a は正の実数である. すると,

$$\alpha^3 = ae^{i\theta},$$

$$\beta^3 = ae^{-i\theta}.$$

となり, それぞれ 3 乗根をとると

$$\alpha = a^{\frac{1}{3}}e^{\frac{1}{3}i\theta}, \quad \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}a^{\frac{1}{3}}e^{\frac{1}{3}i\theta}, \quad (\text{B.1.11})$$

$$\beta = a^{\frac{1}{3}}e^{-\frac{1}{3}i\theta}, \quad \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}a^{\frac{1}{3}}e^{-\frac{1}{3}i\theta}. \quad (\text{B.1.12})$$

となる¹. α^3, β^3 の 3 乗根をそれぞれ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ と書くことにすると, α^3, β^3 の 3 乗根は以下のようになる:

$$\alpha_1 = a^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{\theta}{3} + i \sin \frac{\theta}{3} \right), \quad (\text{B.1.13})$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= a^{\frac{1}{3}} \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \left(\cos \frac{\theta}{3} + i \sin \frac{\theta}{3} \right), \\ &= \frac{a^{\frac{1}{3}}}{2} \left\{ -\cos \frac{\theta}{3} - \sqrt{3} \sin \frac{\theta}{3} + i \left(-\sin \frac{\theta}{3} + \sqrt{3} \cos \frac{\theta}{3} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.1.14})$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= a^{\frac{1}{3}} \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \left(\cos \frac{\theta}{3} + i \sin \frac{\theta}{3} \right) \\ &= \frac{a^{\frac{1}{3}}}{2} \left\{ -\cos \frac{\theta}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{\theta}{3} + i \left(-\sin \frac{\theta}{3} - \sqrt{3} \cos \frac{\theta}{3} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.1.15})$$

$$\beta_1 = a^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{\theta}{3} - i \sin \frac{\theta}{3} \right), \quad (\text{B.1.16})$$

$$\begin{aligned} \beta_2 &= a^{\frac{1}{3}} \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \left(\cos \frac{\theta}{3} - i \sin \frac{\theta}{3} \right), \\ &= \frac{a^{\frac{1}{3}}}{2} \left\{ -\cos \frac{\theta}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{\theta}{3} + i \left(\sin \frac{\theta}{3} + \sqrt{3} \cos \frac{\theta}{3} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.1.17})$$

$$\begin{aligned} \beta_3 &= a^{\frac{1}{3}} \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \left(\cos \frac{\theta}{3} - i \sin \frac{\theta}{3} \right), \\ &= \frac{a^{\frac{1}{3}}}{2} \left\{ -\cos \frac{\theta}{3} - \sqrt{3} \sin \frac{\theta}{3} + i \left(\sin \frac{\theta}{3} - \sqrt{3} \cos \frac{\theta}{3} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.1.18})$$

¹一般に

$$x^3 - \gamma = (x - \gamma^{1/3})(x^2 + \gamma^{1/3}x + \gamma^{2/3}) = 0, \quad \text{よ} \quad x = \gamma^{1/3}, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\gamma^{1/3}$$

となる. $\omega = \alpha + \beta$ であるから, $\alpha + \beta$ が実数となる組合せ² $\alpha_1 + \beta_1 = \omega_1$, $\alpha_2 + \beta_2 = \omega_2$, $\alpha_3 + \beta_3 = \omega_3$ を求めると次の厳密解が得られる:

$$\omega = \begin{cases} \omega_1 = \alpha_1 + \beta_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} a^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}i\theta} + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} a^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{1}{3}i\theta} \\ \quad = a^{\frac{1}{3}} \left(-\cos \frac{\theta}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{\theta}{3} \right), \\ \omega_2 = \alpha_2 + \beta_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} a^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}i\theta} + \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} a^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{1}{3}i\theta} \\ \quad = a^{\frac{1}{3}} \left(-\cos \frac{\theta}{3} - \sqrt{3} \sin \frac{\theta}{3} \right), \\ \omega_3 = \alpha_3 + \beta_3 = a^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}i\theta} + a^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{1}{3}i\theta} \\ \quad = 2a^{\frac{1}{3}} \cos \frac{\theta}{3}. \end{cases} \quad (\text{B.1.19})$$

ただし, $a^{1/3}, \theta/3$ は次式を満たす:

$$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}(k^2 + 2n + 1)}, \quad (\text{B.1.20})$$

$$\frac{\theta}{3} = \frac{1}{3} \left(\tan^{-1} \frac{\sqrt{\frac{4}{27}(k^2 + 2n + 1)^3 - k^2}}{k} \right), \quad (\text{B.1.21})$$

この (B.1.20), (B.1.21) は, それぞれ以下のようにして導かれる. (B.1.10) より

$$a \cos \theta = \frac{k}{2}, \quad (\text{B.1.22})$$

$$a \sin \theta = \frac{\sqrt{\frac{4}{27}(k^2 + 2n + 1)^3 - k^2}}{2}. \quad (\text{B.1.23})$$

上の式から $a \cos \theta \geq 0$, $a \sin \theta \geq 0$ であることが分かるので,

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (\text{B.1.24})$$

である. よって (B.1.22), (B.1.23) より,

$$a^2 = \left(\frac{k}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{4}{27}(k^2 + 2n + 1)^3 - k^2 \right) = \frac{1}{27}(k^2 + 2n + 1)^3, \quad (\text{B.1.25})$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{\frac{4}{27}(k^2 + 2n + 1)^3 - k^2}}{k}. \quad (\text{B.1.26})$$

ゆえに,

$$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}(k^2 + 2n + 1)}, \quad (\text{B.1.27})$$

$$\frac{\theta}{3} = \frac{1}{3} \left(\tan^{-1} \frac{\sqrt{\frac{4}{27}(k^2 + 2n + 1)^3 - k^2}}{k} \right), \quad (\text{B.1.28})$$

となるからである. この $a^{1/3}$ と $\theta/3$ を (B.1.19) に代入すれば良い.

²固有モード (中立波) を求めるのだから, 固有値の虚部は 0 である.

上記の (1) $k = 0$, (2) $k \neq 0$ の結果をまとめると $n \geq 1$ の厳密解は次の様になる:

$$\omega = \begin{cases} k = 0 \text{ の場合:} & \begin{cases} \omega_1 = 0, \\ \omega_2 = -\sqrt{2n+1}, \\ \omega_3 = \sqrt{2n+1}. \end{cases} \\ k \neq 0 \text{ の場合:} & \begin{cases} \omega_1 = a^{\frac{1}{3}} \left(-\cos \frac{\theta}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{\theta}{3} \right), \\ \omega_2 = a^{\frac{1}{3}} \left(-\cos \frac{\theta}{3} - \sqrt{3} \sin \frac{\theta}{3} \right), \\ \omega_3 = 2a^{\frac{1}{3}} \cos \frac{\theta}{3}. \end{cases} \end{cases} \quad (\text{B.1.29})$$

ここで, $a^{\frac{1}{3}}$ は (B.1.20) 式, $\frac{\theta}{3}$ は (B.1.21) 式で与えられる. 以上, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ を図示すると図 3.1 の様になる ($n \geq 1$ の分散曲線).

ここで, (B.1.29) 式に於いて $k = 0$ の場合の振動数が $k \neq 0$ 場合の振動数と接続していることを確認しておく. (B.1.21) 式より,

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{3} &= \frac{1}{3} \left(\tan^{-1} \frac{\sqrt{\frac{4}{27}(k^2 + 2n + 1)^3 - k^2}}{k} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\tan^{-1} \sqrt{\frac{\frac{4}{27}\{k^6 + 3k^4(2n + 1) + 3k^2(2n + 1)^2 + (2n + 1)^3\} - k^2}{k^2}} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\tan^{-1} \sqrt{\frac{4}{27} \left\{ k^4 + 3k^2(2n + 1) + 3(2n + 1)^2 + \frac{(2n + 1)^3}{k^2} \right\} - 1} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.1.30})$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\theta}{3} &= \frac{1}{3} \left(\tan^{-1}(+\infty) \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{6}. \end{aligned} \quad (\text{B.1.31})$$

一方, (B.1.20) より

$$\lim_{k \rightarrow 0} a^{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2n+1}{3}}. \quad (\text{B.1.32})$$

よって、 $k \neq 0$ の場合の振動数 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ の $k \rightarrow 0$ の極限は (B.1.31), (B.1.32) を用いると、以下の様になる:

$$\lim_{k \rightarrow 0} (k \neq 0 \text{ の場合の } \omega) = \begin{cases} \lim_{k \rightarrow 0} \omega_1 = \sqrt{\frac{2n+1}{3}} \left(-\cos \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{\frac{2n+1}{3}} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0, \\ \lim_{k \rightarrow 0} \omega_2 = \sqrt{\frac{2n+1}{3}} \left(-\cos \frac{\pi}{6} - \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{\frac{2n+1}{3}} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\sqrt{2n+1}, \\ \lim_{k \rightarrow 0} \omega_3 = 2\sqrt{\frac{2n+1}{3}} \cos \frac{\pi}{6} = 2\sqrt{\frac{2n+1}{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{2n+1}. \end{cases} \quad (\text{B.1.33})$$

ゆえに、 $k \neq 0$ の場合の振動数 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ の $k \rightarrow 0$ の極限は $k = 0$ の場合の振動数 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ にそれぞれ一致することが分かる。したがって、 $k \neq 0$ の式には $k = 0$ の解も含まれる。よって以下では、 $k \neq 0$ の場合の解を $n \geq 1$ の場合の厳密解と書くことにする。

B.2 $n \geq 1$ の場合の分散関係式の近似解

(B.1.29) を見て明らかのように、この分散関係式は大変複雑な形をしている。これに対し、振動数の大小によって見たい波動の分散関係式を物理的に矛盾なく取り出す方法がこれまで提出されてきた (例えば, Matsuno, 1966)。以下では、はじめに Matsuno (1966) の方法を簡単にレビューし、そのあと本ノートで導出した厳密解から近似解を導く方法を示す。

B.2.1 Matsuno (1966) の方法

1) 大きな ω (高周波の波動) を取り出す

(B.0.1) の左辺第三項が無視できて、 $\omega \simeq \pm \sqrt{k^2 + 2n + 1}$ (慣性重力波の分散関係式) を得る。

$$\omega_i^3 - \omega_i k^2 \underbrace{-k}_{\text{無視}} = \omega_i (2n + 1)$$

2) 小さな ω (低周波の波動) を取り出す

(B.0.1) の左辺第一項が無視できて、 $\omega \simeq -k / (k^2 + 2n + 1)$ (赤道ロスビー波の分散関係式) を得る。

$$\underbrace{\omega_i^3}_{\text{無視}} - \omega_i k^2 - k = \omega_i (2n + 1)$$

B.2.2 厳密解から近似解を導く方法

これまで Matsuno(1966) 等で行われてきた上記の近似は, 本ノートでは $\tan \theta \rightarrow \infty$ の場合に対応している. 以下では, この $\tan \theta \rightarrow \infty$ の場合を考えることにより, 分散関係式を近似的に導出する方法をまとめる.

