

DKPACK 使用の手引 (version 0.1)

石岡 圭一 (2003/03/09)

1 概要

これは Jacobi 多項式を用いたスペクトル法で円盤領域の流体方程式の数値計算を行うためのサブルーチンパッケージである。Jacobi 多項式に関する公式の導出や、非粘性浅水方程式の場合のスペクトル法の定式化の詳細等については論文「石岡圭一 (2003): 円盤領域の浅水方程式に対するスペクトル法— I. 原理 —, ながれ (投稿中)」を参照されたい。本マニュアルでは必要最小限の説明にとどめる。なお、扱う方程式および境界条件によって展開の仕方が大きく異なるので、それぞれに対応してサブルーチンもいくつかの群に分別される。従って各サブルーチンの説明も個別の節に分かれている。現在のところ、非粘性の浅水方程式に対応するものだけが準備されている。今後、粘性ありの浅水方程式、非粘性および粘性ありのバロトロピック方程式等についても対応していく予定である。

また、このパッケージは FTPACK と BSPACK の上位パッケージであり、これらのパッケージを内部で引用している。

2 サブルーチンのリスト

DKJACB	Jacobi 多項式に内積の重みの平方根を掛けたもの、およびその微分の計算。
DKGAUS	Gauss 分点および対応する Gauss 重みの計算。
<hr/>	
DKAINI	DKA???の初期化。
DKAINO	DKA???の初期化 (一部の配列のみ)。
DKAS2G	展開係数から格子点値への変換。
DKAG2S	格子点値から展開係数への変換。
DKAS2V	展開係数から格子点値への変換 (勾配成分も同時に計算)。
DKATDV	浅水方程式の時間微分項の計算。
DKACNS	浅水方程式の保存量の計算。
DKABLC	傾度風バランスした水深場を求める。
DKALNR	線形安定性解析のための行列の計算。
DKAQ2U	ポテンシャル渦度分布から対応するバランスした \bar{u}, \bar{h} 場の展開係数を求める。
DKAEGA	重力波成分を分離して解くための行列の準備。
DKATDG	重力波成分のみについての時間発展を行う。
DKATDL	重力波成分を除いた時間微分項の計算。

3 サブルーチンの説明 (1. 共通サブルーチン)

これらのサブルーチンは、通常、ユーザーが陽に呼出す必要はないが、基本的なサブルーチンなので、参考のために説明を加えておく。

3.1 DKJACB

1. 機能

Jacobi 多項式に内積の重みの平方根を掛けたもの、およびその微分を計算する。

2. 定義

Jacobi 多項式 $P_n^{(\alpha,\beta)}(s)$ ($n = 0, 1, \dots$) を、「区間 $[0, 1]$ で内積の重み $w(s) = s^\alpha(1-s)^\beta$ と定めたときの正規直交多項式でかつ最高次の係数が正なるもの」として定義する。ここに、 $\alpha, \beta > -1$ である (これは内積の値が有界になるために課されるべき条件である)。また、 n は多項式 $P_n^{(\alpha,\beta)}(s)$ の最高次の次数である。

$P_n^{(\alpha,\beta)}(s)$ は、具体的に以下の Rodrigues の公式によって表わすことができる。

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(s) = \frac{c_n}{w(s)} \frac{d^n}{ds^n} (w(s)s^n(1-s)^n).$$

ここで、 c_n は正規化のための定数である。このように定義された $P_n^{(\alpha,\beta)}(s)$ が n 次多項式であり、次数の異なるもの同士が直交することは容易に証明できる。

本サブルーチンは、 α, β が非負整数の場合について、

$$\sqrt{w(s)}P_n^{(\alpha,\beta)}(s) \quad (n = 0, 1, \dots, N)$$

およびその微分

$$\frac{d}{ds} \left\{ \sqrt{w(s)}P_n^{(\alpha,\beta)}(s) \right\} \quad (n = 0, 1, \dots, N)$$

を与えられた分点 $s = s_j$ ($j = 1, 2, \dots, J$) について与えられた次数 N まで求めるものである (ただし、 $0 < s_j < 1$ であること)。

3. 呼び出し方法

DKJACB(JM,MM,K,L,X,P)

