第 8 章 遅い粘性流体

8.1 遅い流れを表現する方程式

ナビエ・ストークス流体 ($\mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0, \rho = \rho_0 =$ 定数) において $\boldsymbol{v} = 0$ のまわりに線形化する (線形化は音波のときにやった).

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{grad}\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho_0}\mathrm{grad}p + \nu\nabla^2\boldsymbol{v} \tag{8.1}$$

において, 非線形項 $\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{grad}\boldsymbol{v}$ を無視し,

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\mathrm{grad}p + \nu\nabla^2\boldsymbol{v} \tag{8.2}$$

で近似する. これをストークス近似 (Stokes's approximation) という.
連続の式は

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0. \tag{8.3}$$

8.2 定常なストークス流れ

- ストークス近似した方程式の一般的性質

  ストークス近似が成り立つ場合

  $$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\mathrm{grad}p + \nu\nabla^2\boldsymbol{v}. \tag{8.4}$$

  発散をとると, $\mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0$ なので

  $$0 = \nabla^2 p \tag{8.5}$$

  よって, p は調和関数.

  一方, 渦度をとると

  $$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nu\nabla^2\boldsymbol{\omega} \tag{8.6}$$

  となる. 熱伝導方程式と同じ形.

- 定常 $\partial/\partial t = 0$ の場合.

  渦度方程式は

$$0 = \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \tag{8.7}$$

となる. 渦度も調和関数になる.

定常の場合, 運動方程式は

$$0 = -\frac{1}{\rho_0}\mathrm{grad}p + \nu\nabla^2\boldsymbol{v}. \tag{8.8}$$

となる. これを解く.

定常なストークス流れを求める一般的な方法は

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_p + \tilde{\boldsymbol{v}} \tag{8.9}$$

と速度場を分割し, $\tilde{\boldsymbol{v}}$ を決定することである. ただし, $\boldsymbol{v}_p$ は適当なポテンシャル流れであり,

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}_p = 0, \quad \mathrm{rot}\boldsymbol{v}_p = 0 \tag{8.10}$$

したがって,

$$\nabla^2\boldsymbol{v}_p = 0 \tag{8.11}$$

である.

分割した速度場をストークス近似の運動方程式に代入すると

$$0 = -\frac{1}{\rho_0}\mathrm{grad}p + \nu\nabla^2\tilde{\boldsymbol{v}} \tag{8.12}$$

任意のベクトル調和関数 $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})$

$$\nabla^2\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{8.13}$$

を用いて

$$\tilde{\boldsymbol{v}} = \mathrm{grad}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}) - 2\boldsymbol{\xi} \tag{8.14}$$

$$p = 2\eta\,\mathrm{div}\boldsymbol{\xi} \tag{8.15}$$

$(\eta = \nu\rho_0)$ とおくと,

$$0 = -\frac{1}{\rho_0}\mathrm{grad}p + \nu\nabla^2\tilde{\boldsymbol{v}} \tag{8.16}$$

を満たす. よって $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})$ は定常ストークス流れを表現するものである.

- 参考: $\boldsymbol{\xi}$ を用いた $\tilde{\boldsymbol{v}}$ と p の表現の導出

  ベクトル調和関数 $\boldsymbol{\xi}$ は次の式を満たす.

$$\nabla^2(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial^2}{\partial {x_j}^2}(x_i\xi_i) \tag{8.17}$$

$$= \underbrace{\frac{\partial^2 x_i}{\partial {x_j}^2}}_{0\text{ になる}}\xi_i + 2\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + x_i\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial {x_j}^2} \tag{8.18}$$

$$= 2\delta_{ij}\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \boldsymbol{x}\cdot\underbrace{\nabla^2\boldsymbol{\xi}}_{\text{定義により }0} \tag{8.19}$$

$$= 2\mathrm{div}\boldsymbol{\xi} \tag{8.20}$$

$\eta\nabla^2\tilde{\boldsymbol{v}} = \mathrm{grad}p$ の一般解について考える.

$$\tilde{\boldsymbol{v}} = \mathrm{grad}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}) - 2\boldsymbol{\xi} \tag{8.21}$$

で定義される $\tilde{\boldsymbol{v}}$ は以下を満たす.