前節の定義に基づき (B.1.29) の厳密解を再掲すると次のようになる:

$$\omega = \begin{cases} \omega_1 = a^{\frac{1}{3}} \left(-\cos \frac{\theta}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{\theta}{3} \right), & (\text{ロスビー波}) \\ \omega_2 = a^{\frac{1}{3}} \left(-\cos \frac{\theta}{3} - \sqrt{3} \sin \frac{\theta}{3} \right), & (\text{西進慣性重力波}) \\ \omega_3 = 2a^{\frac{1}{3}} \cos \frac{\theta}{3}. & (\text{東進慣性重力波}) \end{cases} \quad (\text{B.2.34})$$

上式に於いて $\tan \theta \rightarrow \infty$ の場合を考える. このとき, $\theta \rightarrow \pi/2$ となるから, θ が $\pi/2$ の近傍 ($\pi/2 - \delta$, $\delta \ll 1$) をとる場合を考える. $\cos \theta, \sin \theta$ の $\pi/2$ 近傍での振る舞いは次のようになる ($\pi/2$ のまわりで 1 次の項までテイラー展開を施す):

$$\cos \theta = \cos \frac{\pi}{2} + \frac{1}{1!} \left(-\sin \frac{\pi}{2} \right) \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) + \dots \simeq \frac{\pi}{2} - \theta, \quad (\text{B.2.35})$$

$$\sin \theta = \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{1!} \left(\cos \frac{\pi}{2} \right) \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) + \dots \simeq 1 \quad (\text{B.2.36})$$

これより, (B.2.35) から次の関係を得る:

$$\theta \simeq \frac{\pi}{2} - \cos \theta \quad (\text{B.2.37})$$

一方, $\cos(\theta/3), \sin(\theta/3)$ の $\pi/2$ 近傍での振る舞いは次のようになる:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\theta}{3} &= \cos \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{1!} \left(-\frac{1}{3} \sin \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) + \dots \\ &\simeq \cos \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \sin \frac{\pi}{6} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \\ &\simeq \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.2.38})$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{\theta}{3} &= \sin \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{1!} \left(\frac{1}{3} \cos \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) + \dots \\ &\simeq \sin \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} \cos \frac{\pi}{6} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \\ &\simeq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.2.39})$$

これより, (B.2.37) を用いて (B.2.38), (B.2.39) を $\cos \theta$ を用いて表すと次のようになる:

$$\cos \frac{\theta}{3} \simeq \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} &\simeq \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{2} - \cos \theta - \frac{\pi}{2} \right) \\ &\simeq \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{6} \cos \theta, \end{aligned} \quad (\text{B.2.40})$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{\theta}{3} &\simeq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \\ &\simeq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \left(\frac{\pi}{2} - \cos \theta - \frac{\pi}{2} \right) \\ &\simeq \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \cos \theta. \end{aligned} \quad (\text{B.2.41})$$

ここで, (B.1.22) より,

$$\cos \theta = \frac{k}{2a}, \quad (\text{B.2.42})$$

であるから, (B.2.40), (B.2.41) より, $\cos(\theta/3)$, $\sin(\theta/3)$ は最終的に以下の様に近似されることが分かる:

$$\cos \frac{\theta}{3} \simeq \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{k}{12a}, \quad (\text{B.2.43})$$

$$\sin \frac{\theta}{3} \simeq \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}k}{12a}. \quad (\text{B.2.44})$$

したがって, (B.2.43), (B.2.44) を用いると, (B.2.34) は以下の様に近似される:

$$\omega = \begin{cases} \omega_1 = a^{1/3} \left(-\cos \frac{\theta}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{\theta}{3} \right) \simeq a^{1/3} \left\{ -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{k}{12a} \right) + \sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}k}{12a} \right) \right\} \\ \qquad \qquad \qquad = -\frac{k}{3a^{2/3}} \\ \omega_2 = a^{1/3} \left(-\cos \frac{\theta}{3} - \sqrt{3} \sin \frac{\theta}{3} \right) \simeq a^{1/3} \left\{ -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{k}{12a} \right) - \sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}k}{12a} \right) \right\} \\ \qquad \qquad \qquad = -\sqrt{3}a^{1/3} + \frac{k}{6a^{2/3}} \\ \omega_3 = 2a^{1/3} \cos \frac{\theta}{3} \simeq 2a^{1/3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{k}{12a} \right) \\ \qquad \qquad \qquad = \sqrt{3}a^{1/3} + \frac{k}{6a^{2/3}} \end{cases} \quad (\text{B.2.45})$$

よって, (B.1.20) を用いると, (B.2.34) は最終的に以下の様に近似される:

$$\omega = \begin{cases} \omega_1 = a^{1/3} \left(-\cos \frac{\theta}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{\theta}{3} \right) \simeq -\frac{k}{k^2 + 2n + 1} \\ \omega_2 = a^{1/3} \left(-\cos \frac{\theta}{3} - \sqrt{3} \sin \frac{\theta}{3} \right) \simeq -\sqrt{k^2 + 2n + 1} + \frac{k}{2(k^2 + 2n + 1)} \\ \omega_3 = 2a^{1/3} \cos \frac{\theta}{3} \simeq \sqrt{k^2 + 2n + 1} + \frac{k}{2(k^2 + 2n + 1)} \end{cases} \quad (\text{B.2.46})$$

この様に, $\tan \theta \rightarrow \infty$ の近似を行うことで, Matsuno(1966) 等で得られた解と同様の解が得られた. つまり, $\tan \theta \rightarrow \infty$ の極限は, $\omega \rightarrow$ 小, あるいは, $\omega \rightarrow$ 大の極限と同等であることを意味する. なぜなら, $\tan \theta$ の式において $k \rightarrow$ 大, もしくは, $k \rightarrow$ 小とすれば, $\tan \theta \rightarrow \infty$ の極限が得られるからである.

上記の結果は, 多くの教科書で見られる赤道ロスビー波の分散関係式を解析解から近似的に導出するためには, 分散関係式を 2 次の精度まで求めてやる必要があることを示している. しかし, 本ノートでは簡単のため ω_2, ω_3 の 2 次のオーダーの成分 ($k/2(k^2 + 2n + 1)$) を省略して扱う:

$$\omega = -\frac{k}{k^2 + 2n + 1}, \quad (\text{赤道ロスビー波}) \quad (\text{B.2.47})$$

$$\omega = \pm \sqrt{k^2 + 2n + 1}, \quad (\text{慣性重力波}) \quad (\text{B.2.48})$$

以上, これまでの分散関係と分散関係式から求めた位相速度をまとめると, 図 3.1, 3.2 の様になる. $n \geq 1$ の場合の近似解 (B.2.47), (B.2.48) は, 厳密解として求めた分散曲線とよく一致する.

Appendix C

赤道波方程式の各項のモード展開

本節では, (1.1.2)~(1.1.4) の各項をモード展開した結果をまとめる. 無次元の方程式系 (1.2.22)~(1.2.24) をモード展開した結果は, 以下のそれぞれの式において $\beta = 1, \sqrt{gH} = 1$ とすれば得られる.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= -i\omega u \\
&= -i(\omega_r + i\omega_i)(u_r + iu_i)e^{i\{kx - (\omega_r + i\omega_i)t\}} \\
&= -i\{(\omega_r u_r - \omega_i u_i) + i(\omega_r u_i + \omega_i u_r)\}e^{i(kx - \omega_r t) + \omega_i t} \\
&= \{(\omega_r u_i + \omega_i u_r) - i(\omega_r u_r - \omega_i u_i)\}\{\cos(kx - \omega_r t) + i\sin(kx - \omega_r t)\}e^{\omega_i t}, \\
\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\text{実部}} &= \{(\omega_r u_i + \omega_i u_r) \cos(kx - \omega_r t) + (\omega_r u_r - \omega_i u_i) \sin(kx - \omega_r t)\}e^{\omega_i t} \quad (\text{C.0.1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta y v &= \beta y(v_r + iv_i)e^{i\{kx - (\omega_r + i\omega_i)t\}} \\
&= \beta y(v_r + iv_i)e^{i(kx - \omega_r t) + \omega_i t} \\
&= \beta y(v_r + iv_i)\{\cos(kx - \omega_r t) + i\sin(kx - \omega_r t)\}e^{\omega_i t}, \\
\left.\beta y v\right|_{\text{実部}} &= \beta y\{v_r \cos(kx - \omega_r t) - v_i \sin(kx - \omega_r t)\}e^{\omega_i t} \quad (\text{C.0.2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \Phi}{\partial x} &= -ik\Phi \\
&= -ik(\Phi_r + i\Phi_i)e^{i\{kx - (\omega_r + i\omega_i)t\}} \\
&= k(\Phi_i - i\Phi_r)e^{i(kx - \omega_r t) + \omega_i t} \\
&= k(\Phi_i - i\Phi_r)\{\cos(kx - \omega_r t) + i\sin(kx - \omega_r t)\}e^{\omega_i t}, \\
-\left.\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|_{\text{実部}} &= k\{\Phi_r \sin(kx - \omega_r t) + \Phi_i \cos(kx - \omega_r t)\}e^{\omega_i t} \quad (\text{C.0.3})
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -i\omega v$$

$$\begin{aligned}
&= -i(\omega_r + i\omega_i)(v_r + iv_i)e^{i\{kx - (\omega_r + i\omega_i)t\}} \\
&= -i\{(\omega_r v_r - \omega_i v_i) + i(\omega_r v_i + \omega_i v_r)\}e^{i(kx - \omega_r t) + \omega_i t} \\
&= \{(\omega_r v_i + \omega_i v_r) - i(\omega_r v_r - \omega_i v_i)\}\{\cos(kx - \omega_r t) + i\sin(kx - \omega_r t)\}e^{\omega_i t}, \\
\left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{\text{実部}} &= \{(\omega_r v_i + \omega_i v_r) \cos(kx - \omega_r t) + (\omega_r v_r - \omega_i v_i) \sin(kx - \omega_r t)\}e^{\omega_i t} \quad (\text{C.0.4})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\beta y u &= -\beta y(u_r + iu_i)e^{i\{kx - (\omega_r + i\omega_i)t\}} \\
&= -\beta y(u_r + iu_i)e^{i(kx - \omega_r t) + \omega_i t} \\
&= -\beta y(u_r + iu_i)\{\cos(kx - \omega_r t) + i\sin(kx - \omega_r t)\}e^{\omega_i t}, \\
\left. -\beta y u \right|_{\text{実部}} &= -\beta y\{u_r \cos(kx - \omega_r t) - u_i \sin(kx - \omega_r t)\}e^{\omega_i t} \quad (\text{C.0.5})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \Phi}{\partial y} &= -\frac{\partial}{\partial y}(\Phi_r + i\Phi_i)e^{i\{kx - (\omega_r + i\omega_i)t\}} \\
&= -\frac{\partial}{\partial y}(\Phi_r + i\Phi_i)e^{i(kx - \omega_r t) + \omega_i t} \\
&= -\frac{\partial}{\partial y}(\Phi_r + i\Phi_i)\{\cos(kx - \omega_r t) + i\sin(kx - \omega_r t)\}e^{\omega_i t}, \\
\left. -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{\text{実部}} &= -\left\{ \frac{\partial \Phi_r}{\partial y} \cos(kx - \omega_r t) - \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \sin(kx - \omega_r t) \right\} e^{\omega_i t} \quad (\text{C.0.6})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial t} &= -i\omega \Phi \\
&= -i(\omega_r + i\omega_i)(\Phi_r + i\Phi_i)e^{i\{kx - (\omega_r + i\omega_i)t\}} \\
&= -i\{(\omega_r \Phi_r - \omega_i \Phi_i) + i(\omega_r \Phi_i + \omega_i \Phi_r)\}e^{i(kx - \omega_r t) + \omega_i t} \\
&= \{(\omega_r \Phi_i + \omega_i \Phi_r) - i(\omega_r \Phi_r - \omega_i \Phi_i)\}\{\cos(kx - \omega_r t) + i\sin(kx - \omega_r t)\}e^{\omega_i t}, \\
\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{\text{実部}} &= \{(\omega_r \Phi_i + \omega_i \Phi_r) \cos(kx - \omega_r t) + (\omega_r \Phi_r - \omega_i \Phi_i) \sin(kx - \omega_r t)\}e^{\omega_i t} \quad (\text{C.0.7})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-gH \frac{\partial u}{\partial x} &= -gH \cdot iku \\
&= -ikgH(u_r + iu_i)e^{i\{kx - (\omega_r + i\omega_i)t\}} \\
&= kgH(u_i - iu_r)e^{i(kx - \omega_r t) + \omega_i t} \\
&= kgH(u_i - iu_r)\{\cos(kx - \omega_r t) + i\sin(kx - \omega_r t)\}e^{\omega_i t}, \\
\left. -gH \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{\text{実部}} &= kgH\{u_r \sin(kx - \omega_r t) + u_i \cos(kx - \omega_r t)\}e^{\omega_i t} \quad (\text{C.0.8})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-gH \frac{\partial v}{\partial y} &= -gH \frac{\partial}{\partial y}(v_r + iv_i)e^{i\{kx - (\omega_r + i\omega_i)t\}} \\
&= -gH \frac{\partial}{\partial y}(v_r + iv_i)e^{i(kx - \omega_r t) + \omega_i t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -gH \frac{\partial}{\partial y} (v_r + iv_i) \{ \cos(kx - \omega_r t) + i \sin(kx - \omega_r t) \} e^{\omega_i t}, \\
-gH \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{\text{実部}} &= -gH \left\{ \frac{\partial v_r}{\partial y} \cos(kx - \omega_r t) - \frac{\partial v_i}{\partial y} \sin(kx - \omega_r t) \right\} e^{\omega_i t}. \quad (\text{C.0.9})
\end{aligned}$$

