

第 9 章

ロスビー波

地球流体特有の状況として、前章で見た重力場のなかの運動であることと共に、回転系での運動であることがあげられる。地球をはじめ諸惑星や太陽などの自転の効果である。現象の時間スケールが自転周期に比べて十分に短ければ、自転の影響は無視できて、慣性系で議論できる。一方、現象の時間スケールが自転周期と同じくらいか、それより長ければ、自転の効果も陽に考慮しなければならない。また、現象の空間規模が大きければ、回転球面上の運動であることが重要になる。すなわち、自転の効果の緯度依存性が基本的な役割を果たす状況である。

この章では、回転球面に特有の波動であるロスビー波 (Rossby waves) を取り上げる。最も基本的な状況として、球面上の 2 次元非発散完全流体を考え、そこでの波動を解析する。復元力をもたらすものは、絶対渦度の保存則であり、基本場の渦度勾配である。まず、基本的な力学を理解するために、渦度ジャンプ面に補足された波動を解析する。つぎに、基本場の渦度勾配が全球に広がった球面領域でのロスビー波をみる。さらに、中緯度域に限った β 平面で、違った幾何条件でのロスビー波をみる。前者が惑星全体を認識した波動であるのに対して、後者は必ずしも惑星全体を認識していない“局所的な”ロスビー波である。

9.1 渦度ジャンプ面に捕捉された波動

重力波の身近な具体例としては水面の波があったが、それは密度の不連続面に捕捉された波動であった。ここでは、まず平面上の 2 次元非発散完全流体の運動で、水面重力波と類似的に渦度ジャンプがある基本場を考えて、それに加えられた擾乱が波動として伝播する様子を示そう。このような流れ場の解析にはコンター力学の手法が有効であるが、ここでは素朴な線型解析に留める。

9.1.1 2 次元非圧縮流の渦度方程式

第 3.3 節でみたように、非圧縮完全流体 ($\rho = \rho_0 = \text{一定}$, $\nu = 0$) の渦度方程式は、式 (3.19) で与えられた：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad} \right) \omega = \frac{D\omega}{Dt} = (\omega \cdot \text{grad})\mathbf{u}. \quad (9.1)$$

ここで、流れが水平 2 次元 ($u = (u, v, 0)$) であるとする、 $\omega = (0, 0, \zeta)$ となり右辺は 0 となるので、渦度方程式の鉛直成分は次のように書ける：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad}\right)\zeta = \frac{D\zeta}{Dt} = 0. \tag{9.2}$$

すなわち、水平 2 次元の非圧縮完全流体では、渦度の鉛直成分 ζ がラグランジュ的保存量になる。

非圧縮なので、流れ関数 $\psi(x, y, t)$ を

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{9.3}$$

として導入すると、渦度方程式の鉛直成分 (9.2) は、

$$\frac{\partial}{\partial t}\zeta + \frac{\partial(\psi, \zeta)}{\partial(x, y)} = 0, \tag{9.4}$$

となる。ここで、 $\zeta = \Delta_2\psi$ であり、 Δ_2 は 2 次元ラプラシアン、 $\partial(\psi, \zeta)/\partial(x, y)$ は 2 次元ヤコビアン (Jacobian) である：

$$\frac{\partial(A, B)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial x}. \tag{9.5}$$

9.1.2 渦度ジャンプ面に捕捉された線型波動

いま、無限に広がる領域で x 方向に流れる帯状流 ($\bar{u}(y), \bar{v}=0$) を基本場とする。帯状流の渦度 $\bar{\zeta}$ が $y > 0$ で $\zeta_1, y < 0$ で 0 と、 $y = 0$ でジャンプしているとして、

$$\bar{u}(y) = \begin{cases} -\zeta_1 y, & (0 \leq y < +\infty), & \text{: 領域 1} \\ 0, & (-\infty < y < 0), & \text{: 領域 2} \end{cases} \tag{9.6}$$

とする (図 9.1a, b)。この基本場に加えられた微小な擾乱の流れ関数を $\psi'(x, y, t)$ として、擾乱に対する線型化した渦度方程式は、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}(y)\frac{\partial}{\partial x}\right)\Delta_2\psi' + \frac{\partial\psi'}{\partial x}\frac{d\bar{\zeta}}{dy} = 0, \tag{9.7}$$

となる。ここで、

$$\psi'(x, y, t) = \text{Re} \left[\Psi(y)e^{ik(x-ct)} \right], \tag{9.8}$$

という型の正弦波解を仮定すると、 $\Psi(y)$ に対する微分方程式が次のよう得られる：

$$(\bar{u} - c) \left(\frac{d^2\Psi}{dy^2} - k^2\Psi \right) + \frac{d\bar{\zeta}}{dy}\Psi = 0. \tag{9.9}$$

基本場の渦度ジャンプがある $y = 0$ 以外の領域では、 $d\bar{\zeta}/dy = 0$ であるから、 $\bar{u} - c \neq 0$ として解くべき微分方程式 (9.9) は以下のように簡単になる：

