# 浅水波方程式

竹広 真一

2016/01/13

密度一定流体の運動方程式・連続の式から浅水波方程式を導出する. 水平スケールに比べて鉛直スケールが十分小さい運動であることを仮定する.

## 1 浅水波方程式を考える状況

回転系における密度一定流体の支配方程式から出発する. 回転の角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ と重力 $\boldsymbol{g}$ の向きは平行であるものとし, その向きに $z$ 軸をとる (図 1).

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} &= 0, && (1)\\
\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}-fv &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, && (2)\\
\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+fu &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, && (3)\\
\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-\rho g, && (4)
\end{aligned}
$$

ただし, $f=2\mid\boldsymbol{\Omega}\mid$, $g=\mid\boldsymbol{g}\mid$, $\rho=\mathrm{const.}$ である.

境界条件は

$$w = u\frac{\partial h_B}{\partial x} + v\frac{\partial h_B}{\partial y} \quad \text{at} \quad z = h_B(x, y), \tag{5}$$

$$w = \frac{dh}{dt}, \quad p = p_s(\text{const.}) \quad \text{at} \quad z = h(x, y, t). \tag{6}$$

図 1. 浅水波方程式を考える座標系

# 2 浅水波方程式の導出

## 2.1 速度のスケーリング

運動の水平スケールを $L$, 鉛直スケールを $D$ とする．運動は鉛直スケールが水平スケールに比べて十分小さいものを考える．すなわち,

$$\delta \equiv \frac{D}{L} \ll 1,$$

である.

水平速度の特徴的な大きさを $U$, 鉛直速度を $W$ とする．これらを用いて連続の式を無次元化する.

$$\begin{aligned} (x, y) &= L(x_*, y_*), \\ z &= Dz_*, \\ (u, v) &= U(u_*, v_*), \\ w &= Ww_*. \end{aligned}$$

$*$ は無次元量であることを示す．これらを (1) に代入すると

$$\frac{\partial u_*}{\partial x_*}+\frac{\partial v_*}{\partial y_*}+\frac{1}{\delta}\frac{W}{U}\frac{\partial w_*}{\partial z_*}=0, \tag{7}$$

左辺第 3 項だけではバランスできないので，少なくともこの項は第 1，2 項と同じ大きさかそれ以下である必要がある．したがって

$$\frac{W}{U}\leq O(\delta)$$

したがって $W=U\delta$ として鉛直速度を無次元化するのが適当である．

## 2.2 圧力のスケーリング

圧力を次のように表現する．

$$p=p_S-\rho g D z_*+\tilde{P}\tilde{p}_*(x_*,y_*,z_*,t_*)+P\hat{p}_*(x_*,y_*,t_*). \tag{8}$$

$p_s$ は表面での圧力（定数），$-\rho g D z_*$ は重力にバランスする圧力，$\tilde{P}\tilde{p}(x_*,y_*,z_*,t_*)$ は鉛直方向の加速度運動にバランスする圧力，$P\hat{p}_*(x_*,y_*,t_*)$ は水平方向の加速度運動のバランスにのみ寄与する圧力である．

$P,\tilde{P}$ を見積もるために運動方程式を無次元量で表す．圧力の表現を (2)〜(4) に代入すると

$$\begin{aligned}
\frac{U}{T}\frac{\partial u_*}{\partial t_*}+\frac{U^2}{L}\left(u_*\frac{\partial u_*}{\partial x_*}+v_*\frac{\partial u_*}{\partial y_*}+w_*\frac{\partial u_*}{\partial z_*}\right)-Ufv_* &= -\frac{P}{\rho L}\frac{\partial \hat{p}_*}{\partial x_*}-\frac{\tilde{P}}{\rho L}\frac{\partial \tilde{p}_*}{\partial x_*}, &(9)\\
\frac{U}{T}\frac{\partial v_*}{\partial t_*}+\frac{U^2}{L}\left(u_*\frac{\partial v_*}{\partial x_*}+v_*\frac{\partial v_*}{\partial y_*}+w_*\frac{\partial v_*}{\partial z_*}\right)+Ufu_* &= -\frac{P}{\rho L}\frac{\partial \hat{p}_*}{\partial y_*}-\frac{\tilde{P}}{\rho L}\frac{\partial \tilde{p}_*}{\partial y_*}, &(10)\\
\delta\frac{U}{T}\frac{\partial w_*}{\partial t_*}+\delta\frac{U^2}{L}\left(u_*\frac{\partial w_*}{\partial x_*}+v_*\frac{\partial w_*}{\partial y_*}+w_*\frac{\partial w_*}{\partial z_*}\right) &= -\frac{\tilde{P}}{\rho D}\frac{\partial \tilde{p}_*}{\partial z_*}. &(11)
\end{aligned}$$