(C.0.1)～(C.0.3) より (1.1.2) をモード展開して取り出した実部は次のようになる:

$$\begin{aligned}
&\{ (\omega_r u_i + \omega_i u_r) \cos(kx - \omega_r t) + (\omega_r u_r - \omega_i u_i) \sin(kx - \omega_r t) \} e^{\omega_i t} \\
&= \beta y \{ v_r \cos(kx - \omega_r t) - v_i \sin(kx - \omega_r t) \} e^{\omega_i t} \\
&\quad + k \{ \Phi_r \sin(kx - \omega_r t) + \Phi_i \cos(kx - \omega_r t) \} e^{\omega_i t}. \quad (\text{C.0.10})
\end{aligned}$$

(C.0.4)～(C.0.6) より (1.1.3) をモード展開して取り出した実部は次のようになる:

$$\begin{aligned}
&\{ (\omega_r v_i + \omega_i v_r) \cos(kx - \omega_r t) + (\omega_r v_r - \omega_i v_i) \sin(kx - \omega_r t) \} e^{\omega_i t} \\
&= -\beta y \{ u_r \cos(kx - \omega_r t) - u_i \sin(kx - \omega_r t) \} e^{\omega_i t} \\
&\quad - \left\{ \frac{\partial \Phi_r}{\partial y} \cos(kx - \omega_r t) - \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \sin(kx - \omega_r t) \right\} e^{\omega_i t}. \quad (\text{C.0.11})
\end{aligned}$$

(C.0.7)～(C.0.9) より (1.1.4) をモード展開して取り出した実部は次のようになる:

$$\begin{aligned}
&\{ (\omega_r \Phi_i + \omega_i \Phi_r) \cos(kx - \omega_r t) + (\omega_r \Phi_r - \omega_i \Phi_i) \sin(kx - \omega_r t) \} e^{\omega_i t} \\
&= kgH \{ u_r \sin(kx - \omega_r t) + u_i \cos(kx - \omega_r t) \} e^{\omega_i t} \\
&\quad - gH \left\{ \frac{\partial v_r}{\partial y} \cos(kx - \omega_r t) - \frac{\partial v_i}{\partial y} \sin(kx - \omega_r t) \right\} e^{\omega_i t}. \quad (\text{C.0.12})
\end{aligned}$$

Appendix D

渦度方程式の各項のモード展開

本節では, 渦度 ζ ならびに (5.0.6)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -v - y \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (5.0.6)$$

の各項をモード展開した結果をまとめる.

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= ikv - \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= ik(v_r + iv_i)e^{i\{kx - (\omega_r + i\omega_i)t\}} - \frac{\partial}{\partial y}(u_r + iu_i)e^{i\{kx - (\omega_r + i\omega_i)t\}} \\ &= ik(v_r + iv_i)e^{i(kx - \omega_r t)}e^{\omega_i t} - \frac{\partial}{\partial y}(u_r + iu_i)e^{i(kx - \omega_r t)}e^{\omega_i t} \\ &= k(iv_r - v_i)\{\cos(kx - \omega_r t) + i\sin(kx - \omega_r t)\}e^{\omega_i t} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial y}(u_r + iu_i)\{\cos(kx - \omega_r t) + i\sin(kx - \omega_r t)\}e^{\omega_i t}, \\ \zeta|_{\text{実部}} &= -k\{v_i \cos(kx - \omega_r t) + v_r \sin(kx - \omega_r t)\}e^{\omega_i t} \\ &\quad - \left\{ \frac{\partial u_r}{\partial y} \cos(kx - \omega_r t) - \frac{\partial u_i}{\partial y} \sin(kx - \omega_r t) \right\} e^{\omega_i t}, \quad (D.0.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (-i\omega v) - \frac{\partial}{\partial y} (-i\omega u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -i\omega(ik)v + i\omega \frac{\partial u}{\partial y} \\
&= k\omega v + i\omega \frac{\partial u}{\partial y} \\
&= k(\omega_r + i\omega_i)(v_r + iv_i)e^{i\{kx - (\omega_r + i\omega_i)t\}} \\
&\quad + i(\omega_r + i\omega_i) \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (u_r + iu_i)e^{i\{kx - (\omega_r + i\omega_i)t\}} \right\} \\
&= k\{(\omega_r v_r - \omega_i v_i) + i(\omega_r v_i + \omega_i v_r)\} e^{i(kx - \omega_r t)} e^{\omega_i t} \\
&\quad + (-\omega_i + i\omega_r) \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (u_r + iu_i)e^{i(kx - \omega_r t)} e^{\omega_i t} \right\} \\
&= k\{(\omega_r v_r - \omega_i v_i) + i(\omega_r v_i + \omega_i v_r)\} \{ \cos(kx - \omega_r t) + i \sin(kx - \omega_r t) \} e^{\omega_i t} \\
&\quad + (-\omega_i + i\omega_r) \frac{\partial}{\partial y} \left[(u_r + iu_i) \{ \cos(kx - \omega_r t) + i \sin(kx - \omega_r t) \} e^{\omega_i t} \right] \\
&= k\{(\omega_r v_r - \omega_i v_i) + i(\omega_r v_i + \omega_i v_r)\} \{ \cos(kx - \omega_r t) + i \sin(kx - \omega_r t) \} e^{\omega_i t} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left[\{ (-\omega_i u_r - \omega_r u_i) + i(-\omega_i u_i + \omega_r u_r) \} \right. \\
&\quad \quad \left. \times \{ \cos(kx - \omega_r t) + i \sin(kx - \omega_r t) \} e^{\omega_i t} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right|_{\text{実部}} &= k \{ (\omega_r v_r - \omega_i v_i) \cos(kx - \omega_r t) - (\omega_r v_i + \omega_i v_r) \sin(kx - \omega_r t) \} e^{\omega_i t} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (-\omega_i u_r - \omega_r u_i) \cos(kx - \omega_r t) \right. \\
&\quad \quad \left. - (-\omega_i u_i + \omega_r u_r) \sin(kx - \omega_r t) \right\} e^{\omega_i t} \\
&= k \{ (\omega_r v_r - \omega_i v_i) \cos(kx - \omega_r t) - (\omega_r v_i + \omega_i v_r) \sin(kx - \omega_r t) \} e^{\omega_i t} \\
&\quad \left\{ \left(-\omega_i \frac{\partial u_r}{\partial y} - \omega_r \frac{\partial u_i}{\partial y} \right) \cos(kx - \omega_r t) \right. \\
&\quad \quad \left. + \left(\omega_i \frac{\partial u_i}{\partial y} - \omega_r \frac{\partial u_r}{\partial y} \right) \sin(kx - \omega_r t) \right\} e^{\omega_i t}, \tag{D.0.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-v &= -(v_r + iv_i)e^{i\{kx - (\omega_r + i\omega_i)t\}} \\
&= -(v_r + iv_i)e^{i(kx - \omega_r t)} e^{\omega_i t} \\
&= -(v_r + iv_i) \{ \cos(kx - \omega_r t) + i \sin(kx - \omega_r t) \} e^{\omega_i t},
\end{aligned}$$

$$\left. -v \right|_{\text{実部}} = -\{v_r \cos(kx - \omega_r t) - v_i \sin(kx - \omega_r t)\} e^{\omega_i t}, \tag{D.0.3}$$

$$\begin{aligned}
-y \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -y \left(iku + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\
&= -y \left(ik(u_r + iu_i)e^{i\{kx - (\omega_r + i\omega_i)t\}} + \frac{\partial}{\partial y} (v_r + iv_i)e^{i\{kx - (\omega_r + i\omega_i)t\}} \right) \\
&= -y \left(k(u_i - iu_r)e^{i(kx - \omega_r t)} e^{\omega_i t} + \frac{\partial}{\partial y} (v_r + iv_i)e^{i(kx - \omega_r t)} e^{\omega_i t} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -y \left(k(u_i - iu_r) \{ \cos(kx - \omega_r t) + i \sin(kx - \omega_r t) \} e^{\omega_i t} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} (v_r + iv_i) \{ \cos(kx - \omega_r t) + i \sin(kx - \omega_r t) \} e^{\omega_i t} \right), \\
-y \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Big|_{\text{実部}} &= -y \left(-\{ u_r \sin(kx - \omega_r t) + u_i \cos(kx - \omega_r t) \} e^{\omega_i t} \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \frac{\partial v_r}{\partial y} \cos(kx - \omega_r t) - \frac{\partial v_i}{\partial y} \sin(kx - \omega_r t) \right\} e^{\omega_i t} \right). \tag{D.0.4}
\end{aligned}$$

Appendix E

回転の無い浅水系の重力波

本章では, 第4章で慣性重力波の位相伝搬を考察する際に参考となる非回転浅水系の重力波についてまとめる.

E.1 1次元の非回転浅水系重力波

無次元化した1次元の非回転浅水系重力波の支配方程式は以下の様になる:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (\text{E.1.1})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x}. \quad (\text{E.1.2})$$

これより Φ を消去すると,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (\text{E.1.3})$$

ここで

$$u = A \exp i(kx - \omega t), \quad (\text{E.1.4})$$

(ただし A は任意定数) とおいて (E.1.3) に代入すると次の分散関係式を得る:

$$\omega = \pm k, \quad (\text{E.1.5})$$

$$c = \pm 1. \quad (\text{E.1.6})$$

ただし, $c = \omega/k$ である. これより, 固有関数 u, Φ は次の様になる:

$$u(x, t) = \text{Re}[A \exp ik(x \mp t)] = A \cos k(x \mp t), \quad (\text{E.1.7})$$

$$\Phi(x, t) = \text{Re}[A \exp ik(x \mp t)] = A \cos k(x \mp t). \quad (\text{E.1.8})$$

ただし, 複合は, 上が $\omega > 0$, 下が $\omega < 0$ を表す.