$$\frac{d^2\Psi}{dy^2} - k^2\Psi = 0. \tag{9.10}$$

境界条件は、 $y = \pm\infty$ で擾乱の振幅が 0 であるとする：

$$\Psi(+\infty) = \Psi(-\infty) = 0. \tag{9.11}$$

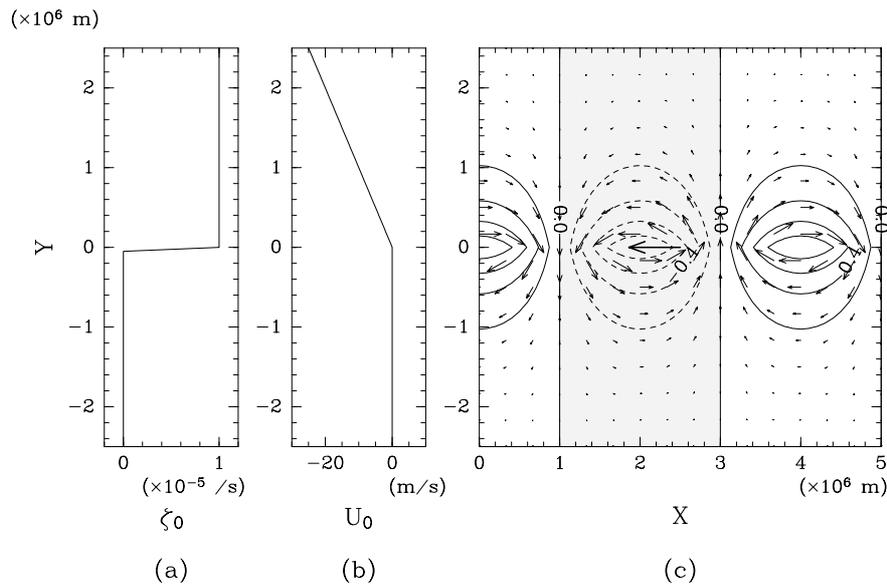


図 9.1: 渦度ジャンプ面に捕捉された波動. (a) 基本帯状流の渦度分布. (b) 基本帯状流の速度分布. (c) 渦度ジャンプ面に捕捉された波の水平構造. 陰影部は $\psi' < 0$ の領域. 水平速度を矢印で示す. 太矢印は, 位相速度の向き.

また, $y = 0$ での解の接続の条件は, $\Psi(y)$ の連続性により,

$$\epsilon \rightarrow 0 \text{ のとき, } \Psi(+\epsilon) = \Psi(-\epsilon), \tag{9.12}$$

となる. また, $y = 0$ で (9.9) の y 微分を差分で置き換えることにより, $d\Psi(y)/dy$ の接続条件は,

$$\epsilon \rightarrow 0 \text{ のとき, } (\bar{u}(0) - c) \left[\frac{d\Psi}{dy} \right]_{-\epsilon}^{+\epsilon} - \Psi(0) \left[\frac{d\bar{u}}{dy} \right]_{-\epsilon}^{+\epsilon} = 0, \tag{9.13}$$

となる.

微分方程式 (9.10) より, 各領域での解 $\Psi(y)$ は,

$$\Psi(y) = \begin{cases} A_1 e^{ky} + B_1 e^{-ky}, & (0 \leq y < +\infty), & \text{: 領域 1} \\ A_2 e^{ky} + B_2 e^{-ky}, & (-\infty < y < 0), & \text{: 領域 2} \end{cases} \tag{9.14}$$

とおける. ここで, $k > 0$ とする. 境界条件 (9.11) より $A_1 = B_2 = 0$ であり, 接続条件 (9.12) より $B_1 = A_2$ である. すなわち, 正弦波解 (9.8) は,

$$\psi'(x, y, t) = e^{-k|y|} \text{Re} \left[A_2 e^{ik(x-ct)} \right], \tag{9.15}$$

となる. 図 9.1 にこの波の水平構造を示す. この擾乱は $y = 0$ から遠ざかるにつれて指数関数的に減衰し, その位相は y 方向には変化しない. これを接続条件 (9.13) に代入して,

$$c = -\frac{\zeta_1}{2k}, \tag{9.16}$$

を得る. c が実数なので, 擾乱は中立である. $\zeta_1 > 0$ として $y = 0$ で基本場の渦度が増加するとすると, $c < 0$ となり, 擾乱は x の負の方向に伝播する. 逆に, 基本場の渦度が減少すると擾乱は x の正の方向に伝播する.

位相速度が波数に反比例している（長波長の波ほど速い）ので、これは分散性の波動である。ポテンシャル渦度方程式が時間に関して 1 階の微分方程式なので、波動解は一つだけである。水面の波のように x の両方向に対称的に波が伝わっていくわけではない。

擾乱の流れ関数は (9.15) で与えられるが、擾乱の渦度場 $\Delta_2 \psi'$ は逆位相、 y 方向の速度 $v' = \partial \psi' / \partial x$ は $\pi/2$ だけ x の負の方向に位相がずれる。結局、この渦度ジャンプを横切る流れによって基本場の渦度が移流されて、擾乱の渦度場が x の負の方向に伝播することになる。

9.2 回転球面上の渦度方程式

回転球面上で静止した流体は、系の自転による惑星渦度だけを持つがその鉛直成分は緯度の関数になっている。すなわち、前節で見た渦度のジャンプ（勾配）が至る所にあるわけで、球面全部を伝播領域とする波動が可能である。この節では、準備として、まず回転球面上の渦度方程式を導出しておく。

9.2.1 球面上の 2 次元非圧縮流の渦度方程式

非圧縮性流体の連続方程式 $\text{div } \mathbf{u} = 0$ は、半径 a の球面上の 2 次元幾何を仮定すると、次のようになる：

$$\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (v \cos \phi) = 0. \quad (9.17)$$

ここで、流線関数 $\psi(\lambda, \phi, t)$ を導入する：

$$u = -\frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}, \quad v = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}. \quad (9.18)$$

流線関数を用いると、渦度の鉛直 (e_r) 成分は次のように与えられる：

$$\begin{aligned} \zeta &= \mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\omega}, \\ &= \frac{1}{a \cos \phi} \left\{ \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial \phi} (u \cos \phi) \right\}, \\ &= \frac{1}{a^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{a^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\cos \phi \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right), \\ &\equiv \Delta_2 \psi. \end{aligned} \quad (9.19)$$

結局、渦度方程式 (9.2) は、球面上で具体的に次のような表式となる：

$$\frac{D\zeta}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \zeta = 0. \quad (9.20)$$

ここで、これを流線関数 $\psi(\lambda, \phi, t)$ を使って書き換えると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta_2 \psi - \frac{1}{a^2 \cos \phi} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \frac{\partial \Delta_2 \psi}{\partial \lambda} + \frac{1}{a^2 \cos \phi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \Delta_2 \psi}{\partial \phi} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \Delta_2 \psi + \frac{1}{a^2 \cos \phi} \frac{\partial (\psi, \Delta_2 \psi)}{\partial (\lambda, \phi)} &= 0. \end{aligned} \quad (9.21)$$

