

流体力学 授業資料 (2026-01-26)

8. 遅い粘性流

8.1 遅い流れを表現する方程式

ナビエ・ストークス流体 ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, $\rho = \rho_0 = \text{定数}$)において $\mathbf{v} = 0$ のまわりに線形化する.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1)$$

これをストークス近似 (Stokes's approximation) という. 連続の式は

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2)$$

8.2 定常なストークス流れ

- ストークス近似した方程式の一般的性質

ストークス近似した式 (1) の発散をとると

$$0 = \nabla^2 p. \quad (3)$$

よって, p は調和関数. 回転をとると

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}. \quad (4)$$

- 定常 $\partial/\partial t = 0$ の場合.

渦度方程式は

$$0 = \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \quad (5)$$

となる. 渦度も調和関数になる. 運動方程式は

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (6)$$

となる.

定常なストークス流れを求める一般的な方法は

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_p + \tilde{\mathbf{v}} \quad (7)$$

と速度場を分割し, $\tilde{\mathbf{v}}$ を決定することである. ただし, \mathbf{v}_p は適当なポテンシャル流れであり, 以下を満たす.

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_p = 0, \quad \nabla \times \mathbf{v}_p = 0 \quad (8)$$

したがって,

$$\nabla^2 \mathbf{v}_p = 0 \quad (9)$$

である。分割した速度場をストークス近似の運動方程式に代入すると

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}} \quad (10)$$

となる。

ここで、天下り的に任意のベクトル調和関数 $\xi(\mathbf{x})$

$$\nabla^2 \xi(\mathbf{x}) = 0 \quad (11)$$

を考える。この ξ を用いて

$$\tilde{\mathbf{v}} = \nabla(\mathbf{x} \cdot \xi) - 2\xi \quad (12)$$

$$p = 2\eta \nabla \cdot \xi \quad (13)$$

$(\eta = \nu \rho_0)$ とおくと、

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}} \quad (14)$$

を満たす。よって $\xi(\mathbf{x})$ は定常ストークス流れを表現するものである。

- r^{-1} による展開

物体が存在する場合 r^{-1} で展開して

$$\xi_i = \lambda_i \frac{1}{r} + \lambda_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} + \lambda_{ijk} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \frac{1}{r} + \dots \quad (15)$$

$1/r$ の項だけとると ($\xi = \frac{\lambda}{r}$ と選択したことと同じ), $\tilde{\mathbf{v}}$ と p は以下のように表現される。

$$\tilde{\mathbf{v}} = \nabla(\mathbf{x} \cdot \xi) - 2\xi = \nabla(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\lambda}/r) - 2\boldsymbol{\lambda}/r \quad (16)$$

$$p = 2\eta \nabla \cdot \xi = 2\eta \nabla \cdot (\boldsymbol{\lambda}/r) = 2\eta \boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla \frac{1}{r} \quad (17)$$

- 成分表示

$\xi = \frac{\lambda}{r}$ とおき, $\boldsymbol{\lambda}$ 方向を軸とする極座標系を選ぶ。

xyz 系では $\boldsymbol{\lambda} = (0, 0, \lambda)$ と表され、

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad (18)$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad (19)$$

$$z = r \cos \theta \quad (20)$$

なので、

$$\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\lambda} = \lambda r \cos \theta = z \cdot \lambda \quad (21)$$

である. 極座標では

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \quad (22)$$

なので

$$\tilde{\mathbf{v}} = \nabla(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}) - 2\boldsymbol{\xi} = \nabla(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\lambda}/r) - 2\boldsymbol{\lambda}/r = \nabla(\lambda \cos \theta) - \frac{2}{r}\lambda \mathbf{e}_z \quad (23)$$

ここで,

$$\mathbf{e}_z = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta \quad (24)$$