E.2 2次元の非回転浅水系重力波

無次元化した 2次元の非回転浅水系重力波の支配方程式は、以下の様になる¹:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (\text{E.2.9})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (\text{E.2.10})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right). \quad (\text{E.2.11})$$

ここで, u, v, Φ を (2.1.1) の様に離散化する:

$$-i\omega \hat{u} = -ik\hat{\Phi}, \quad (\text{E.2.12})$$

$$-i\omega \hat{v} = -\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial y}, \quad (\text{E.2.13})$$

$$-i\omega \hat{\Phi} = -ik\hat{u} - \frac{\partial \hat{v}}{\partial y}. \quad (\text{E.2.14})$$

これより u, Φ を消去すると,

$$\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} = -k^2(c^2 - 1)\hat{v} \quad (\text{E.2.15})$$

ただし, $c = \omega/k$ である. よって解 \hat{v} は, 次の様に与えられる:

$$\hat{v}(y) = Ae^{ik\sqrt{c^2-1}y} + Be^{-ik\sqrt{c^2-1}y} \quad (\text{E.2.16})$$

$$= (A+B) \cos\left\{k\sqrt{(c^2-1)y}\right\} + i(A-B) \sin\left\{k\sqrt{(c^2-1)y}\right\}. \quad (\text{E.2.17})$$

ただし, A, B は任意定数. ここで水路の様な (南北に位相が伝播しない) 以下の境界条件を与える:

$$\hat{v} \rightarrow 0 \quad (y = \pm L). \quad (\text{E.2.18})$$

この境界条件より,

$$(A+B) \cos\left\{k\sqrt{(c^2-1)y}\right\} = 0, \quad (\text{E.2.19})$$

$$(A-B) \sin\left\{k\sqrt{(c^2-1)y}\right\} = 0. \quad (\text{E.2.20})$$

よって, $A = B = 0$ の自明解以外の解を持つ条件を求めると, 以下の様になる:

$$\begin{cases} A = -B, \\ k\sqrt{c^2-1}L = n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (\text{E.2.21})$$

¹Satomura(1981) で $\sqrt{gH} = 1$ とした場合に対応.

または,

$$\begin{cases} A = B, \\ k\sqrt{c^2 - 1}L = n\pi/2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (\text{E.2.22})$$

ここでは, Satomura(1981) に合わせて (E.2.21) の方を採用すると以下の分散関係式を得る:

$$c = \pm \sqrt{1 + \frac{(n\pi)^2}{L^2 k^2}}, \quad (\text{E.2.23})$$

$$\omega = \pm \sqrt{k^2 + \frac{(n\pi)^2}{L^2}}. \quad (\text{E.2.24})$$

また, 固有関数 u, v, Φ は次の様になる:

$$u(x, y, t) = A \frac{in\pi}{Lk(1 - c^2)} \cos(n\pi y/L) e^{i(kx - \omega t)}, \quad (\text{E.2.25})$$

$$v(x, y, t) = A \sin(n\pi y/L) e^{i(kx - \omega t)}, \quad (\text{E.2.26})$$

$$\Phi(x, y, t) = A \frac{icn\pi}{Lk(1 - c^2)} \cos(n\pi y/L) e^{i(kx - \omega t)}. \quad (\text{E.2.27})$$

ただし, ここで (E.2.23) より

$$\frac{(n\pi)^2}{Lk} = Lk(1 - c^2) \quad (\text{E.2.28})$$

の関係を用いた. また, A は任意定数である. (E.2.25)~(E.2.27) の構造を計算すると図 E.1 の様になる:

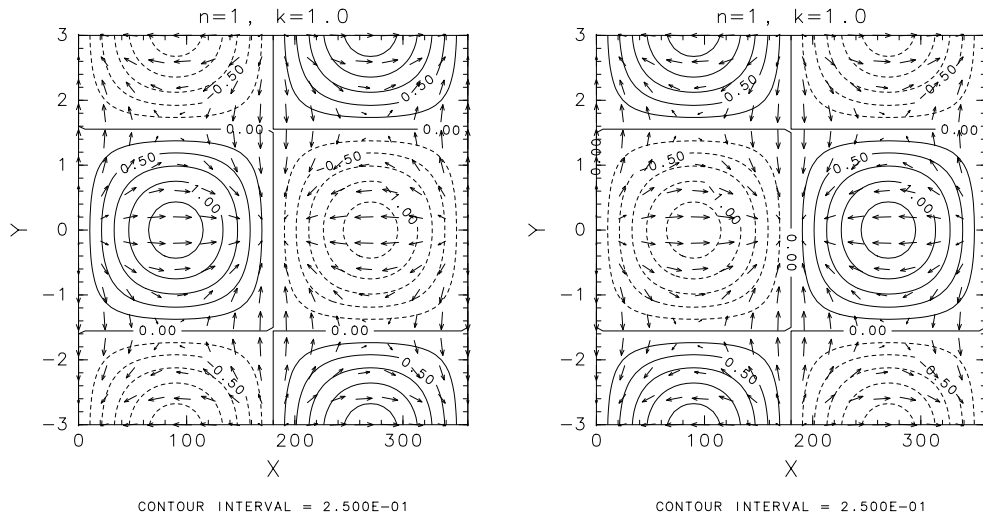


図 E.1: $n = 1, k = 1.0$ の非回転浅水重力波の圧力場と速度場の分布. 等値線はジオポテンシャル, ベクトルは速度 (u, v) を表す. 左図 (東進): $\omega = 1.45$, 右図 (西進): $\omega = -1.45$.

また, (E.2.9)~(E.2.11) の各項の分布は, 図 E.2~図 E.7に示した. 図 E.2~図 E.7より, 2次元非回転浅水重力波の位相伝搬には, 1次元の場合と違って南北風の収束発散成分 ($\partial v/\partial y$)

も寄与していることが分かる。低波数 (図 E.2) のうちは、ジオポテンシャルの位相伝搬に南北風の収束発散成分が最も寄与しているが、東西風の収束発散成分に対する南北風の収束発散成分の寄与の割合は、東西波数が増大するにつれて減少する (図 E.6). (E.2.12), (E.2.13) から明らかな様に、図 E.2~図 E.7より、東進 (西進) する波動の東西風、南北風の位相は、ジオポテンシャルの位相より $1/4$ 周期遅れて (進んで) いることが分かる。このため、圧力傾度に伴う高圧部から低圧部へ向かう東西流と南北流は、圧力経度の分布に対して $1/4$ 周期遅れて (進んで) 生じている。

2次元非回転浅水重力波の位相伝搬のメカニズムをまとめると次の様になる。

はじめに、東進波の位相伝搬のメカニズムについて考察する。まず、ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズムは以下の様である：図 E.2 の経度 225 度付近を見ると、赤道域では西側で西風、東側で東風、北側で北風、南側で南風となるので、この領域では速度ベクトルの収束域となる。このため、ジオポテンシャルは増加するので、 ϕ の分布と見比べると確かに赤道域のジオポテンシャルは東に伝播することが分かる。一方、この経度帯の高緯度域の速度ベクトルの分布は赤道域と逆になるので、高緯度域では速度ベクトルの発散域となる。このため、ジオポテンシャルは減少するので、 ϕ の分布と見比べると確かに高緯度域のジオポテンシャルも東に伝播することが分かる。次に、速度ベクトルの位相伝搬のメカニズムについてまとめる。図 E.2 の経度 225 度付近を見ると、赤道域のジオポテンシャルは西側で正、東側で負の値を取る所以、この領域の東西方向の圧力傾度力は正となる。このため、この領域の東西風は西風加速を受けるので、 u の分布と見比べると確かに赤道域の東西風は東に伝播することが分かる。一方、この経度帯の高緯度域のジオポテンシャルは、西側で負、東側で正の値を取る所以、この領域の東西方向の圧力傾度力は負となる。このため、この領域の東西風は東風加速を受けるので、 u の分布と見比べると確かに高緯度域の東西風も東に伝播することが分かる。さらに、図 E.2 の経度 325 度、緯度 1.5 度付近を見ると、ジオポテンシャルは北側で正、南側で負の値を取る所以、この領域の南北方向の圧力傾度力は負となる。このため、この領域の南北風は北風加速を受けるので、 v の分布と見比べると確かにこの領域の南北風は東に伝播することが分かる。南半球でも同様の解釈で南北風は東に伝搬していることが分かる。以上の東進波の位相伝搬のメカニズムは、高波数 (図 E.4, E.6) になっても変わらない。

次に、西進波の位相伝搬のメカニズムについてまとめる。西進波であっても、ジオポテンシャルは速度ベクトルの収束発散によって位相伝搬し、速度ベクトルは圧力傾度力による速度ベクトルの加速減速によって位相伝搬するという点は、東進波と変わらない (図 E.3, E.5 E.7)。東進波との違いは、東西風とジオポテンシャルの位相差である。東進波では、東西風とジオポテンシャルが同位相で変動するのに対して、西進波では東西風とジオポテンシャルの位相が 90 度ずれている。この位相のずれが、西進波と東進波の伝搬方向を決めているのである。

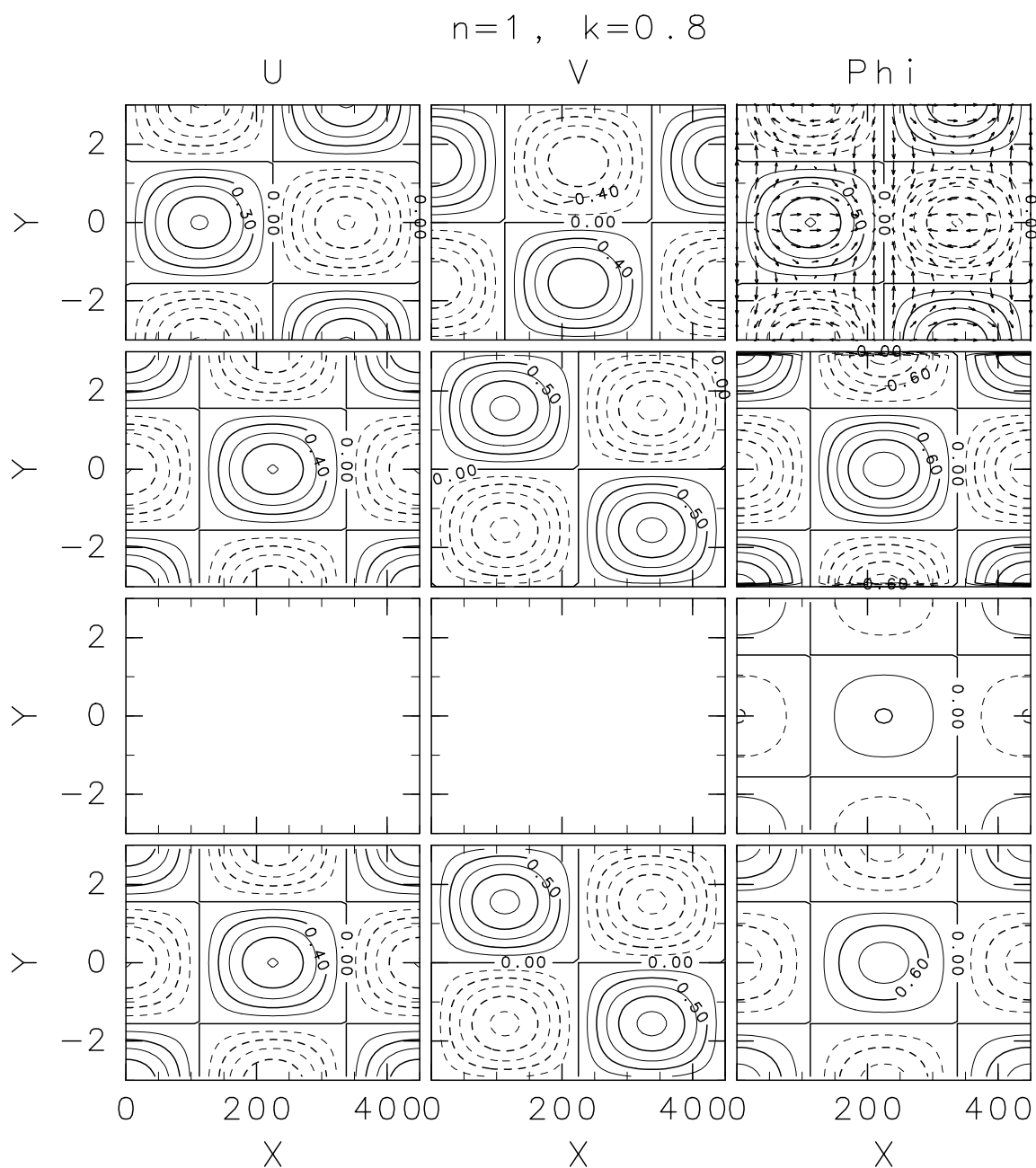


図 E.2: $n = 1, k = 0.8$ の非回転浅水重力波 (東進) の (E.2.9)~(E.2.11) の各項の水平分布 ($t = 0, \omega = 1.32, c = 1.65$). 等値線間隔は, u, v, Φ の各々の列において下 3 枚が同じ.