4. パラメーターの説明

JM	(I)	入力. 分点数 (上記の J)
MM	(I)	入力. Jacobi 多項式の最高次数 (上記の N)
K	(I)	入力. Jacobi 多項式のパラメーター (上記の α)
L	(I)	入力. Jacobi 多項式のパラメーター (上記の β)
X	(D(JM))	出力. 分点の位置 (上記の s_j)
P	(D(JM*2*(MM+1)))	出力. Jacobi 多項式に内積の重みの平方根を掛けたもの、およびその微分 (備考参照)。

5. 備考

$P(JM, 2, 0:MM)$ と宣言されている場合, $P(J, 1, N)$ には

$$\sqrt{w(s_j)} P_n^{(\alpha, \beta)}(s_j)$$

が, $P(J, 2, N)$ には

$$\left. \frac{d}{ds} \left\{ \sqrt{w(s)} P_n^{(\alpha, \beta)}(s) \right\} \right|_{s=s_j}$$

がそれぞれ格納される.

3.2 DKGAUS

1. 機能

Gauss-Legendre 積分公式に使われる Gauss 分点および対応する Gauss 重みを計算する.

2. 定義

$f(s)$ が $(2J-1)$ 次以下の多項式であるとき, 以下の Gauss-Legendre 積分公式が成立する.

$$\int_0^1 f(s) ds = \sum_{j=1}^J w_j f(s_j).$$

ここに, s_j ($j = 1, 2, \dots, J$) は $P_J^{(0,0)}(s)$ の J 個の零点 ($0 < s_1 < s_2 < \dots < s_J < 1$) であり, w_j は対応する J 個の重みで,

$$w_j = \frac{2\sqrt{4J^2-1}}{JP_{J-1}^{(0,0)}(s_j) \frac{d}{ds} P_J^{(0,0)}(s_j)}$$

と計算されるものである.

本サブルーチンは, 与えられた J から Gauss 分点 s_j ($j = 1, 2, \dots, J$) および対応する Gauss 重み w_j ($j = 1, 2, \dots, J$) を計算する.

3. 呼び出し方法

DKGAUS(JM, X, W)

4. パラメーターの説明

JM	(I)	入力. 分点数 (上記の J)
X	(D(JM))	出力. Gauss 分点 (上記の s_j)
W	(D(JM))	出力. Gauss 重み (上記の w_j)

5. 備考

4 サブルーチンの説明 (2. 非粘性浅水方程式に対するサブルーチン群 (DKA???))

回転円盤上での非粘性浅水方程式は、適当な無次元化の後、極座標で以下のように表せる.

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial(hu)}{r\partial\theta} - \frac{\partial(rhv)}{r\partial r} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u\frac{\partial u}{r\partial\theta} - v\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{uv}{r} - \frac{\partial(h+h_b)}{r\partial\theta} - fv \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u\frac{\partial v}{r\partial\theta} - v\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{u^2}{r} - \frac{\partial(h+h_b)}{\partial r} + fu \quad (3)$$

ここに, h は水深, h_b は水底地形の高さ (時刻に依存しない), (u, v) は (θ, r) 方向の流速, t は時刻, f はコリオリパラメーター (系の回転角速度の $1/2$) である. 本サブルーチン群 (DKA???) の目的は, 方程式系 (??)-(??) を単位円盤 ($0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$) 領域で数値計算することである. $r = 1$ での境界条件は, 剛体壁境界として, $v = 0$ を課すことにする. 式 (??)-(??) をそのまま扱ってもよいが, 独立変数として r のかわりに $s = r^2$ を用いた方が便利であるので, 以下のように変形しておく.

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -h \left(s^{-1/2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial(s^{1/2}v)}{\partial s} \right) - s^{-1/2} u \frac{\partial h}{\partial \theta} - 2s^{1/2} v \frac{\partial h}{\partial s} \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v \left(f + 2 \frac{\partial(s^{1/2}u)}{\partial s} \right) - s^{-1/2} u \frac{\partial u}{\partial \theta} - s^{-1/2} \frac{\partial(h+h_b)}{\partial \theta} \quad (5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = u \left(f + s^{-1/2} u - s^{-1/2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - 2v \frac{\partial(s^{1/2}v)}{\partial s} + s^{-1/2} v^2 - 2s^{1/2} \frac{\partial(h+h_b)}{\partial s} \quad (6)$$

