移流テストの定式化

2026 年 6 月 4 日 竹広 真一

ここでは DCPAM のセミラグランジアンスキームのテストのための移流問題の定式化を行う.

1 非発散流れ場

テストを行う流れ場は経度緯度 σ 座標系で非発散であることを要請する.

$$\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial u}{\partial\lambda}+\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(v\cos\varphi)+\frac{\partial w}{\partial\sigma}=0, \tag{1}$$

ここで λ, φ, σ は経度, 緯度, 鉛直 σ 座標であり, (u,v,w) はそれぞれの速度成分である. 速度場の満たすべき自然な境界条件として

$$u|_{\lambda=0}=u|_{\lambda=2\pi},\quad v=0 \text{ at } \varphi=\pm\frac{\pi}{2},\quad w=0 \text{ at } \sigma=0,1. \tag{2}$$

一方, パッシブスカラー $q(\lambda,\varphi,\sigma,t)$ の移流は

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}(qu)+\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(qv\cos\varphi)+\frac{\partial}{\partial\sigma}(qw)=0 \tag{3}$$

に従う. 非発散条件を用いて変形すると,

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{u}{a\cos\varphi}\frac{\partial q}{\partial\lambda}+\frac{v}{a}\frac{\partial q}{\partial\varphi}+w\frac{\partial q}{\partial\sigma}=0. \tag{4}$$

2 帯状方向の速度場

$v=0$ の場合の帯状流れ場の例を考える. 2 次元流れなので非発散条件を満たすよう流線関数を次のように導入できる.

$$u=-\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma},\quad w=\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}. \tag{5}$$

このとき, パッシブスカラーの移流を表す式は,

$$\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}\frac{\partial q}{\partial \lambda} + \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}\frac{\partial q}{\partial \sigma} = \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{a\cos\varphi}J_{\lambda,\sigma}(\Phi, q) = 0. \tag{6}$$

ここで $J_{\lambda,\sigma}(f,g) = \dfrac{\partial f}{\partial \lambda}\dfrac{\partial g}{\partial \sigma} - \dfrac{\partial f}{\partial \sigma}\dfrac{\partial g}{\partial \lambda}$ は (λ, σ) 系でのヤコビアンである. q が流線関数 Φ と同じ分布の場合, ヤコビアンが 0 となり分布が時間変化しないことに注意されたい.

境界条件を流線関数として

$$\Phi(\lambda, \sigma) = \Phi_0 \sin(n\pi\sigma)\cos(m\lambda)\cos\varphi, \tag{7}$$

$$u(\lambda, \sigma) = -n\pi\Phi_0 \cos(n\pi\sigma)\cos(m\lambda)\cos\varphi, \tag{8}$$

$$w(\lambda, \sigma) = -\frac{m\Phi_0}{a}\sin(n\pi\sigma)\sin(m\lambda). \tag{9}$$

3 子午面内の流れ場

子午面内の流れは, 帯状平均した質量保存則を満たさねばならない.

$$\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}(v\cos\varphi) + \frac{\partial w}{\partial \sigma} = 0, \tag{10}$$

ここで v, w はそれぞれ速度の緯度および鉛直 (σ) 成分である. これを満たすべく, ここでの流線関数 Ψ を次のように定義する.

$$v = -\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial \Psi}{\partial \sigma}, \quad w = \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}. \tag{11}$$

パッシブスカラー $q(\varphi, \sigma, t)$ の移流は,

$$\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial \Psi}{\partial \sigma}\frac{\partial q}{\partial \varphi} + \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}\frac{\partial q}{\partial \sigma} = \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{a\cos\varphi}J_{\varphi,\sigma}(\Psi, q) = 0. \tag{12}$$

ここで $J_{\varphi,\sigma}(f,g) = \dfrac{\partial f}{\partial \varphi}\dfrac{\partial g}{\partial \sigma}$ は $(\varphi, \sigma$ 系でのヤコビアンである. q が流線関数と同じ分布の場合, ヤコビアンが 0 となり分布が時間変化しないことに注意されたい.