u	v	Φ と風速場 (u, v)
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$
		$-\frac{\partial u}{\partial x}$
$-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$-\frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$-\frac{\partial v}{\partial y}$

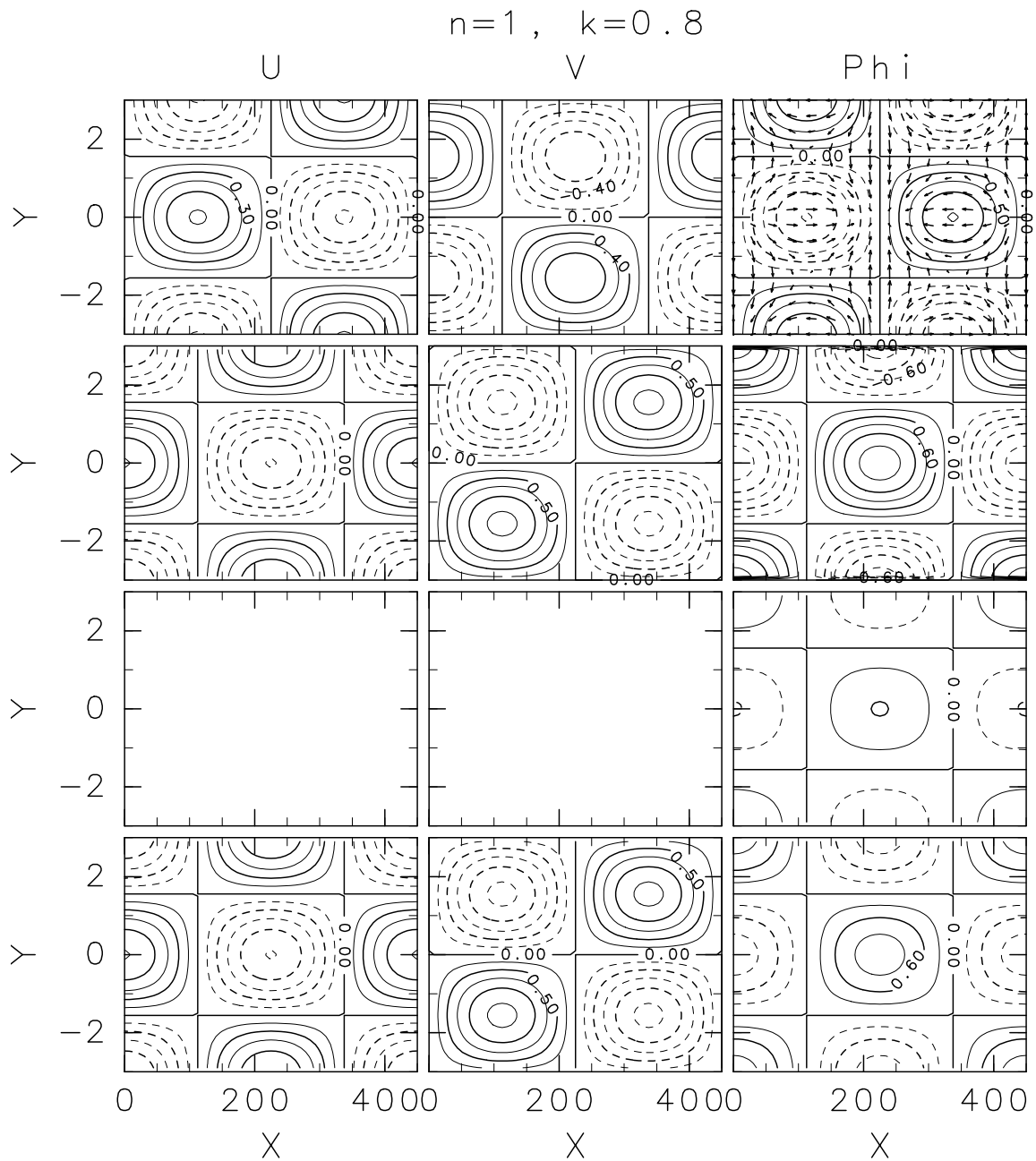


図 E.3: $n = 1, k = 0.8$ の非回転浅水重力波 (西進) の (E.2.9)~(E.2.11) の各項の水平分布 ($t = 0, \omega = -1.32, c = -1.65$). 等値線間隔は, u, v, Φ の各々の列において下 3 枚が同じ.

u	v	Φ と風速場 (u, v)
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$
		$-\frac{\partial u}{\partial x}$
$-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$-\frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$-\frac{\partial v}{\partial y}$

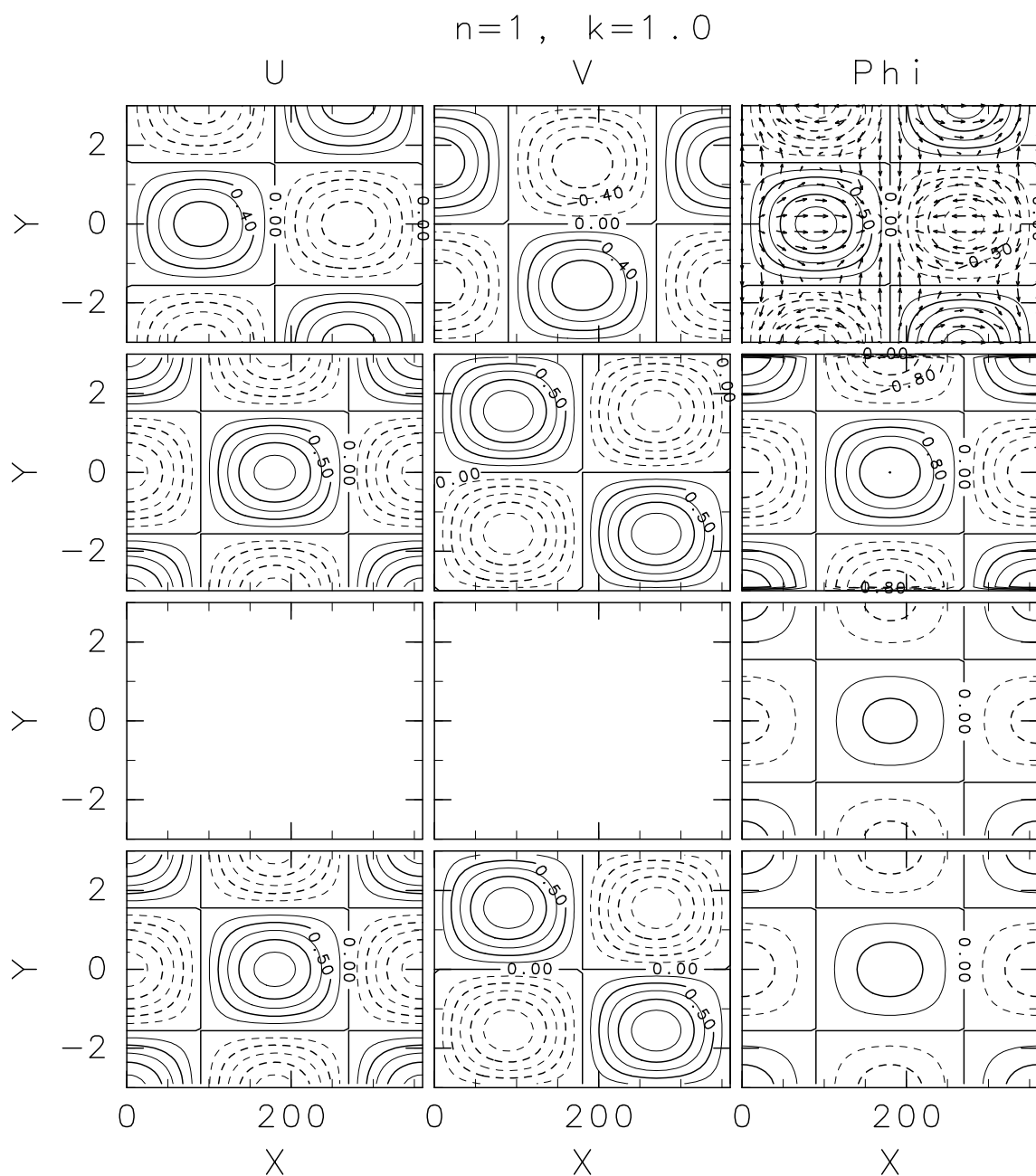


図 E.4: $n = 1, k = 1.0$ の非回転浅水重力波 (東進) の (E.2.9)~(E.2.11) の各項の水平分布 ($t = 0, \omega = 1.45, c = 1.45$). 等値線間隔は, u, v, Φ の各々の列において下 3 枚が同じ.

u	v	Φ と風速場 (u, v)
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$
		$-\frac{\partial u}{\partial x}$
$-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$-\frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$-\frac{\partial v}{\partial y}$