を使うと,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}} &= \frac{\partial}{\partial r}(\lambda \cos \theta) \cdot \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\lambda \cos \theta) \cdot \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}(\lambda \cos \theta) \cdot \mathbf{e}_\varphi \\ &\quad - \frac{2}{r}\lambda (\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta) \end{aligned} \quad (25)$$

$$= 0 \cdot \mathbf{e}_r - \frac{1}{r}(\lambda \sin \theta) \cdot \mathbf{e}_\theta + 0 \cdot \mathbf{e}_\varphi - \frac{2}{r}\lambda (\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta) \quad (26)$$

$$= -\frac{2}{r}\lambda \cos \theta \mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\lambda \sin \theta \mathbf{e}_\theta \quad (27)$$

これより,

$$\tilde{v}_r = -2\frac{\lambda}{r} \cos \theta, \quad (28)$$

$$\tilde{v}_\theta = \frac{\lambda}{r} \sin \theta, \quad (29)$$

$$\tilde{v}_\phi = 0, \quad (30)$$

$$p = -2\eta \frac{\lambda}{r^2} \cos \theta \quad (31)$$

ただし $\lambda = |\boldsymbol{\lambda}|$ である.

流線関数 $\tilde{\Psi}$ としては, 以下を使えば良い.

$$\tilde{\Psi} = -\lambda r \sin^2 \theta \quad (32)$$

$$\tilde{v}_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \theta} \quad (33)$$

$$\tilde{v}_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial r} \quad (34)$$

これが, ストークス近似の解の最も基本的なもの. ストークス極 (Stokeslet) による流れという.

• 一様流中の球の場合

– 球のまわりのポテンシャル流は

$$\Psi = \frac{1}{2} U r^2 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) = \sin^2 \theta \left(\frac{1}{2} U r^2 - \frac{1}{2} U \frac{a^3}{r} \right), \quad (35)$$

$$v_r = \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) U \cos \theta, \quad (36)$$

$$v_\theta = - \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) U \sin \theta \quad (37)$$

であった. しかし, この解は粘性のある場合の境界条件

$$\mathbf{v} = 0 \quad (r = a) \quad (38)$$

を満たさない. $r = a$ で $v_r = 0$ であるだけ.

- そこでこのポテンシャル流れを参考に, あらためて, ポテンシャル流れ

$$\Psi = \sin^2 \theta \left(\frac{1}{2} Ur^2 - \frac{\beta}{r} \right) \quad (39)$$

を定義する. この流れにストークス極による流れを加えて

$$\Psi = \sin^2 \theta \left(\frac{1}{2} Ur^2 - \frac{\beta}{r} - \lambda r \right) \quad (40)$$

とし, 境界条件 $r = a$ で

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0 \quad (41)$$

を考慮する. $\Psi = 0$ の条件に関しては

$$\Psi(r = a) = \sin^2 \theta \left(\frac{1}{2} U a^2 - \frac{\beta}{a} - \lambda a \right), \quad (42)$$

$$0 = \sin^2 \theta \left(\frac{1}{2} U a^2 - \frac{\beta}{a} - \lambda a \right), \quad (43)$$

$$0 = \frac{1}{2} U a^2 - \frac{\beta}{a} - \lambda a. \quad (44)$$

$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0$ の条件に関しては

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r}(r = a) = \sin^2 \theta \left(U a + \frac{\beta}{a^2} - \lambda \right), \quad (45)$$

$$0 = \sin^2 \theta \left(U a + \frac{\beta}{a^2} - \lambda \right), \quad (46)$$

$$0 = U a + \frac{\beta}{a^2} - \lambda. \quad (47)$$

これより,

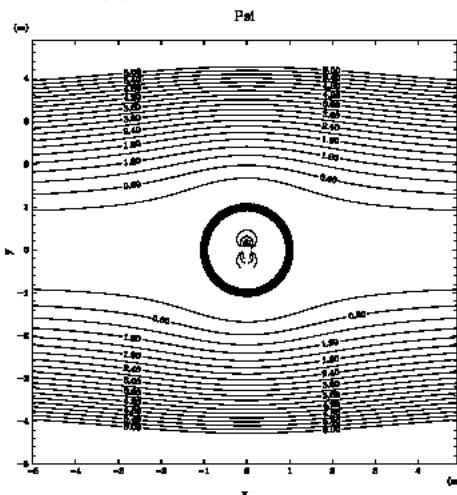
$$\beta = -\frac{1}{4} U a^3, \quad \lambda = \frac{3}{4} U a \quad (48)$$

となる. これより, 球の周りの流れが以下のように求まる.