$$\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{v}} = \mathrm{div}[\mathrm{grad}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}) - 2\boldsymbol{\xi}] = \nabla^2(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}) - 2\mathrm{div}\boldsymbol{\xi} \tag{8.22}$$

$$= 0 \quad ((8.20)\text{ より }) \tag{8.23}$$

これより,

$$\nabla^2\tilde{\boldsymbol{v}} = \mathrm{grad}\underbrace{\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{v}}}_{\text{上式より }0} - \mathrm{rotrot}\tilde{\boldsymbol{v}} \tag{8.24}$$

$$= -\mathrm{rotrot}\left\{\mathrm{grad}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}) - 2\boldsymbol{\xi}\right\} \tag{8.25}$$

$$= 2\mathrm{rotrot}\boldsymbol{\xi} \tag{8.26}$$

$$= 2\left\{\mathrm{graddiv}\boldsymbol{\xi} - \nabla^2\boldsymbol{\xi}\right\} \tag{8.27}$$

$$= 2\mathrm{graddiv}\boldsymbol{\xi} \tag{8.28}$$

よって, $\eta\nabla^2\tilde{\boldsymbol{v}} = \mathrm{grad}p$ は

$$2\eta\mathrm{graddiv}\boldsymbol{\xi} = \mathrm{grad}p \tag{8.29}$$

となるので,

$$p = 2\eta\mathrm{div}\boldsymbol{\xi} \tag{8.30}$$

なら, 式を満たすことになる.

- ストークス極 (Stokeslet) による流れ

  物体が存在する場合 r^{-1} で展開して

$$\xi_i = \lambda_i \frac{1}{r} + \lambda_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} + \lambda_{ijk} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \frac{1}{r} + \cdots \tag{8.31}$$

  $1/r$ の項だけとると ($\boldsymbol{\xi} = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{r}$ と選択したことと同じ),

$$\tilde{\boldsymbol{v}} = \mathrm{grad}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\xi}) - 2\boldsymbol{\xi} = \mathrm{grad}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\lambda}/r) - 2\boldsymbol{\lambda}/r \tag{8.32}$$

$$p = 2\eta \mathrm{div}\boldsymbol{\xi} = 2\eta \mathrm{div}(\boldsymbol{\lambda}/r) = 2\eta\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathrm{grad}\frac{1}{r} \tag{8.33}$$

- 成分表示

  $\boldsymbol{\xi} = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{r}$ とおき, $\boldsymbol{\lambda}$ 方向を軸とする極座標系を選ぶ.

  xyz 系では $\boldsymbol{\lambda} = (0, 0, \lambda)$ と表され, [1]

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \tag{8.34}$$

$$y = r \sin\theta \sin\varphi, \tag{8.35}$$

$$z = r \cos\theta \tag{8.36}$$

  なので,

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\lambda} = \lambda r \cos\theta = z \cdot \lambda \tag{8.37}$$

  である. 極座標では

$$\mathrm{grad} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \tag{8.38}$$

  なので

$$\tilde{\boldsymbol{v}} = \mathrm{grad}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\xi}) - 2\boldsymbol{\xi} \tag{8.39}$$

$$= \mathrm{grad}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\lambda}/r) - 2\boldsymbol{\lambda}/r = \mathrm{grad}(\frac{\lambda r \cos\theta}{r}) - \frac{2}{r}\lambda \boldsymbol{e}_z \tag{8.40}$$

$$= \mathrm{grad}(\lambda \cos\theta) - \frac{2}{r}\lambda \boldsymbol{e}_z \tag{8.41}$$

  ここで,

$$\boldsymbol{e}_z = \cos\theta \boldsymbol{e}_r - \sin\theta \boldsymbol{e}_\theta \tag{8.42}$$

[1]先に $\boldsymbol{\lambda}$ を極座標表示しておくべきでは

を使うと,

$$\tilde{\boldsymbol{v}} = \frac{\partial}{\partial r}(\lambda\cos\theta)\cdot\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\lambda\cos\theta)\cdot\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\lambda\cos\theta)\cdot\boldsymbol{e}_\varphi - \frac{2}{r}\lambda\left(\cos\theta\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta\right) \tag{8.43}$$

$$= 0\cdot\boldsymbol{e}_r - \frac{1}{r}(\lambda\sin\theta)\cdot\boldsymbol{e}_\theta + 0\cdot\boldsymbol{e}_\varphi - \frac{2}{r}\lambda\left(\cos\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta\right) \tag{8.44}$$

$$= 0\cdot\boldsymbol{e}_r - \frac{1}{r}(\lambda\sin\theta)\cdot\boldsymbol{e}_\theta + 0\cdot\boldsymbol{e}_\varphi - \frac{2}{r}\lambda\cos\boldsymbol{e}_r + \frac{2}{r}\lambda\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta \tag{8.45}$$

$$= -\frac{2}{r}\lambda\cos\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\lambda\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta \tag{8.46}$$