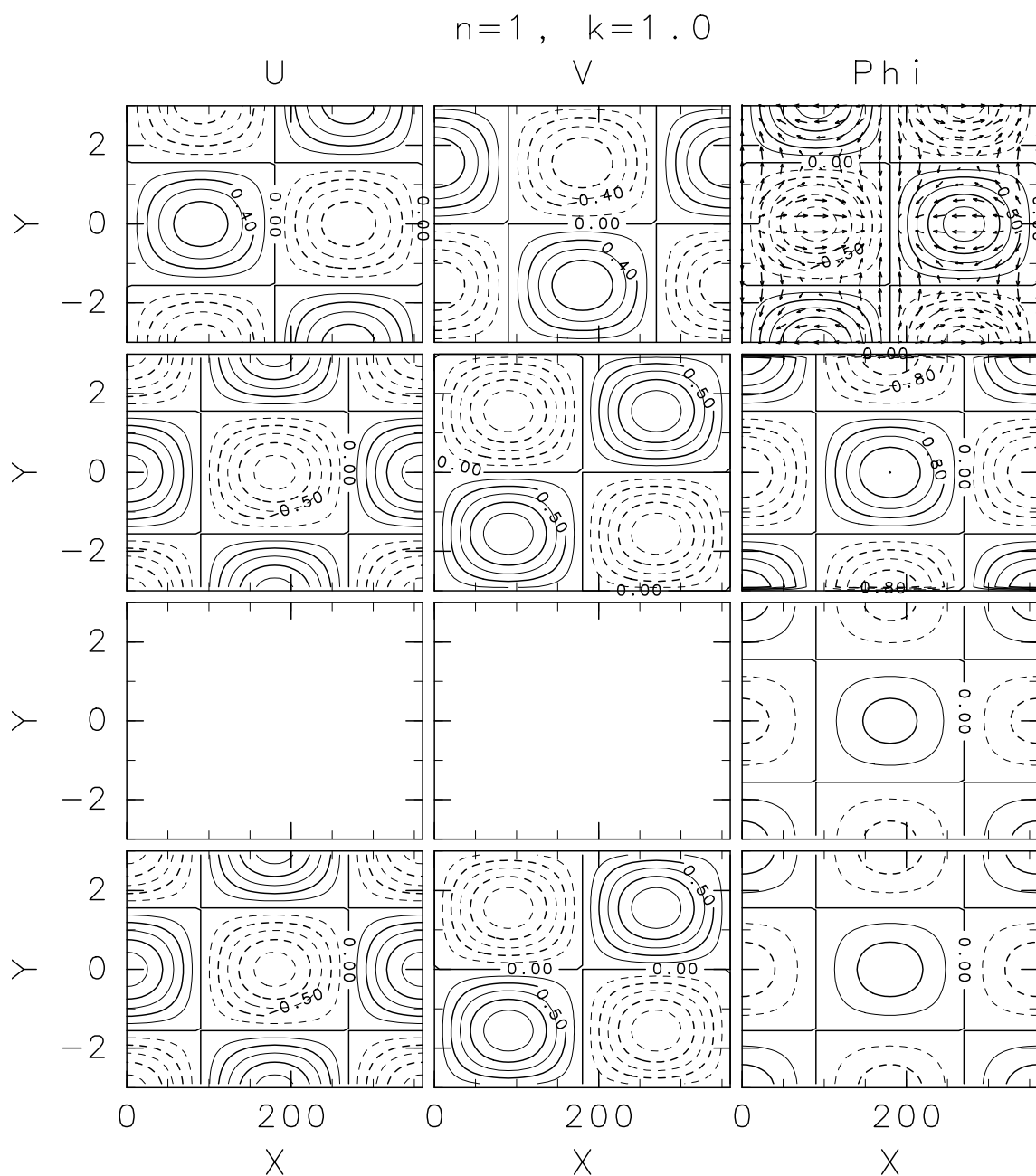


図 E.5: $n = 1, k = 1.0$ の非回転浅水重力波 (西進) の (E.2.9)~(E.2.11) の各項の水平分布 ($t = 0, \omega = -1.45, c = -1.45$). 等値線間隔は, u, v, Φ の各々の列において下 3 枚が同じ.

u	v	Φ と風速場 (u, v)
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$
		$-\frac{\partial u}{\partial x}$
$-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$-\frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$-\frac{\partial v}{\partial y}$

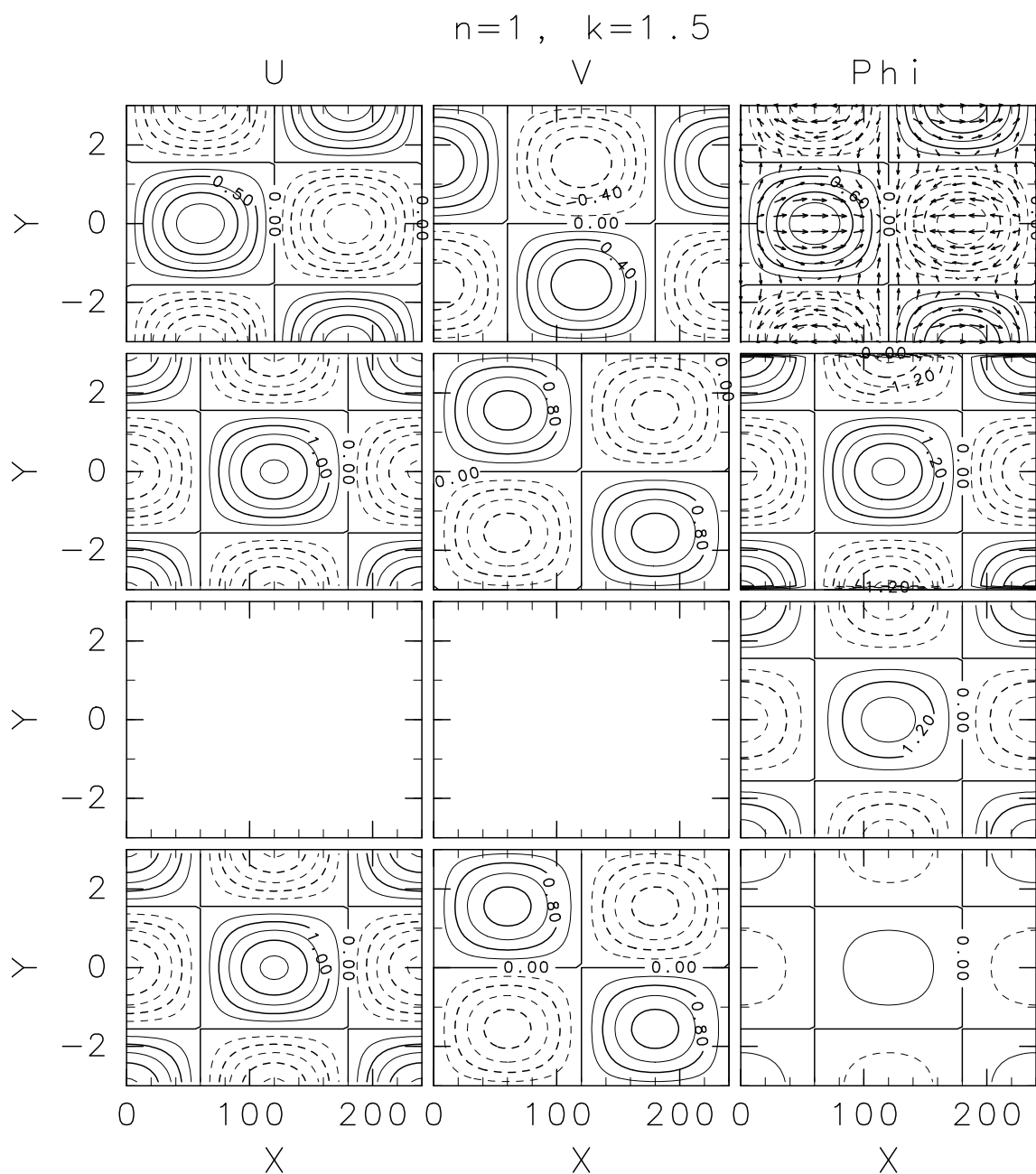


図 E.6: $n = 1, k = 1.5$ の非回転浅水重力波 (東進) の (E.2.9)~(E.2.11) の各項の水平分布 ($t = 0, \omega = 1.83, c = 1.22$). 等値線間隔は, u, v, Φ の各々の列において下 3 枚が同じ.

u	v	Φ と風速場 (u, v)
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$
		$-\frac{\partial u}{\partial x}$
$-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$-\frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$-\frac{\partial v}{\partial y}$

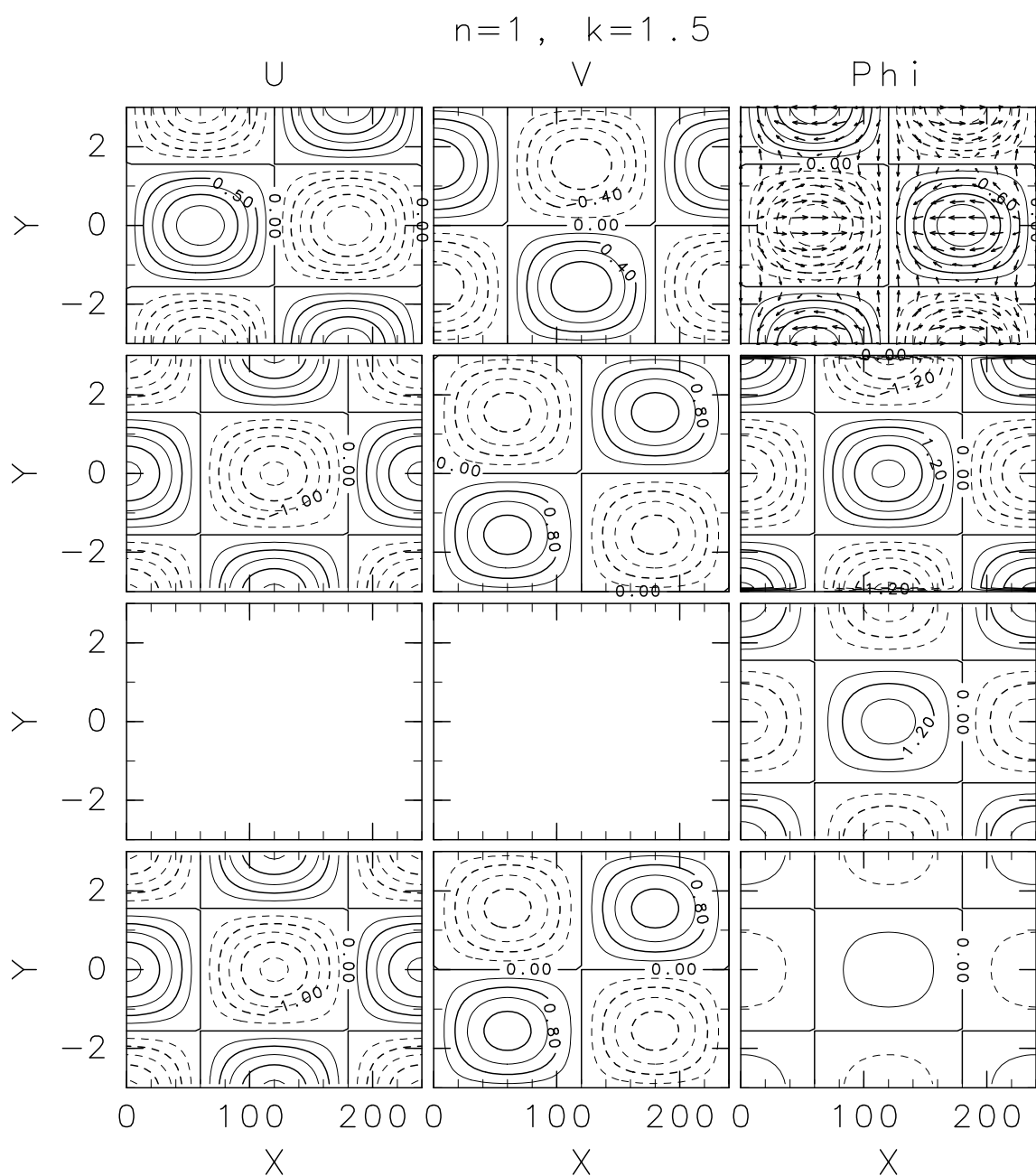


図 E.7: $n = 1, k = 1.5$ の非回転浅水重力波 (西進) の (E.2.9)~(E.2.11) の各項の水平分布 ($t = 0, \omega = -1.83, c = -1.22$). 等値線間隔は, u, v, Φ の各々の列において下 3 枚が同じ.

u	v	Φ と風速場 (u, v)
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$
		$-\frac{\partial u}{\partial x}$
$-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$-\frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$-\frac{\partial v}{\partial y}$

Appendix F

$n = 1, k \neq 0$ の慣性重力波の物理量

本章では, 第 4.2 節, でまとめた特徴が得られる理論的背景について, 第 2 章の結果に基づき $n = 1, k \neq 0$ の東進慣性重力波の構造を支配する諸量をまとめておく.