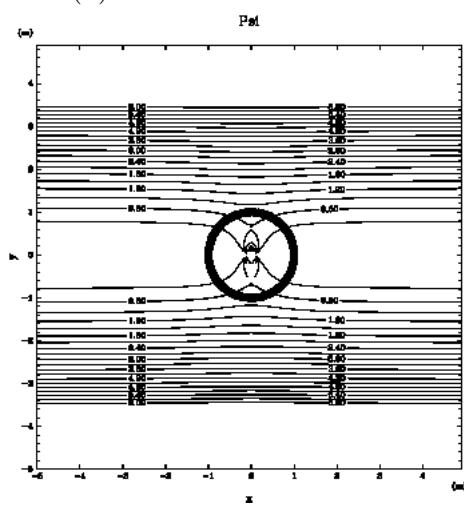
$$\Psi = \sin^2 \theta \begin{pmatrix} \underbrace{\frac{U}{2} r^2 + \frac{U a^3}{4} \frac{1}{r}}_{\text{ポテンシャル流}} & \underbrace{-\frac{3}{4} U a r}_{\text{ストークス極による流れ}} \end{pmatrix} \quad (49)$$

$$= \frac{1}{2} U (r - a)^2 \left(1 + \frac{a}{2r} \right) \sin^2 \theta, \quad (50)$$

(a) 球のまわりの流れ



(b) ポテンシャル流の部分



(c) ストークス極による流れ

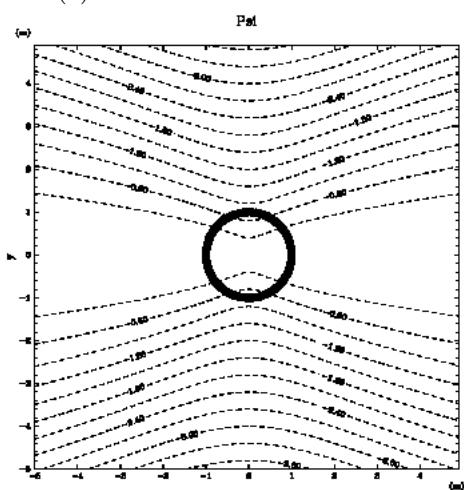


図 1: 粘性流体中の球のまわりの流れの流線関数. 黒太線が円柱表面を表す.

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = U(r-a)^2 \left(1 + \frac{a}{2r}\right) \frac{\cos \theta}{r^2}, \quad (51)$$

$$v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\frac{1}{2} U \left(2 - \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^3} - \frac{3}{2} \frac{a}{r}\right) \sin \theta, \quad (52)$$

$$p = -2\eta \frac{\lambda}{r^2} \cos \theta = -2\eta \frac{3}{4} U a \frac{\cos \theta}{r^2} = -\frac{3}{2} \eta U a \frac{\cos \theta}{r^2} \quad (53)$$

流れ場を 図 1 に示す.

- 球に働く力

圧力は $p = -2\eta \lambda \cos \theta / r^2$ に $\lambda = 3Ua/4$ を代入して

$$p = -\frac{3}{2} \eta U a \frac{1}{r^2} \cos \theta \quad (54)$$

よって球の表面 $r = a$ での法線応力 σ_{rr} , 接線応力 $\sigma_{r\theta}$ はそれぞれ

$$\sigma_{rr} = -p + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{3}{2} \frac{\eta U}{a} \cos \theta \quad (55)$$

$$\sigma_{r\theta} = \eta \left[r \frac{\partial}{\partial r} \frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] = -\frac{3}{2} \frac{\eta U}{a} \sin \theta \quad (56)$$

圧力抵抗 (法線応力の積分)

$$D_p = \int \sigma_{rr} \cos \theta dS \quad (57)$$

$$= \frac{3}{2} \frac{\eta U}{a} 2\pi a^2 \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \quad (58)$$

$$= 2\pi \eta a U \quad (59)$$

摩擦抵抗 (接線応力の積分)

$$D_f = \int \sigma_{r\theta} \sin \theta dS \quad (60)$$

$$= \frac{3}{2} \frac{\eta U}{a} 2\pi a^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \quad (61)$$

$$= 4\pi \eta a U \quad (62)$$

よって全抵抗は

$$D = D_p + D_f = 6\pi \eta a U \quad (63)$$

これをストークスの抵抗法則と言う.