ただし, 時間 $t$ は $T$ で無次元化した. (11) より, $\tilde{p}$ のスケール $\tilde{P}$ は

$$\tilde{P} = O\left(\delta\rho D \max\left[\frac{U}{T}, \frac{U^2}{L}\right]\right).$$

一方 (9), (10) より, 水平方向の運動にバランスするための圧力の大きさは

$$P + \tilde{P} = O\left(\rho L \max\left[\frac{U}{T}, \frac{U^2}{L}, Uf\right]\right).$$

したがって

$$\frac{\tilde{P}}{P+\tilde{P}} \leq O\left(\frac{\delta\rho D}{\rho L}\right) = O(\delta^2).$$

水平方向の運動方程式においては, $O(\delta^2)$ の範囲で $\tilde{p}$ を無視できる. このとき (9),(10) は

$$\frac{U}{T}\frac{\partial u_*}{\partial t_*} + \frac{U^2}{L}\left(u_*\frac{\partial u_*}{\partial x_*} + v_*\frac{\partial u_*}{\partial y_*} + w_*\frac{\partial u_*}{\partial z_*}\right) - Ufv_* = -\frac{P}{\rho L}\frac{\partial \hat{p}_*}{\partial x_*}, \tag{12}$$

$$\frac{U}{T}\frac{\partial v_*}{\partial t_*} + \frac{U^2}{L}\left(u_*\frac{\partial v_*}{\partial x_*} + v_*\frac{\partial v_*}{\partial y_*} + w_*\frac{\partial v_*}{\partial z_*}\right) + Ufu_* = -\frac{P}{\rho L}\frac{\partial \hat{p}_*}{\partial y_*}. \tag{13}$$

また, 圧力は

$$p = p_s - \rho g D z_* + P\hat{p}_*(x_*, y_*, t_*) + P\cdot O(\delta^2). \tag{14}$$

これを $z$ で微分すると

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g + \frac{P}{D}\cdot O(\delta^2). \tag{15}$$

(15) は静水圧の式と呼ばれる.

さて, 境界条件より $\hat{p}_*(x_*, y_*, t_*)$ を定める. 表面 $z_* = h_*(x_*, y_*, t_*)$ で圧力が一定 $(P_s)$ であることを用いると

$$P\hat{p}_*(x_*, y_*, t_*) = \rho g D h_*(x_*, y_*, t_*) \tag{16}$$

したがって圧力は次のように表される.

$$p(x, y, t) = \rho g D\{h_*(x_*, y_*, t_*) - z_*\}. \tag{17}$$

## 2.3 浅水波方程式

(12), (13), (17) を次元のある式にもどって考えよう.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) - fv = -\frac{\partial p_0}{\partial x}, \tag{18}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) + fu = -\frac{\partial p_0}{\partial y}, \tag{19}$$

$$p(x, y, t) = \rho g\{h(x, y, t) - z\}. \tag{20}$$

(20) を (18), (19) に代入して

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)-fv=-g\frac{\partial h}{\partial x}, \tag{21}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)+fu=-g\frac{\partial h}{\partial y}, \tag{22}$$

ところで, 水平圧力傾度力 $-g\dfrac{\partial h}{\partial x}$, $-g\dfrac{\partial h}{\partial y}$ は $z$ によらず一定である. そこで水平速度 $u, v$ が $z$ によらないと仮定する [1]. このとき水平方向の運動方程式 (21), (22) は

$$\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-fv = -g\frac{\partial h}{\partial x}, \tag{23}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+fu = -g\frac{\partial h}{\partial y}. \tag{24}$$

最後に連続の式を変型する. (1) を $z$ で積分して境界条件を用いると

$$\begin{aligned}\int_{h_B}^{h}dz\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) &= 0,\\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)(h-h_B)+[w]_{h_B}^{h} &= 0,\end{aligned}$$

よって表面変位の式は

$$\frac{\partial H}{\partial t}+u\frac{\partial H}{\partial x}+v\frac{\partial H}{\partial y}+H\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0. \tag{25}$$

ただし, $H$ は流体の深さ, $H\equiv h-h_B$ である. あるいは, さらに変型して

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(Hu)+\frac{\partial}{\partial y}(Hv)=0. \tag{26}$$

となる.

水平方向の運動方程式 · 表面変位の式をまとめて

[1] 初期に流れが $z$ によらず一様であれば, いつまでも $z$ によらないと期待される.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-fv=-g\frac{\partial h}{\partial x}, \tag{27}$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+fu=-g\frac{\partial h}{\partial y}, \tag{28}$$
$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(Hu)+\frac{\partial}{\partial y}(Hv)=0. \tag{29}$$

これらを浅水波方程式という.