ただし、第 2 項目の $\partial (\psi, \Delta_2 \psi) / \partial (\lambda, \phi)$ は 2 次元ヤコビアンである。

ここで、後ほどの解析を意識して次の座標変換を行なっておく。緯度 ϕ のかわりにサイン緯度 $\mu \equiv \sin \phi$ を用いると、 $d\mu/d\phi = \cos \phi = \sqrt{1 - \mu^2}$ より、速度 (u, v) および 2 次元ラプラシアン (Laplacian) Δ_2 は次になる：

$$u = -\frac{\sqrt{1 - \mu^2}}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \mu}, \quad (9.22)$$

$$v = \frac{1}{a\sqrt{1 - \mu^2}} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}, \quad (9.23)$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \right\} \right]. \quad (9.24)$$

また、流線関数を使った渦度方程式 (9.21) は次のように書ける：

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta_2 \psi + \frac{1}{a^2} \frac{\partial(\psi, \Delta_2 \psi)}{\partial(\lambda, \mu)} = 0. \quad (9.25)$$

9.2.2 回転球面上の 2 次元非圧縮流の渦度方程式

第 2.2.2 節で示した伝統的な近似の下で、2 次元非圧縮完全流体の運動方程式は次のようになる：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) u - \frac{uv \tan \phi}{a} - 2\Omega v \sin \phi = -\frac{1}{\rho_0 a \cos \phi} \frac{\partial p}{\partial \lambda}, \quad (9.26)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) v + \frac{u^2 \tan \phi}{a} + 2\Omega u \sin \phi = -\frac{1}{\rho_0 a} \frac{\partial p}{\partial \phi}. \quad (9.27)$$

これより渦度方程式 (鉛直成分) を求めると、惑星回転 (コリオリ項) による寄与 $e_r \cdot \text{rot}(2\Omega \times \mathbf{u}) = \frac{2\Omega}{a^2} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}$ が加わり、流線関数を用いた表記で次となる：

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta_2 \psi + \frac{1}{a^2} \frac{\partial(\psi, \Delta_2 \psi)}{\partial(\lambda, \mu)} + \frac{2\Omega}{a^2} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = 0. \quad (9.28)$$

ここで、絶対渦度の鉛直成分 $q \equiv \zeta + 2\Omega \mu$ を用いると、

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial(\psi, q)}{\partial(\lambda, \mu)} = \frac{Dq}{Dt} = 0, \quad (9.29)$$

となり、絶対渦度の鉛直成分が、水平 2 次元の流れとともに保存されるラグランジュ保存量となる。これが、回転球面上の 2 次元非圧縮流の渦度方程式である。ここで、 $2\Omega \mu$ は惑星の自転による渦度 (惑星渦度) で、慣用的に f で表記し、コリオリ・パラメータと呼ぶ。また、絶対渦度 (の鉛直成分) q に対して ζ を相対渦度 (の鉛直成分) と呼ぶ。

9.3 ロスビー・ハウルビッツ波

回転球面上の 2 次元非圧縮流の渦度方程式を支配方程式として、そこに含まれる波動解を解析する。このような回転球面に特有の波動をその発見者にちなんでロスビー波と呼ぶ。球面での解析はハウルビッツ (Haurwitz) が最初に行なったので、これからは球面上での解をとくにロスビー・ハウルビッツ波と呼ぶことにする。

9.3.1 支配方程式と基本場と線型擾乱

支配方程式は、回転球面上の 2 次元非圧縮流の渦度方程式で、流線関数 $\psi(\lambda, \phi, t)$ を従属変数とする非線型偏微分方程式である：

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta_2 \psi + \frac{1}{a^2} \frac{\partial(\psi, \Delta_2 \psi)}{\partial(\lambda, \mu)} + \frac{2\Omega}{a^2} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = 0. \quad (9.30)$$

ここで、基本場として静止解 $\bar{u} = \bar{v} = 0$ を考える。すなわち、 $\bar{\psi} = \text{一定}$ 、である。 $\psi(\lambda, \mu, t) = \bar{\psi} + \psi'(\lambda, \mu, t)$ として、微小擾乱 $\psi'(\lambda, \mu, t)$ に対する線型化した支配方程式を求めると、次になる：

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta_2 \psi' + \frac{2\Omega}{a^2} \frac{\partial \psi'}{\partial \lambda} = 0. \quad (9.31)$$

9.3.2 波動解と分散関係式

東西および時間方向に周期性を仮定して、つぎの正弦波解を考える：

$$\psi'(\lambda, \mu, t) = \text{Re}[\Psi(\mu)e^{i(s\lambda - \omega t)}]. \quad (9.32)$$

ここで、 s は整数で、帯状(東西)波数という。すなわち、経度方向に惑星を一周したときの波数である。これを (9.31) に代入して整理すると次になる：

$$\frac{d}{d\mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{d}{d\mu} \right\} \Psi(\mu) - \left(\frac{s^2}{1 - \mu^2} - \frac{2\Omega s}{\omega} \right) \Psi(\mu) = 0. \quad (9.33)$$

これは、両極 $\mu = \pm 1$ で非正則な境界条件をとるストルム-リュウビル (Sturm-Liouville) 型の常微分方程式である (今村, 1976; p.215)。これはルジャンドル (Legendre) の陪微分方程式と呼ばれるもので、一般解は固有値 $-2\Omega s/\omega = n(n+1)$ (n は自然数) に対応する固有関数系 $\{P_n^s(\mu)\}$ ($n \geq |s|$) で与えられる。ここで、 $P_n^s(\mu)$ はルジャンドル陪関数である。結局、渦度方程式 (9.31) の球面領域での解として、次の球面調和関数で書ける波動解が存在する：

$$\psi'(\lambda, \mu, t) = \Psi_0 P_n^s(\mu) e^{i(s\lambda - \omega t)}. \quad (9.34)$$

この波動解をロスビー・ハウルビッツ波と呼ぶ。分散関係式は、上の固有値より次で与えられる：

$$\omega = -\frac{2\Omega s}{n(n+1)}. \quad (9.35)$$

東西方向の位相速度は、 $k = 2\pi/L = 2\pi/(2\pi a/s) = s/a$ より、

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{a\omega}{s} = -\frac{2\Omega a}{n(n+1)}, \quad (9.36)$$