(2.4.76), (2.4.77) より, $n = 1, k \neq 0$ の時, 東西・南北風速は次の様に表される:

$$\begin{aligned} & (u(x, y, t), v(x, y, t)) \\ &= \left(\operatorname{Re} \left[\frac{i}{2} \left(\frac{1}{\omega - k} H_2 + \frac{2}{\omega + k} H_0 \right) e^{-\frac{1}{2}y^2} e^{i(kx - \omega t)} \right], \operatorname{Re} \left[H_1 e^{-\frac{1}{2}y^2} e^{i(kx - \omega t)} \right] \right) \\ &= \left(-2 \frac{(\omega + k)y^2 - k}{\omega^2 - k^2} e^{-\frac{1}{2}y^2} \sin(kx - \omega t), 2y e^{-\frac{1}{2}y^2} \cos(kx - \omega t) \right). \quad (\text{F.0.1}) \end{aligned}$$

ただし, $H_1 = 2y, H_2 = 4y^2 - 2$ を用いた. (F.0.1) より, 東西風の振幅は, $\pm \sqrt{k/(\omega + k)}$ で 0 となり赤道対称な分布をすることが分かる. 南北風の振幅は, 赤道で 0 となり赤道反対称な分布をする. したがって, 速度ベクトルは赤道対称な分布をする. また, 南北風は東西風と比べて 1/4 周期だけ位相がずれている. これより, 速度ベクトルは北半球で時計周り, 南半球では反時計周りの回転をすることが分かる.

次に速度ベクトルに作用するコリオリ力を明記しておく. (F.0.1) より, $n = 1, k \neq 0$ の時, コリオリ力は次の様に表される:

$$\begin{aligned} & (yv(x, y, t), -yu(x, y, t)) \\ &= \left(2y^2 e^{-\frac{1}{2}y^2} \cos(kx - \omega t), 2y \frac{(\omega + k)y^2 - k}{\omega^2 - k^2} e^{-\frac{1}{2}y^2} \sin(kx - \omega t) \right) \quad (\text{F.0.2}) \end{aligned}$$

次に速度ベクトルに作用する圧力分布の緯度, 経度, 時間変化を考える. (2.4.78) より, $n = 1, k \neq 0$ の時, ジオポテンシャルは次の様に表される:

$$\Phi(x, y, t) = \operatorname{Re} \left[\frac{i}{2} \left(\frac{1}{\omega - k} H_2 - \frac{2}{\omega + k} H_0 \right) e^{-\frac{1}{2}y^2} e^{i(kx - \omega t)} \right]$$

$$= -2 \frac{(\omega + k)y^2 - \omega}{\omega^2 - k^2} e^{-\frac{1}{2}y^2} \sin(kx - \omega t), \quad (\text{F.0.3})$$

となる。したがって、ジオポテンシャルは赤道対称な分布をしながら $u(x, y, t)$ と同位相で振動することがわかる。

次に、圧力傾度力の成分を計算する。(F.0.3) より、圧力傾度力の x, y 成分は次の様に表される:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2k \frac{(\omega + k)y^2 - \omega}{\omega^2 - k^2} e^{-\frac{1}{2}y^2} \cos(kx - \omega t), \quad (\text{F.0.4})$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2y \frac{-(\omega + k)y^2 + 3\omega + 2k}{\omega^2 - k^2} e^{-\frac{1}{2}y^2} \sin(kx - \omega t). \quad (\text{F.0.5})$$

したがって、圧力傾度力の x 成分は緯度 $\pm \sqrt{\omega/(\omega + k)}$ で 0 となり、 y 成分は緯度 $\pm \sqrt{(3\omega + 2k)/(\omega + k)}$ で 0 となる。

最後に、速度ベクトルの時間変化に対するコリオリ力と圧力傾度力の寄与を考察するための情報として、コリオリ力と圧力傾度力の振幅の絶対値が等しくなる緯度を計算しておく。はじめに、東西方向の運動方程式に於けるコリオリ力と圧力傾度力の振幅の絶対値が等しくなる緯度を求める。 yv と $-\partial\Phi/\partial x$ の振幅の絶対値が等しくなる条件は、

$$\begin{aligned} 2y^2 &= -2k \frac{(\omega + k)y^2 - \omega}{\omega^2 - k^2}, \\ \{(\omega^2 - k^2) + k(\omega + k)\} y^2 &= k\omega, \\ y &= \pm \sqrt{\frac{k}{\omega + k}}. \end{aligned} \quad (\text{F.0.6})$$

これは、東西流速が 0 となる緯度に等しい。ちなみに、振幅 (絶対値ではない) の等しくなる条件を求めると次の様になる:

$$\begin{aligned} 2y^2 &= 2k \frac{(\omega + k)y^2 - \omega}{\omega^2 - k^2}, \\ \{(\omega^2 - k^2) - k(\omega + k)\} y^2 &= -k\omega, \\ y &= \pm \sqrt{\frac{k\omega}{(\omega + k)(2k - \omega)}}. \end{aligned} \quad (\text{F.0.7})$$

この様に $2k - \omega < 0$ の場合には振幅が等しくなることは無い。本ノートでは、低波数と高波数の境界を東西方向の圧力傾度力とコリオリ力の寄与がほぼ等しくなるところをおおよそ平面分布図から私的に判断して決めているが、その様に決めた低波数の場合には $2k - \omega < 0$ となり振幅が等しくなる緯度を求めることが出来ない。一方、高波数の場合には $2k - \omega > 0$ となり振幅が等しくなる緯度を求めることが可能になる。この様な点で、 $2k - \omega$ の符号は、低波数から高波数へレジームがシフトする際の境界を決める条件となる可能性がある。

次に南北方向の運動方程式に於けるコリオリ力と圧力傾度力の振幅が等しくなる緯度を求める. $-yu$ と $-\partial\Phi/\partial y$ の振幅の絶対値が等しくなる条件は,

$$2y \frac{(\omega + k)y^2 - k}{\omega^2 - k^2} = 2y \frac{-(\omega + k)y^2 + 3\omega + 2k}{\omega^2 - k^2},$$

$$y \{2(\omega + k)y^2 - k - (3\omega + 2k)\} = 0$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}. \quad (\text{F.0.8})$$

よって, k, ω の値によらず一定値を取る.

Appendix G

$n = 2, k = 0$ の慣性重力波の物理量

本章では、第 4.4 節でまとめた特徴が得られる理論的背景について、第 2 章の結果に基づき $n = 2, k = 0$ の慣性重力波の構造を支配する諸量をまとめておく。

(2.4.76), (2.4.77) より, $n = 2, k = 0$ の時, 東西・南北風速は次の様に表される:

$$\begin{aligned} (u(x, y, t), v(x, y, t)) &= \left(\operatorname{Re} \left[\frac{i}{2} \left(\frac{1}{\omega} H_3 + \frac{4}{\omega} H_1 \right) e^{-\frac{1}{2}y^2} e^{i(-\omega t)} \right], \operatorname{Re} \left[H_2 e^{-\frac{1}{2}y^2} e^{i(-\omega t)} \right] \right) \\ &= \left(\frac{2}{\omega} y(2y^2 - 1) e^{-\frac{1}{2}y^2} \sin \omega t, 2(2y^2 - 1) e^{-\frac{1}{2}y^2} \cos \omega t \right). \quad (\text{G.0.1}) \end{aligned}$$

ただし, $H_1 = 2y, H_2 = 4y^2 - 2, H_3 = 8y^3 - 12y$ を用いた. (G.0.1) より, 東西風の振幅は, 赤道と $\pm 1/\sqrt{2}$ で 0 となり赤道反対称な分布をすることが分かる. 南北風の振幅は, 緯度 $\pm 1/\sqrt{2}$ で 0 となり赤道対称な分布をする. したがって, 速度ベクトルは赤道反対称な分布をする. また, 南北風は東西風と比べて $1/4$ 周期だけ位相がずれている. これより, 速度ベクトルは北半球で時計周り, 南半球では反時計周りの回転をすることが分かる.

次に, 速度ベクトルの大きさを計算すると以下の様になる:

$$u(x, y, t)^2 + v(x, y, t)^2 = \left(\frac{4}{\omega^2} y^2 (2y^2 - 1)^2 \sin^2 \omega t + (4y^2 - 2)^2 \cos^2 \omega t \right) e^{-y^2} \quad (\text{G.0.2})$$

(G.0.2) より, 速度ベクトルの大きさは緯度を固定しても時間により変化することがわかる. 速度ベクトルの大きさが時間変化しないのは, $y = \pm\sqrt{5}, \pm 1/\sqrt{2}$ の場合である. このうち, $y = \pm 1/\sqrt{2}$ は速度ベクトルの大きさが 0 となる緯度を表す. $y = \pm\sqrt{5}$ では, 後で見るように圧力傾度力が 0 となり, コリオリ力だけが働いている.

次に速度ベクトルの方向の緯度分布を調べる. 東西風と南北風の大きさの比は,

$$\frac{\frac{2}{\omega} y(2y^2 - 1) e^{-\frac{1}{2}y^2} \sin \omega t}{(4y^2 - 2) e^{-\frac{1}{2}y^2} \cos \omega t} = \frac{y \tan \omega t}{\omega}, \quad (\text{G.0.3})$$

となり, 南北風の大きさに対する東西風の大きさは高緯度ほど大きくなっていて, 高緯度のベクトルほど赤道側を向くことが分かる. (G.0.3) と (4.1.5) を比べて分かるように, $k = 0$ の場合には東西風と南北風の大きさの比は n の値によらず $y \tan \omega t / \omega$ で決まる. なぜなら (2.4.76), (2.4.77) より

$$\begin{aligned} \frac{u(y, t)}{v(y, t)} &= \operatorname{Re} \left[\frac{i(1/2\omega)(H_{n+1} + 2nH_{n-1})e^{-\omega t}}{H_n e^{-\omega t}} \right] \\ &= \frac{1}{2\omega} \frac{H_{n+1} + 2nH_{n-1}}{H_n} \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t} \\ &= \frac{y \tan \omega t}{\omega}, \end{aligned} \quad (\text{G.0.4})$$

となるからである. ここで, (2.2.42) の関係 ($H_{n+1} - 2yH_n + 2nH_{n-1} = 0$) を用いた. n の値が大きくなるにつれて ω は大きくなるから, (G.0.4) は, 同じ緯度であっても n が増加すれば南北風の大きさに対する東西風の大きさは小さくなることを示している.

次に速度ベクトルに作用する圧力分布の緯度, 時間変化を考える. (2.4.78) より, $n = 2, k = 0$ の時, ジオポテンシャルは次の様に表される:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, t) &= \operatorname{Re} \left[\frac{i}{2} \left(\frac{1}{\omega} H_3 - \frac{4}{\omega} H_1 \right) e^{-\frac{1}{2}y^2} e^{i(-\omega t)} \right] \\ &= \frac{2}{\omega} y(2y^2 - 5) e^{-\frac{1}{2}y^2} \sin \omega t, \end{aligned} \quad (\text{G.0.5})$$

となる. したがって, ジオポテンシャルは赤道反対称な分布をしながら $u(x, y, t)$ と同位相で振動することがわかる.

次に, 圧力傾度力の成分を計算する. (G.0.5) より, 圧力傾度力の x, y 成分は次の様に表される:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x}, -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) &= \left(0, -\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{2}{\omega} y(2y^2 - 5) \right\} \sin \omega t \right) \\ &= \left(0, -\frac{2}{\omega} (-2y^4 + 11y^2 - 5) e^{-\frac{1}{2}y^2} \sin \omega t \right) \\ &= \left(0, +\frac{2}{\omega} (2y^2 - 1)(y^2 - 5) e^{-\frac{1}{2}y^2} \sin \omega t \right) \end{aligned} \quad (\text{G.0.6})$$

したがって, 圧力傾度力の y 成分は緯度 $\pm 1/\sqrt{2}, \pm\sqrt{5}$ で 0 となり, $\pm 1/\sqrt{2}, \pm\sqrt{5}$ 度を境界として圧力傾度力は符号を変える.