あるいは, 水平方向の Lagrange 微分 $\frac{D}{Dt}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}$ を用いて (27)〜(29) を書き直すと次のようになる.

$$\frac{Du}{Dt}-fv=-g\frac{\partial h}{\partial x}, \tag{30}$$
$$\frac{Dv}{Dt}+fu=-g\frac{\partial h}{\partial y}, \tag{31}$$
$$\frac{DH}{Dt}+H\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0. \tag{32}$$

# 3 ポテンシャル渦度保存則

$-\frac{\partial}{\partial y}\times(27)+\frac{\partial}{\partial x}\times(28)$ を変型すると [2],

$$\frac{D}{Dt}(\zeta+f)+(\zeta+f)\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0.$$

ただし, $\zeta$ は渦度の $z$ 成分

$$\zeta\equiv\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$$

である. また, $\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ は速度の水平発散

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}$$

[2] この変型は $f=f(x,y)$ のときでも正しい

である. (29) を用いて $\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ を消去すると

$$\frac{D}{Dt}(\zeta+f)-(\zeta+f)\frac{1}{H}\frac{DH}{Dt}.$$

両辺を $H$ で割って変型すると

$$\frac{Dq}{Dt}=0, \qquad (33)$$
$$q\equiv\frac{\zeta+f}{H}.$$

$q$ は浅水波方程式系でのポテンシャル渦度, (33) は浅水波方程式系でのポテンシャル渦度保存則である.

# 4 浅水波方程式系の積分保存量

## 4.1 エネルギー保存則

$Hu\times(27)+Hv\times(28)$ を変型すると

$$H\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}(u^2+v^2)\right\}+H\boldsymbol{v}\cdot\nabla\left\{\frac{1}{2}(u^2+v^2)\right\}=-gH\boldsymbol{v}\cdot\nabla h.$$

(29) に $\frac{1}{2}(u^2+v^2)$ をかけて加えると,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}H(u^2+v^2)\right\}+\nabla\cdot\left\{\frac{1}{2}H(u^2+v^2)\cdot\boldsymbol{v}\right\}=-\nabla\cdot(gHh\boldsymbol{v})+gh\nabla\cdot(H\boldsymbol{v}).$$

$\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial h}{\partial t}$ に注意して再度 (29) を用いると, 右辺第 2 項目は $-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}gh^2\right)$ となる. よって,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}H(u^2+v^2)+\frac{1}{2}gh^2\right\}+\nabla\cdot\left\{\left(\frac{1}{2}H(u^2+v^2)+gHh\right)\cdot\boldsymbol{v}\right\}=0. \qquad (34)$$

これが浅水波方程式系のエネルギー保存則である. 境界条件 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=0$ を用いて流体全領域について積分することにより全運動エネルギーの保存則が求まる.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\int_A e\ dxdy = 0, \qquad (35)$$
$$e \equiv \frac{1}{2}H(u^2+v^2) + \frac{1}{2}gh^2.$$

$e$ は単位面積当りの全エネルギーである.

## 4.2 運動量保存則

ここの議論に限り, 次のような特殊な状況を考える.

- 底面の形は $x$ によらず $y$ のみの関数である（$h_B = h_B(y)$）.
- $\beta$ 面を仮定する ($f = f_0 + \beta y$).
- 境界条件は $x$ 軸に平行である.

(27) に $H$, (29) に $u$ をかけて辺々加えると,

$$\frac{\partial}{\partial t}(Hu) + \nabla\cdot(Hu\boldsymbol{v}) - fHv = -g\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}h^2 - h_B h\right)$$

ここで, 左辺 3 項目を次のように変型する.

$$\begin{aligned} fvH &= Hv\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f^2}{2\beta}\right) \\ &= \frac{f^2}{2\beta}\left\{\frac{\partial H}{\partial t} + \nabla\cdot(H\boldsymbol{v})\right\} + H\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{f^2}{2\beta} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{f^2}{2\beta}H\right) + \nabla\cdot\left(\frac{f^2}{2\beta}H\boldsymbol{v}\right) \end{aligned}$$

よって,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{H\left(u - \frac{f^2}{2\beta}\right)\right\} + \nabla\cdot\left\{H\left(u - \frac{f^2}{2\beta}\right)\boldsymbol{v}\right\} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}h^2 - gh_B\right) = 0. \qquad (36)$$

これが運動量保存則（$x$ 成分）である．流体全領域にわたって積分すると

$$
\frac{\partial}{\partial t}\int\int_A m\ dxdy = 0, \qquad (37)
$$
$$
m \equiv H\left(u - \frac{f^2}{2\beta}\right).
$$

# 文献

Pedlosky,J.,1979 : Geophysical Fluid Dynamics. Springer-Verlag. 710pp.

Hayashi,Y.-Y.,Young,W.R.,1987 : Stable and unstable modes of rotating parallel flows in a shallow water. *J.FLuid Mech.*, **184**, 477-504.

Ripa,P.,1983 : General stability conditions for zonal flows in one layer model on the $\beta$-plane or the sphere. *J. Fluid Mech.*,**126**,463-489.