となり、波数によらず $c < 0$ で、西進する。全波数 n が小さいほど、西進速度が大きい。

9.3.3 波の構造と位相の伝播

ロスビー・ハウルビッツ波の流線関数は球面調和関数 $Y_n^s(\lambda, \mu) = P_n^s(\mu)e^{is\lambda}$ で書けて、次の性質がある：

$$\Delta_2 Y_n^s = -n(n+1)Y_n^s. \quad (9.37)$$

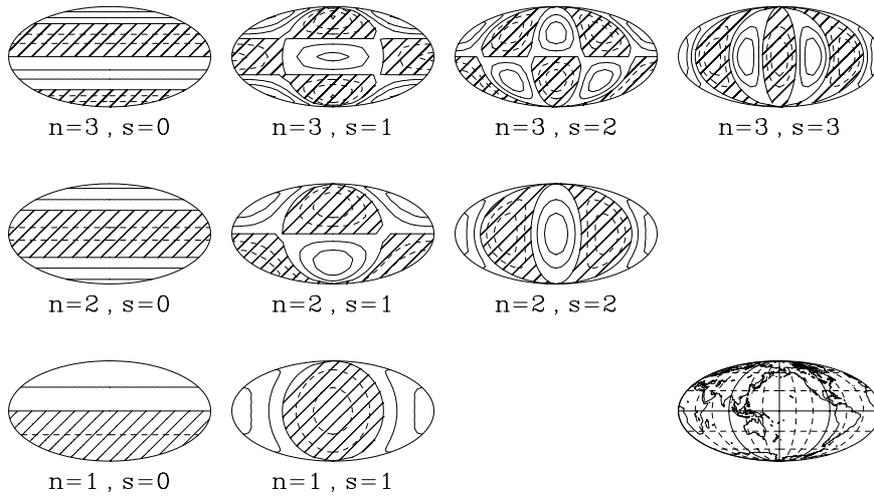


図 9.2: ロスビー・ハウルピッツ波 (球面調和関数 Y_n^s) の空間構造. $n = 1 \sim 3, s = 0 \sim n$. 負領域に陰影をつける. 地図投影はモルワイデ (Mollweide) 図法.

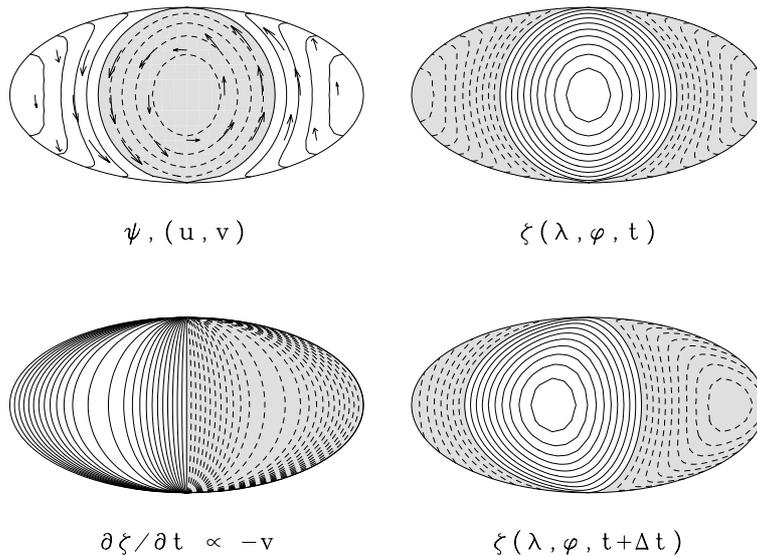


図 9.3: ロスビー・ハウルピッツ波の空間構造と伝播のしくみ. $n = 1, s = 1$ の場合. (左上) 流線関数 (負領域に陰影) と速度場, (右上) 相対渦度場, (左下) 相対渦度場の時間変化項, (右下) 相対渦度場の時間発展. 地図投影はモルワイデ図法.

すなわち, この波の渦度場 $\Delta_2 \psi$ は流線関数と同じ空間構造で, 逆符号をとる. $n = 1 \sim 3$ の球面調和関数を図 9.2 に示す. $n - s$ は南北の節の数であり, これが偶数のとき流線関数は赤道対称であり, 奇数のとき赤道反対称である.

速度場は (9.22), (9.23) で与えられるので, 図 9.3 左上の矢印で示すようになる. このとき, 渦度場は図 9.3 右上であるが, その時間変化は左下に示したようになるので, 渦度場はやがて図 9.3 右下のように変化する.

ここで鍵となるのは、流体粒子がラグランジュ的に絶対渦度 ($\zeta + 2\Omega\mu$) を保存し、かつ、惑星渦度 ($2\Omega\mu$) がサイン緯度の単調増大関数であるということである。すなわち、正の渦度領域の西側では北風成分 ($v < 0$) であり、流体粒子運動に乗って μ が小さくなる (惑星渦度が小さくなる) ので、絶対渦度を保存するために相対渦度 ζ が増加しなければならない。一方、東側では、ちょうど逆のセンスであり、相対渦度は減少する。結局、ある渦度場に対して、その時間変化項は西に $\pi/2$ 位相がずれているので、この渦度パターンが西進することになる。

9.3.4 観測

発散のある 3 次元大気でも基本的に同様のメカニズムで伝播する波動が存在する。ラプラス (Laplace) の潮汐方程式の固有解で、第 2 種自由振動と呼ばれるものである (松野・島崎, 1981; 第 5.2.6 節)。衛星観測全球データの解析では、いくつかの (n, s) に対する波動が確認されている (Hirota and Hirooka(1984) ← Andrews et al.(1987;p.171))。

9.4 β 平面上のロスビー波

第 2.5.2 節で導入した、中緯度で回転球面に接する平面、いわゆる中緯度 β 平面を用いて、そこでの波動解であるロスビー波を解析する。前節のロスビー・ハウルピッツ波解は惑星全体を認識したものである。すなわち、経度方向には周期境界とし、両極での境界条件を課して得られた波動解であった。これに対して、この節では、惑星全体を認識していない状態の波動を考える。局所的な波源から出た波が惑星全体に広がりきらない状況を思い浮かべればよい。