これより,

$$\tilde{v}_r = -2\frac{\lambda}{r}\cos\theta \tag{8.47}$$

$$\tilde{v}_\theta = \frac{\lambda}{r}\sin\theta \tag{8.48}$$

$$\tilde{v}_\phi = 0 \tag{8.49}$$

$$p = -2\eta\frac{\lambda}{r^2}\cos\theta \tag{8.50}$$

ただし $\lambda = |\boldsymbol{\lambda}|$.
流線関数 $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}$ としては, 以下を使えば良い.

$$\tilde{\boldsymbol{\Psi}} = -\lambda r\sin^2\theta \tag{8.51}$$

$$\tilde{v}_r = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{\Psi}}}{\partial\theta} \tag{8.52}$$

$$\tilde{v}_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{\Psi}}}{\partial r} \tag{8.53}$$

これが, ストークス近似の解の最も基本的なもの. ストークス極による流れという.

- 一様流中の球の場合
  - 球のまわりのポテンシャル流は

$$\boldsymbol{\Psi} = \frac{1}{2}Ur^2\sin^2\theta\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) = \sin^2\theta\left(\frac{1}{2}Ur^2 - \frac{1}{2}U\frac{a^3}{r}\right) \tag{8.54}$$

$$v_r = \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)U\cos\theta \tag{8.55}$$

$$v_\theta = -\left(1 + \frac{a^3}{2r^3}\right)U\sin\theta \tag{8.56}$$

であった (ポテンシャル流の最後のところでやった). しかし, この解は粘性のある場合の境界条件

$$\boldsymbol{v} = 0 \ \ (r = a) \tag{8.57}$$

を満たさない. $r = a$ で $v_r = 0$ であるだけである.

– そこでこのポテンシャル流れを参考に, あらためて, ポテンシャル流れ

$$\Psi = \sin^2\theta\left(\frac{1}{2}Ur^2 - \frac{\beta}{r}\right) \tag{8.58}$$

を定義する. この流れにストークス極による流れを加えて

$$\Psi = \sin^2\theta\left(\frac{1}{2}Ur^2 - \frac{\beta}{r} - \lambda r\right) \tag{8.59}$$

とし, 境界条件 $r = a$ で

$$\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial r} = 0 \tag{8.60}$$

を考慮する. $\Psi = 0$ の条件に関しては

$$\Psi(r = a) = \sin^2\theta\left(\frac{1}{2}Ua^2 - \frac{\beta}{a} - \lambda a\right), \tag{8.61}$$

$$0 = \sin^2\theta\left(\frac{1}{2}Ua^2 - \frac{\beta}{a} - \lambda a\right), \tag{8.62}$$

$$0 = \frac{1}{2}Ua^2 - \frac{\beta}{a} - \lambda a. \tag{8.63}$$

$\frac{\partial\Psi}{\partial r} = 0$ の条件に関しては

$$\frac{\partial\Psi}{\partial r}(r = a) = \sin^2\theta\left(Ua + \frac{\beta}{a^2} - \lambda\right), \tag{8.64}$$

$$0 = \sin^2\theta\left(Ua + \frac{\beta}{a^2} - \lambda\right), \tag{8.65}$$

$$0 = Ua + \frac{\beta}{a^2} - \lambda. \tag{8.66}$$

これより,

$$\beta = -\frac{1}{4}Ua^3, \quad \lambda = \frac{3}{4}Ua \tag{8.67}$$

となる.
この時

$$\Psi = \sin^2\theta\left(\frac{1}{2}Ur^2 + \frac{1}{4}\frac{Ua^3}{r} - \frac{3}{4}Uar\right) \tag{8.68}$$

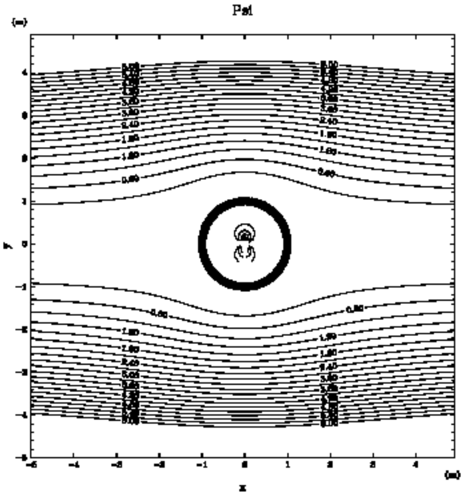
$$= \frac{1}{2}U(r-a)^2(1 + \frac{a}{2r})\sin^2\theta \tag{8.69}$$