9. 乱流の開始

9.1 流体の無次元方程式

非圧縮の Navier-Stokes 方程式と連続の式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (64)$$

を無次元化する。系の長さスケールを L , 速度スケールを U とする。変数は以下のように無次元化される。

$$\mathbf{x}^* = L \mathbf{x}, \quad (65)$$

$$\mathbf{v}^* = U \mathbf{v}, \quad (66)$$

$$t^* = \frac{L}{U} t, \quad (67)$$

$$p^* = \rho U^2 p \quad (68)$$

ここで, * を付けたものが有次元量。こうすると, 各演算子は以下のように無次元化される。

$$\nabla^* = \frac{1}{L} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{1}{L} \nabla, \quad (69)$$

$$\frac{\partial}{\partial t^*} = \frac{U}{L} \frac{\partial}{\partial t} \quad (70)$$

よって, 連続の式は次のように無次元化される。

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^* = 0, \quad (71)$$

$$\frac{1}{L} \nabla \cdot (U \mathbf{v}) = 0, \quad (72)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (73)$$

Navier-Stokes 方程式は以下のように無次元化される。

$$\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* = -\frac{1}{\rho^*} \nabla^* p^* + \nu \nabla^{2*} \mathbf{v}^*, \quad (74)$$

$$\frac{U^2}{L} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{U^2}{L} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{U^2}{L} \nabla p + \nu \frac{U}{L^2} \nabla^2 \mathbf{v} \quad (75)$$

両辺を $\frac{U^2}{L}$ で割る。

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{\nu}{LU} \nabla^2 \mathbf{v} \quad (76)$$

ここで, レイノルズ数 (Reynolds number)

$$Re \equiv \frac{UL}{\nu} \quad (77)$$

を定義する。 Re は無次元定数。Navier-Stokes 方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} \quad (78)$$

となる。

9.2 レイノルズの相似則

無次元化された Navier-Stokes 方程式はただ 1 つのパラメータ Re を含む。無次元数で流れを記述するとき、 Re が等しい流れはまったく同形になる。これをレイノルズの相似則 (Reynolds's law of similarity) という。

無次元の Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} \quad (79)$$

を解けば、解の速度は

$$\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t; Re) \quad (80)$$

となる。これを有次元に戻すと

$$\mathbf{v}^* = U \mathbf{f}\left(\frac{1}{L} \mathbf{x}^*, \frac{U}{L} t^*; Re\right) \quad (81)$$

定常の場合なら、速度場は $\frac{\mathbf{x}^*}{L}$ と Re で決まる。 Re が等しければ、境界の形が幾何学的に相似な 2 つの流れは、流れの場全体が相似になる。

円柱のまわりの流れでは、 Re が 1000 程度になると乱流的な後流が発生(図 2)。

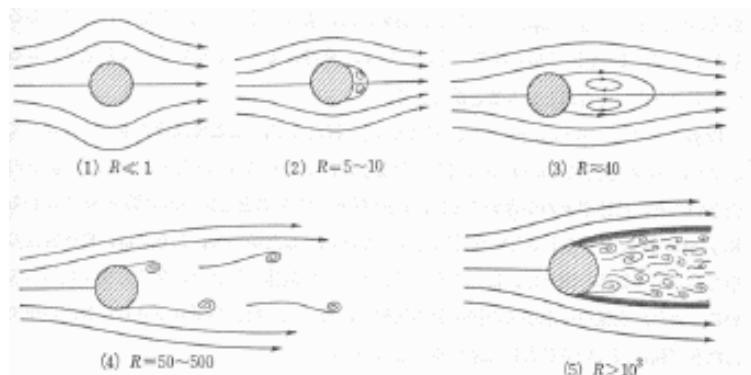


図 2: 様々な Re 数に対する円柱のまわりの流れ。今井 (1973) の図 1-1 を転載。