9.4.1 中緯度 β 平面

ある基準となる経度 (λ_0)、緯度 (ϕ_0) を考え、そこでこの球面に接する直交直線座標系 (x, y) を導入する：

$$\begin{cases} x = (a \cos \phi_0)\lambda, \\ y = a(\phi - \phi_0). \end{cases} \quad (9.38)$$

ただし、 $|x|, |y| \ll a$ とする。このとき、 $\phi = \frac{y}{a} + \phi_0$ 、 $|\frac{y}{a}| \ll \phi_0$ より、 $\mu = \sin \phi = \sin(\phi_0 + \frac{y}{a}) \simeq \sin \phi_0 + \frac{y}{a} \cos \phi_0$ と近似できるので、コリオリ・パラメータは次のように変換される：

$$f = 2\Omega \sin \phi \simeq 2\Omega \sin \phi_0 + 2\Omega \frac{y}{a} \cos \phi_0 \equiv f_0 + \beta y. \quad (9.39)$$

ここで、 f の y 微分を慣用に従って β で表している。このような近似の下で導入した座標系が中緯度 β 平面と呼ばれる所以である。また、 $dx/d\lambda = a \cos \phi_0$ 、 $dy/d\mu = a/\cos \phi_0$ なので、球面上での 2 次元ラプラシアンとヤコビアンは、それぞれ次のように変換される：

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \equiv \Delta, \quad (9.40)$$

$$\frac{\partial(A, B)}{\partial(\lambda, \mu)} = a^2 \frac{\partial(A, B)}{\partial(x, y)}. \quad (9.41)$$

これらを回転球面上の渦度方程式 (9.28) に代入することにより、次の β 平面近似渦度方程式を得る：

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + \frac{\partial(\psi, \Delta \psi)}{\partial(x, y)} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (9.42)$$

9.4.2 支配方程式と基本場と線型擾乱

支配方程式は、 β 平面近似渦度方程式 (9.42) で、流線関数 $\psi(x, y, t)$ を従属変数とする非線型偏微分方程式である。基本場として静止解 $\bar{u} = \bar{v} = 0$, $\bar{\psi} = \text{一定}$, を考える。 $\psi(x, y, t) = \bar{\psi} + \psi'(x, y, t)$ として、微小擾乱 $\psi'(x, y, t)$ に対する線型化した支配方程式を求めると、次になる：

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi' + \beta \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0. \quad (9.43)$$

9.4.3 分散関係式

時間・空間方向に周期性を仮定して、つぎの正弦波解を考える：

$$\psi'(x, y, t) = \text{Re}[\Psi_0 e^{i(kx + ly - \omega t)}]. \quad (9.44)$$

これを (9.43) に代入して整理すると、 β 平面上の 2 次元非発散ロスビー波に対する分散関係式を得る：

$$\omega = -\frac{k\beta}{k^2 + l^2}. \quad (9.45)$$

$\beta > 0$ なので、 ω と k はつねに逆符号をとる。分散関係 (9.45) を図 9.4 に示す。波数を惑星半径の逆数 a^{-1} , 振動数を惑星自転角速度 Ω で無次元化して、(a) では無次元波数 (ka, la) に対する無次元振動数 (ω/Ω) を描いている ($\omega > 0$ とした)。式 (9.45) を変形すると、 $\{k + (\beta/2\omega)\}^2 + l^2 = (\beta/2\omega)^2$ となり、 $\omega = \text{一定}$ の線は、中心が $(-\beta/2\omega, 0)$, 半径が $\beta/2\omega$ の円となっている。 ω が大きくなるにつれて、この円は小さくなり、原点に近づく。一方、(b) は無次元化した南北波数 la を ka と ω/Ω に対して求めたものである。陰影部では $\omega > -\beta/k$ となり、 l が純虚数となる。正弦波として南北に伝播する解がなく、波動解は指数関数的な空間構造をもつ外部波になる。

分散関係 (9.45) より波の位相速度 (c_{px}, c_{py}) と群速度 (c_{gx}, c_{gy}) は、それぞれ次で与えられる：

$$c_{px} = \frac{\omega}{k} = -\frac{\beta}{k^2 + l^2}, \quad (9.46)$$

$$c_{py} = \frac{\omega}{l} = -\frac{\beta}{k^2 + l^2} \frac{k}{l}, \quad (9.47)$$

$$c_{gx} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\beta(k^2 - l^2)}{(k^2 + l^2)^2}, \quad (9.48)$$

$$c_{gy} = \frac{\partial \omega}{\partial l} = \frac{2\beta kl}{(k^2 + l^2)^2}. \quad (9.49)$$

$c_{px} < 0$ より、位相は常に西進することがわかる。一方、群速度は $(k^2 - l^2)$ の符号によって異なり、正のとき $c_{gx} > 0$, 負のとき $c_{gx} < 0$ である。すなわち、波面が南北方向に近いときは東向きエネルギー伝播であり、東西方向に近いときは西向きエネルギー伝播である。

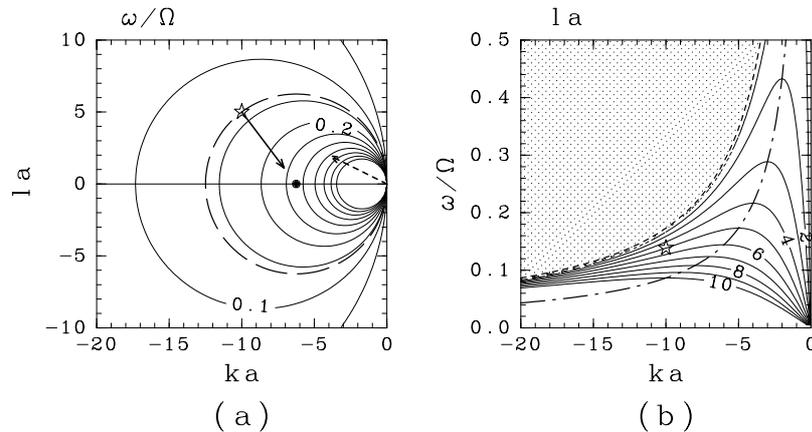


図 9.4: β 平面上の 2 次元非発散ロスビー波の分散関係. (a) Ω で無次元化した ω を, 惑星半径 a で無次元化した波数 $(k, l)a$ の関数としてプロットした. 破線太矢印は実空間における位相速度を, 実線太矢印は同じく群速度を示す. (b) 南北波数 la を ka と ω/Ω の関数としてプロットした. 陰影部は $l^2 < 0$ で示したロスビー波の構造を次の図に示す.