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = U(r-a)^2\left(1+\frac{a}{2r}\right)\frac{\cos\theta}{r^2}, \tag{8.70}$$

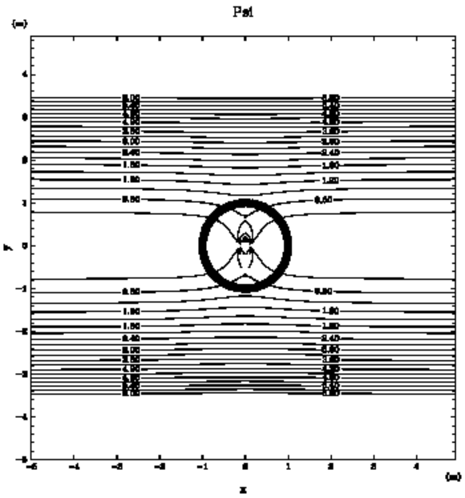
$$v_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\frac{1}{2}U\left(2-\frac{1}{2}\frac{a^3}{r^3}-\frac{3}{2}\frac{a}{r}\right)\sin\theta, \tag{8.71}$$

$$p = -2\eta\frac{\lambda}{r^2}\cos\theta = -2\eta\frac{3}{4}Ua\frac{\cos\theta}{r^2} = -\frac{3}{2}\eta Ua\frac{\cos\theta}{r^2} \tag{8.72}$$

(a) 球のまわりの流れ



(b) ポテンシャル流の部分



(c) ストークス極による流れ

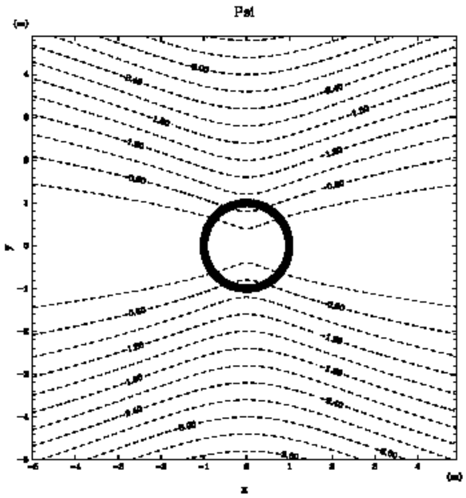


図 8.1: 粘性流体中の球のまわりの流れの流線関数. 黒太線が円柱表面を表す.

- 球に働く力

  圧力は $p = -2\eta\lambda\cos\theta/r^2$ に $\lambda = 3Ua/4$ を代入して

$$p = -\frac{3}{2}\eta Ua\frac{1}{r^2}\cos\theta \tag{8.73}$$

よって球の表面 $r = a$ での法線応力 σ_{rr}, 接線応力 $\sigma_{r\theta}$ はそれぞれ

$$\sigma_{rr} = -p + 2\eta\frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{3}{2}\frac{\eta U}{a}\cos\theta \tag{8.74}$$

$$\sigma_{r\theta} = \eta\left[r\frac{\partial}{\partial r}\frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right] = -\frac{3}{2}\frac{\eta U}{a}\sin\theta \tag{8.75}$$

圧力抵抗 (法線応力の積分) [2]

$$\begin{aligned} D_p &= \int \sigma_{rr}\cos\theta dS && (8.76)\\ &= \frac{3}{2}\frac{\eta U}{a}2\pi a^2\int_0^\pi \cos^2\theta\sin\theta d\theta && (8.77)\\ &= 2\pi\eta a U && (8.78)\end{aligned}$$

摩擦抵抗 (接線応力の積分)

$$\begin{aligned} D_f &= \int \sigma_{r\theta}\sin\theta dS && (8.79)\\ &= \frac{3}{2}\frac{\eta U}{a}2\pi a^2\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta && (8.80)\\ &= 4\pi\eta a U && (8.81)\end{aligned}$$

よって全抵抗は

$$D = D_p + D_f = 6\pi\eta a U \tag{8.82}$$

これをストークスの抵抗法則と言う.

[2] 円柱に働く力を計算した場合の $\int p\cos\theta da\theta$ に対応する式になっている.