Appendix H

$$n = 0, k = 0$$

次に速度ベクトルに作用する圧力分布の緯度, 時間変化を考える. (2.4.69) より, $n = 0, k = 0$ の時, ジオポテンシャルは次の様に表される:

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, t) &= \operatorname{Re} \left[\frac{i}{\omega} y H_0 e^{-\frac{1}{2}y^2} e^{i(-\omega t)} \right] \\ &= \frac{1}{\omega} y e^{-\frac{1}{2}y^2} \sin \omega t,\end{aligned}\tag{H.0.4}$$

となる. したがって, ジオポテンシャルは赤道反対称な分布をしながら $u(x, y, t)$ と同位相で振動することがわかる.

次に, 圧力傾度力の成分を計算する. (H.0.4) より, 圧力傾度力の x, y 成分は次の様に表される:

$$\begin{aligned}\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x}, -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) &= \left(0, -\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{\omega} y e^{-\frac{1}{2}y^2} \right\} \sin \omega t \right) \\ &= \left(0, -\frac{1}{\omega} (1 - y^2) e^{-\frac{1}{2}y^2} \sin \omega t \right).\end{aligned}\tag{H.0.5}$$

したがって, 圧力傾度力の y 成分は緯度 ± 1 で 0 となり, ± 1 度を境界として圧力傾度力は符号を変える.

Appendix I

中緯度ロスビー波

本章では、中緯度に於いて f が緯度変化することにより存在する波動を考える。これらは **ロスビー波** と呼ばれ、大気中における波動の場合、その空間スケールは非常に大きい。これが **惑星波** と呼ばれる由縁である。一方、海洋の場合、その波長はわずか 100km 程度である。ロスビー波の周波数は、 $\omega \ll f$ の場合に対応する。振動数が f と比べてはるかに小さいために、時間微分項はコリオリ力や圧力傾度力とくらべて小さいオーダーを持つ。このような地衝流に近い運動のことを、**準地衝流運動** と呼んでいる。

I.1 準地衝流渦度方程式

ロスビー波の定式化のため、本節では準地衝流渦度方程式を導出する。簡単のため、 β 平面近似は $\beta y \ll f_0$ の場合に妥当であるとする（これは、大気の全球規模のロスビー波の場合には適当ではない）。以下では、平均流を 0 とした場合の定式化を行い、最後に一様な平均流を重ね合わせることにする。また、速度場は、最も低次のオーダーでは地衝流平衡にあるとする。

浅水波の場合のポテンシャル渦度方程式から出発する：

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{f + \zeta}{h} \right) = 0 \quad (\text{I.1.1})$$

上式を展開して

$$h \frac{D}{Dt} (f + \zeta) - (f + \zeta) \frac{Dh}{Dt} = 0 \quad (\text{I.1.2})$$

$h = H + \eta$ (ただし、 H は擾乱の無い基本場の層厚、 η は表面変位) とすると、

$$(H + \eta) \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \beta v \right) - (f_0 + \zeta) \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = 0 \quad (\text{I.1.3})$$

ここで, $Df/Dt = v(df/dy) = \beta v$ である. また, β 平面近似では df/dy を含む項を除いて f の緯度変化は考えないので, f を含む項は f_0 とした. 小さな擾乱成分の場合 (擾乱成分はロスビー数のオーダーであるから), (I.1.3) において 2 次の非線形項は無視することが出来る. したがって, 線形化を施すと次式を得る:

$$H \frac{\partial \zeta}{\partial t} + H\beta v - f_0 \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad (\text{I.1.4})$$

これは, 線形化したポテンシャル渦度方程式である. ここで, 初めの仮定より最低次の速度場はほぼ地衝流平衡

$$\begin{aligned} u &\simeq -\frac{g}{f} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ v &\simeq \frac{g}{f} \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{I.1.5})$$

にあるから¹, (I.1.4) 式より準地衝流渦度方程式を得ることができる. (I.1.5) を用いて渦度表記を行うと次式を得る:

$$\zeta = \frac{f}{f_0} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) \quad (\text{I.1.6})$$

上式を (I.1.4) に代入して次式を得る:

$$\frac{gH}{f_0} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) + \frac{gH\beta}{f_0} \frac{\partial \eta}{\partial x} - f_0 \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad (\text{I.1.7})$$

$c = \sqrt{gH}$ を用いて書き換えると,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} - \frac{f_0^2}{c^2} \eta \right) + \beta \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (\text{I.1.8})$$

これが, 線形化した準地衝流渦度方程式である. c/f_0 はロスビーの変形半径である.

I.2 ロスビー波の分散関係式

(I.1.8) の解を次のように仮定する:

$$\eta = \hat{\eta} e^{i(kx+ly-\omega t)} \quad (\text{I.2.9})$$

ここで, ω は正の値として扱い, k, l の符号は位相伝播の方向を決めるものとする. この η を (I.1.8) に代入して以下の関係式を得る:

$$\omega = -\frac{\beta k}{k^2 + l^2 + f_0^2/c^2} \quad (\text{I.2.10})$$

¹ 地衝流平衡にある速度場では, 水平発散は厳密に 0 であり, $\partial \eta / \partial t = 0$ となるが, (I.1.4) では $\partial \eta / \partial t = 0$ とはしない. これは, 地衝流平衡からのずれが流れの時間発展を記述するからであり, 時間微分項を残しておく必要があるためである.

これは、ロスビー波の分散関係式である。この分散関係の波数 k と l に関する非対称性は、ロスビー波の運動が水平方向に等方性を持たないことを意味している (これは β 効果によるものである)。 (I.2.10) は、一層の一樣流体について求めたものであるが、成層のある流体の場合には $c = \sqrt{g'H}$ (reduced gravity model), あるいは、 $c = NH/n\pi$ (連続成層モデルの第 n モード) とすれば良い (ただし、 $g' = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_2$)。 順圧モードの場合、 c は非常に大きいので f_0^2/c^2 は 0 として良い。

k, l を水平軸にとり、 ω を鉛直軸にとると、(I.2.10) の ω を分散曲線として描くことが出来る (図 I.1)。 分散関係式 (I.2.10) より、

$$\left(k + \frac{\beta}{2\omega}\right)^2 + l^2 = \left(\frac{\beta}{2\omega}\right)^2 - \frac{f_0^2}{c^2} \quad (\text{I.2.11})$$

となるから、 ω 一定のコンターは円を描く。

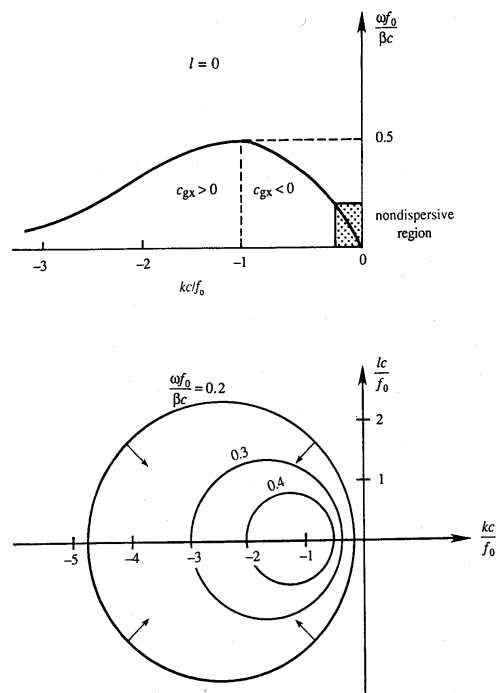


Fig. 13.29 Dispersion relation $\omega(k, l)$ for a Rossby wave. The upper panel shows ω versus k for $l=0$. Regions of positive and negative group velocity c_{gx} are indicated. The lower panel shows a plan view of the surface $\omega(k, l)$, showing contours of constant ω on a kl -plane. The values of $\omega f_0/\beta c$ for the three circles are 0.2, 0.3, and 0.4. Arrows perpendicular to ω contours indicate directions of group velocity vector \mathbf{c}_g . [Adapted from Gill (1982).]

図 I.1: ロスビー波の分散曲線 $\omega(k, l)$ 。上の図は $l=0$ とした場合の k と ω の関係を示している。下の図は $k-l$ 平面から見た場合の ω のコンターを示している。3つの円は、 $\omega f_0/\beta c$ が、0.2, 0.3, 0.4 の場合を示している。 ω のコンターに垂直な矢印は、群速度ベクトル \mathbf{c}_g の方向を示している。

群速度の定義

$$\mathbf{c}_g = \mathbf{i} \frac{\partial \omega}{\partial k} + \mathbf{j} \frac{\partial \omega}{\partial l} \quad (\text{I.2.12})$$

より, c_g の方向は ω のコンターに垂直であることが分かる. 図 I.1 より $l = 0$ の場合, 振動数が最大になるのは, $kc/f_0 = -1$ の場合であることが分かる. これより, 振動数が最大になる場合でもその大きさはコリオリ周期よりもはるかに小さいことが分かる.

(I.2.10) より, 東西方向の位相速度は以下のようになる:

$$c_x = \frac{\omega}{k} = -\frac{\beta}{k^2 + l^2 + f_0^2/c^2} \quad (\text{I.2.13})$$

このように c_x が常に負の値を取ることから, 位相の伝播はいつも西向きであることがわかる. 位相速度が最大になるのは $k^2 + l^2 \rightarrow 0$ の場合であり, これは図 I.1 の原点付近の領域によって示された非常に大きな波長帯に対応している. この領域では, 波はほぼ非分散であり, 次式で与えられる:

$$c_x = -\frac{\beta c^2}{f_0^2} \quad (\text{I.2.14})$$

ロスビー波はしばしば, ジェット気流の様な強い東向きの平均流と重ね合わせられる. U を東向きの平均流の速度とすると, 観測される東向きの位相速度は以下の様になる:

$$c_x = U - \frac{\beta}{k^2 + l^2 + f_0^2/c^2} \quad (\text{I.2.15})$$

それ故, 定在ロスビー波 ($c_x = 0$) は, 東向きの基本流の流速と西向きの位相速度が相殺したときに形成される.

I.3 速度ベクトル, ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズム

本節では, 中緯度ロスビー波の速度ベクトル, ジオポテンシャルの位相伝搬のメカニズムをまとめる. 位相伝搬のメカニズムの議論には, 前述の線形化した準地衝流渦度方程式を用いる:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{f}{\sigma} \right) = 0$$

波長の長 $\rightarrow 0$ のロスビー長波の場合を考えると, スール σ が z に
 なるの, ... 式の対渦度は $\frac{f}{\sigma}$ に対して $\frac{d}{dt} \left(\frac{f}{\sigma} \right) = 0$ が
 し, $\frac{d}{dt} \left(\frac{f}{\sigma} \right) = 0$ のに渦化, $\frac{d}{dt} \left(\frac{f}{\sigma} \right) = 0$, 渦度に渦化
 が $\frac{d}{dt} \left(\frac{f}{\sigma} \right) = 0$ ンスした

たし, $\frac{d}{dt} \left(\frac{f}{\sigma} \right) = 0$ の地衝の用たに, 方に度
 , $\frac{d}{dt} \left(\frac{f}{\sigma} \right) = 0$ 度の準地衝にし, の