群速度は $(\partial\omega/\partial k, \partial\omega/\partial l)$ なので, 図 9.4(a) の $k-l$ 平面での $\omega(k, l)$ の勾配 $\text{grad } \omega(k, l)$ が実空間での群速度に比例する. 原点 $(0, 0)$ に近いほどこの勾配が大きく, 小さな波数の波のほうが群速度が大きい. また, その向き (実線太矢印) は, つねに $\omega = \text{一定}$ の円 (破線) の円周上の点からその円の中心 (黒丸) に向く. 東西方向の群速度は $\partial\omega/\partial k$ なので, 図 9.4(b) の一点鎖線より左 (高波数) 側で東向き, 右 (低波数) 側で西向きである. (図 9.4(b) で, $l = \text{一定}$ の曲線の勾配は一点鎖線より左側で正, 右側で負である.)

9.4.4 波の構造と位相の伝播

正弦波解 (9.44) に対して速度・渦度と流線関数の位相関係は次のようになる:

$$u' = -\frac{\partial\psi'}{\partial y} = -il\psi', \tag{9.50}$$

$$v' = \frac{\partial\psi'}{\partial x} = ik\psi', \tag{9.51}$$

$$\zeta' = \Delta\psi' = -(k^2 + l^2)\psi'. \tag{9.52}$$

$u \cdot k = 0$, つまり, $u \cdot c = 0$ であり, 運動方向と波の伝播方向が直交するので, このようなロスビー波は横波である.

図 9.4 中に示したロスビー波の位相関係を図 9.5(a) に示す. また, このときの波の空間構造を図 9.5(b) に示す. $k < 0, l > 0$ なので, $kx + ly = \text{一定}$ の等位相線は右上がりの直線となっている. u', v' が同じ位相で, ψ' よりも $\pi/2$ だけ先行している. 渦度は当然ながら ψ' と逆位相である.

波の位相が伝播する様子は, パーセル的な考え方や渦度による説明がある (竹広ノート).

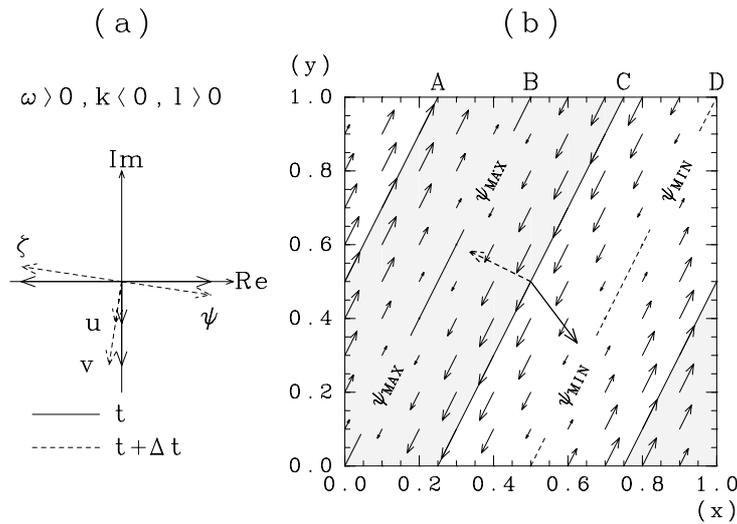


図 9.5: (a) ロスビー波の位相関係 ($\omega > 0, k < 0, m > 0$ の場合; 前の図中の) . (b) (a) で t に相当する時のロスビー波の空間構造. 破線太矢印は位相速度を, 実線太矢印は群速度を示す. 実線矢印は速度, 陰影部は $\zeta' < 0$ の領域.

9.4.5 ロスビー波の分散

初期値問題を解く (竹広ノート).

9.5 一様流中のロスビー波

これまでの波動の解析では, 基本場として静止した流体を仮定してきたので, 2 次の非線型である移流項 ($u \cdot \text{grad}$) u は微小として全く考慮してこなかった. この項のために, 一般には, 流れのなかの波動は必ずしも自明でない振舞いをし, さまざまな問題を提起する. 移流項を陽に扱う解析には難しさを伴う場合があり, 適切な物理数学的手法が要求される. この節では, 移流項を扱う最も基本的な場合として, 一様な流れのなかのロスビー波を考える.

9.5.1 支配方程式と基本場と線型擾乱

前節と同様に, 支配方程式は β 平面近似渦度方程式 (9.42) である. 基本場として一様東西流 U_0 を考える. $\bar{u} = -\partial\bar{\psi}/\partial y = U_0$ より, 流線関数を

$$\psi(x, y, t) = -U_0 y + \psi'(x, y, t), \tag{9.53}$$

として, 微小擾乱 $\psi'(x, y, t)$ に対する線型化した支配方程式を求め, 次を得る:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta \psi' + \beta \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0. \tag{9.54}$$