境界条件を満たす流れ場として $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$ で特異でない解を選択すると, 例えば,

$$\Psi = \sin(n\pi\sigma)\cos^2\varphi P_l'(\sin\varphi), \tag{13}$$

$$v = -n\pi\cos(n\pi\sigma)\cos^2\varphi P_l'(\sin\varphi), \tag{14}$$

$$w = -\frac{l(l+1)}{a}\sin(n\pi\sigma)P_l(\sin\varphi). \tag{15}$$

ただし P_l および P_l' は l 次のルジャンドル多項式およびその微分 $P_l' = \dfrac{dP_l(x)}{dx}$ である.

この流れでパッシブスカラーが移流されると元の分布を保てないが, 流れが時間的に振動すると, その周期でもとに戻されるだろう. すなわち,

$$\Psi = \sin(n\pi\sigma)\cos^2\varphi P_l'(\sin\varphi)\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \tag{16}$$

$$v = -n\pi\cos(n\pi\sigma)\cos^2\varphi P_l'(\sin\varphi)\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \tag{17}$$

$$w = -\frac{l(l+1)}{a}\sin(n\pi\sigma)P_l(\sin\varphi)\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right). \tag{18}$$

ここで T は流れの振動周期である.

- $n=1,\ l=1$ の場合： $P_1 = x,\ P_1' = 1$ なので

$$\Psi = \sin(\pi\sigma)\cos^2\varphi\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \tag{19}$$

$$v = -\pi\cos(\pi\sigma)\cos\varphi\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \tag{20}$$

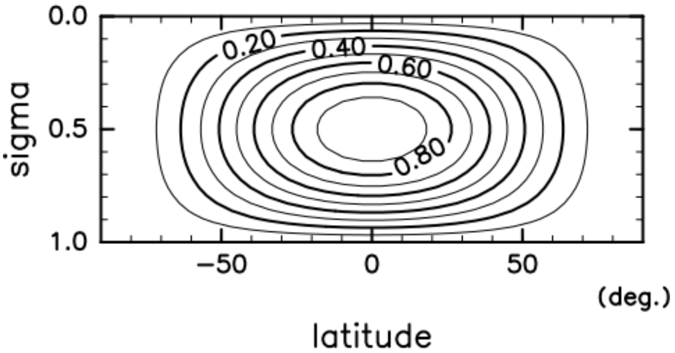
$$w = -\frac{2}{a}\sin(\pi\sigma)\sin\varphi\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right). \tag{21}$$

- $n=1,\ l=2$ の場合： $P_2 = \dfrac{1}{2}(3x^2-1),\ P_2' = 3x$ なので

$$\Psi = \sin(\pi\sigma)3\sin\varphi\cos^2\varphi\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \tag{22}$$

$$v = -\pi\cos(\pi\sigma)3\sin\varphi\cos\varphi\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \tag{23}$$

$$w = -\frac{3}{a}\sin(\pi\sigma)(3\sin^2\varphi - 1)\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right). \tag{24}$$



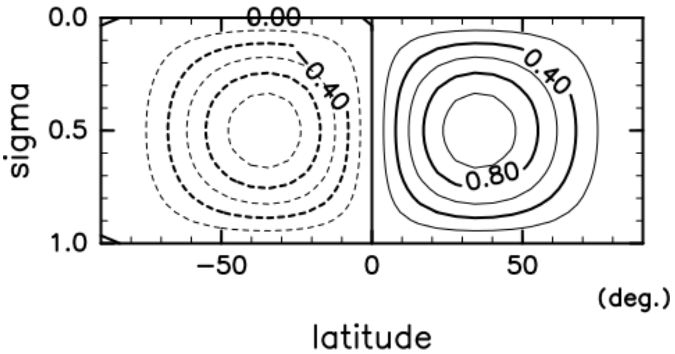


図 1: 子午面の流れの例. 上が $n = 1$, $l = 1$ の場合, 下が $n = 1$, $l = 2$ の場合.