9.5.2 分散関係式

正弦波解 $\psi'(x, y, t) = \text{Re}[\Psi_0 e^{i(kx+ly-\omega t)}]$ を (9.54) に代入して整理すると、一様東西流中のロスビー波に対する分散関係式を得る：

$$\omega = U_0 k - \frac{k\beta}{k^2 + l^2}. \quad (9.55)$$

静止基本場の場合 (9.45) に比べて、 $U_0 k$ だけ振動数が変化する。西風 ($U_0 > 0$) の場合には、 $k < 0$ なので振動数は小さくなり、 $U_0 = \beta/(k^2 + l^2)$ のとき、 $\omega = 0$ となる。このとき、波は空間に固定された停滞波 (stationary wave) となる。一般に、波の位相速度 (c_{px}, c_{py}) と群速度 (c_{gx}, c_{gy}) は、分散関係式 (9.55) よりそれぞれ次で与えられる：

$$c_{px} = U_0 - \frac{\beta}{k^2 + l^2}, \quad (9.56)$$

$$c_{py} = \left(U_0 - \frac{\beta}{k^2 + l^2} \right) \frac{k}{l}, \quad (9.57)$$

$$c_{gx} = U_0 + \frac{\beta(k^2 - l^2)}{(k^2 + l^2)^2}, \quad (9.58)$$

$$c_{gy} = \frac{2\beta kl}{(k^2 + l^2)^2}. \quad (9.59)$$

東西 (x) 方向の位相速度と群速度は、静止基本場のそれぞれに U_0 が加わるだけである。流れ U_0 ののつてみると、静止した基本場の場合と同じ分散をする。南北 (y) 方向の位相速度は一様東西流の影響があるが、群速度は静止基本場の場合と同じである。

9.5.3 局所的な波源に対する定常応答

Lighthill(1966) は、波源の空間構造が δ 関数で与えられ、時間的にはスイッチ・オンの後に定常に維持される場合について、ロスビー波の応答を調べた。図 9.6(a) は応答の模式図で、波面は波源 (黒丸) から同心円的に広がる。そして、このような定常波応答が存在する領域は、波源から風下側に $U_0 \Delta t$ だけ離れた点 (白丸) を中心とする半径 $U_0 \Delta t$ の円内に限られる。Lighthill は鞍点法により波の位相だけを調べたが、林 (1987) はさらに振幅分布を求めて、さらに深い考察を加えている。

図 9.6(a) の応答パターンは、ロスビー波の群速度を調べることにより、次のように理解できる。

定常解 ($\omega = 0$) の場合、分散関係式 (9.55) より次を得る：

$$U_0 k(k^2 + l^2 - \frac{\beta}{U_0}) = 0. \quad (9.60)$$

すなわち、停滞波の波数は、 $k = 0$ または $k^2 + l^2 = \beta/U_0$ でなければならない。後者は図 9.6(b) に示す波数空間で半径 $\sqrt{\beta/U_0}$ の円である。

$k = 0$ の場合には、群速度 c_g は次で与えられる：

$$c_g = (U_0 - \frac{\beta}{l^2}, 0). \quad (9.61)$$

一方、 $k^2 + l^2 = \beta/U_0$ の場合には、

$$c_g = 2U_0 \frac{k}{k^2 + l^2}(k, l) = 2U_0 \frac{k}{k^2 + l^2} \mathbf{k}. \quad (9.62)$$

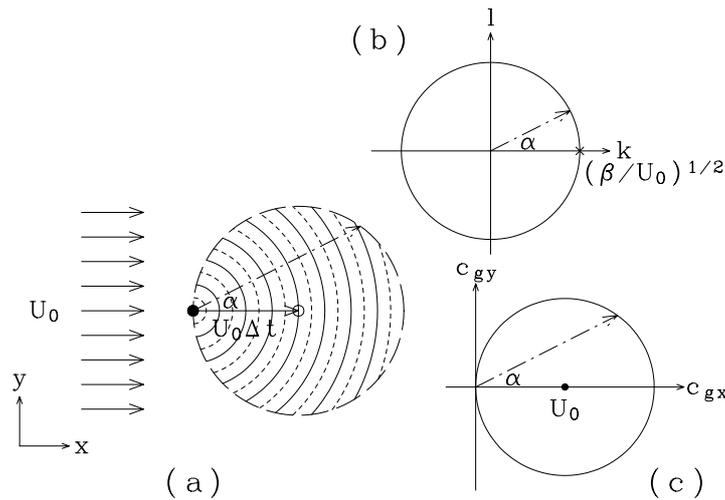


図 9.6: (a) δ 関数的な波源 (黒丸) をスイッチ・オンの後に定常に維持した場合のロスビー波の応答. Δt 時間後の様子. 実線と点線は波の等位相線で, 破線の円内だけに応答が現れる. (b) 停滞波の波数は, k - l 平面で半径 $(\beta/U_0)^{1/2}$ の円. (c) 群速度は c_{gx} - c_{gy} 平面で, $(U_0, 0)$ を中心とする半径 U_0 の円. これらの図で一点鎖線の矢印はある特定の波.

となり, 群速度の向きが波数ベクトルの向きと同じになる ($c_g \parallel k$). さらに, 群速度の方向依存性は, 波数ベクトルの向きを α ($\cos \alpha = k/\sqrt{k^2 + l^2}$) と表記すると,

$$|c_g| = 2|U_0| \cos \alpha, \quad (9.63)$$

と書けるので, c_{gx} - c_{gy} 平面内で, 図 9.6(c) に示す円となる. ちょうど風下 ($\alpha = 0$) には $2|U_0|$ でもっとも速く情報が伝播する (応答が現れる). 実空間では群速度に Δt を掛けた領域に応答が現れるので, 図 9.6(a) となる.

9.5.4 観測

- テレコネクション (Teleconnection)
 - Wallace and Gutzler(1981)

対流圏月平均循環場の年々変動の解析により, ロスビー波列の“大円”伝播を示唆するパターンを得た (図 9.7). PNA(Pacific/North American) パターンなど, それぞれに固有の名前がつけられた.
 - Hoskins and Karoly(1981)

基本的には, 長周期の局在した加熱場に対する大気の線型定常応答と考えられる. 例えば, エルニーニョ時の降水に伴う加熱などをイメージすればよい.
- 冬季成層圏停滞波
 - 気候図 (例えば, Holton, 1975: Fig. 1.9)

冬季には $U_0 > 0$ で定常ロスビー波解があり, 実際の流れ場は南北に蛇行する周極流である. 一方, 夏季成層圏では $U_0 < 0$ で定常ロスビー波解がなく, 流れ場はほとんど東西に構造をもたない.

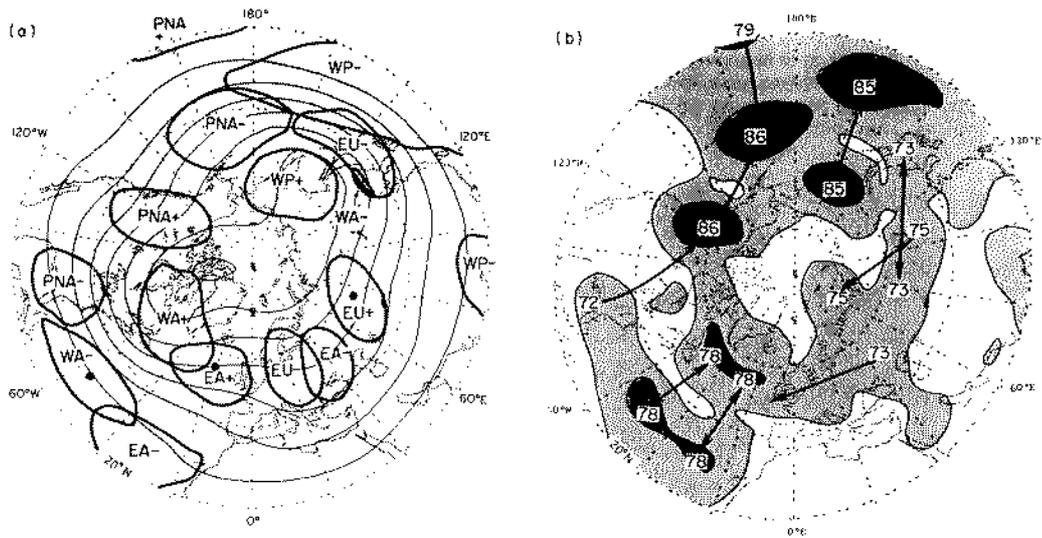


図 9.7: 北半球冬季 (12, 1, 2 月) の月平均 500 hPa 高度場の同時相関パターンで卓越する構造 (Wallace and Gutzler, 1981; Wallace and Blackmon, 1983, Fig. 3.4). (左) 太線: 相関解析で得られた 5 つの強いパターン. PNA(Pacific/North American), WA(West Atlantic), EA(East Atlantic), EU(Eurasian), WP(West Pacific). +, - は正相関か負相関. 細線: 冬季平均 500 hPa 高度場. (右) 強い負相関のある地域. 薄い陰は相関が -0.6 より強く, 濃い陰は -0.75 より強い領域. 最大値を 100 倍した数字で示す.

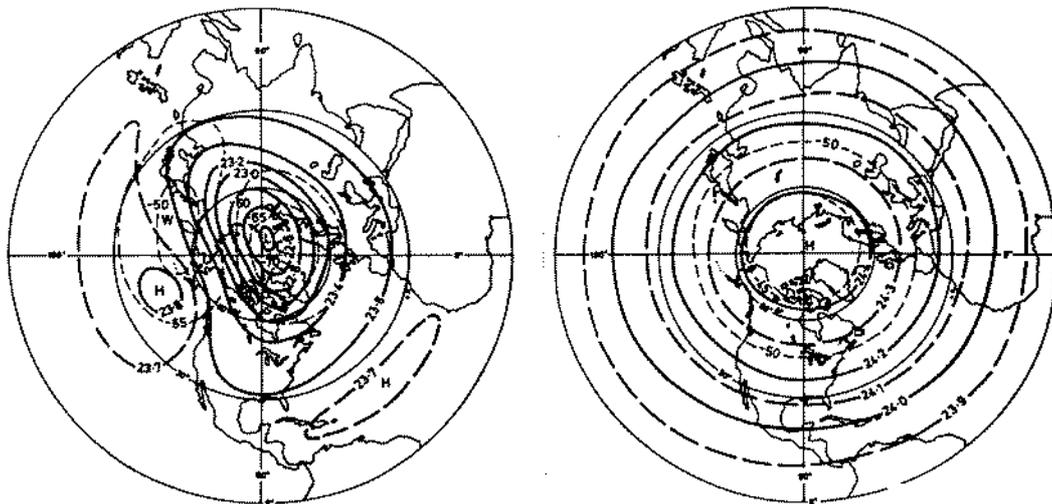


図 9.8: 北半球の季節平均 30 hPa 高度場 (実線, km) と温度場 (破線, °C). (左) 冬季平均 (12, 1, 2 月), (右) 夏季平均 (6, 7, 8 月). Holton(1975; Fig. 1.9) より.

参考文献

- Andrews, D.G., J.R. Holton and C.B. Leovy, 1987: *Middle Atmosphere Dynamics*, Academic Press, 489pp.
- Gill, A.E., 1982: *Atmosphere-Ocean Dynamics*, Academic Press, 662pp.
- 林 祥介, 1987: 二次元定常ロスビー波の線形論, 気象研究ノート, **156**, 29–48.
- Holton, J.R., 1975: *The dynamic meteorology of the stratosphere and mesosphere*, Meteorological Monograph, **37**, AMS, 218pp.
- Hoskins, B.J. and D. Karoly, 1981: The steady, linear response of a spherical atmosphere to thermal and orographic forcing. *J.Atmos.Sci.*, **38**, 1179–1196.
- 今村 勤, 1976: 「物理とフーリエ変換」岩波全書 290, 岩波書店, 234pp.
- Lighthill, 1966: Dynamics of rotating fluids: a survey. *J.Fluid Mech.*, **26**, 411–431.
- 松野 太郎・島崎 達夫, 1981: 「成層圏と中間圏の大気」大気科学講座 3, 東京大学出版会, 279pp.
- Wallace, J.M. and M.L. Blackmon, 1983: Observations of low-frequency atmospheric variability. *Large-scale Dynamical Processes in the Atmosphere*, B.J. Hoskins and R.P. Pearce Eds., Academic Press, 55–94.
- Wallace, J.M. and D.S. Gutzler, 1981: Teleconnections in the geopotential height field during the Northern Hemisphere winter. *Mon.Wea.Rev.*, **109**, 784–812.