方程式系 (??)-(??) に対して Jacobi 多項式を用いたスペクトル法を適用することを考える. 原点で C^∞ であるための条件および境界条件を考慮して, (h, v, u) の場を以下のように展開することにする.

$$h(s, \theta) = \tilde{h}^0(s) + 2\text{Re} \left\{ \sum_{m=1}^M \tilde{h}^m(s) e^{im\theta} \right\} \quad (7)$$

$$u(s, \theta) = \tilde{u}^0(s) + 2\text{Re} \left\{ \sum_{m=1}^M \tilde{u}^m(s) e^{im\theta} \right\} \quad (8)$$

$$v(s, \theta) = \tilde{v}^0(s) + 2\text{Re} \left\{ \sum_{m=1}^M \tilde{v}^m(s) e^{im\theta} \right\} \quad (9)$$

$$\tilde{h}^0(s) = \sum_{n=0}^{N_0} \hat{h}_n^0 P_n^{(0,0)}(s) \quad (10)$$

$$\tilde{h}^m(s) = \sum_{n=0}^{N_m} \hat{h}_n^m \phi_n^m(s) \quad (m = 1, 2, \dots, M) \quad (11)$$

$$\tilde{v}^0(s) = \sum_{n=1}^{N_0} \hat{v}_n^0 \frac{1}{n} s^{1/2} (1-s) \frac{d}{ds} P_n^{(0,0)}(s) \quad (12)$$

$$i\tilde{v}^m(s) = \sum_{n=-1}^{N_m-1} \hat{v}_n^m s^{-1/2} \phi_n^m(s) \quad (m = 1, 2, \dots, M) \quad (13)$$

$$\tilde{u}^0(s) = \sum_{n=0}^{N_0} \hat{u}_n^0 s^{1/2} P_n^{(0,0)}(s) \quad (14)$$

$$\tilde{u}^m(s) = \sum_{n=0}^{N_m} \hat{u}_n^m s^{1/2} \phi_n^m(s) + i\tilde{v}^m(s) \quad (m = 1, 2, \dots, M) \quad (15)$$

ここで、 M は切断の次数で、 u, v から作られる渦度・発散および h を x, y の多項式で表した場合の最高次数を表している。 $N_m = [(M - m)/2]$ とする。 $[\]$ は Gauss の記号である。 $P_n^{(0,0)}(s)$ 等は Jacobi の多項式 (付録 1 参照) であり、 $\phi_n^m(s)$ は、

$$\begin{aligned} \phi_n^m(s) &= s^{m/2} (1-s) P_n^{(m,2)}(s) \quad (n = 0, 1, \dots, N_m - 1) \\ \phi_{N_m}^m(s) &= \alpha_m \left(s^{m/2} - \sum_{n=0}^{N_m-1} \langle s^{m/2} \phi_n^m(s) \rangle \phi_n^m(s) \right) \\ \phi_{-1}^m(s) &= s^{m/2} (1-s) P_{N_m}^{(m,2)}(s) \end{aligned}$$

のように作られる関数とする。ただし、

$$\langle A(s) \rangle = \int_0^1 A(s) ds$$

の意味であり、 α_m は $\langle (\phi_{N_m}^m(s))^2 \rangle = 1$ を満すように定められるものである。

本サブルーチン群 (DKA???) は、展開係数 $\hat{h}_n^m, \hat{u}_n^m, \hat{v}_n^m$ から h, u, v の場を求める変換ルーチンおよびその逆変換を行うルーチン、その他の補助的ルーチンより構成される。

なお、 h, u, v の場合は、格子点 (s_j, θ_i) ($j = 1, 2, \dots, J$; $i = 0, 1, \dots, I - 1$) 上で求められる。ここに、 s_j は J 個の Gauss 分点 (DKGAUS の項参照) で、 θ_i は与えられる分割数 I から $\theta_i = 2\pi i/I$ と定められるものである。

4.1 DKAINI

1. 機能

DKA??? の初期化ルーチン。他のルーチンで用いられる配列 IT, T, P, A の初期化を行う。

2. 定義

3. 呼び出し方法

DKAINI (MM, JM, IM, IT, T, P, A)

4. パラメーターの説明

MM	(I)	入力. 切断波数 (上記の M)
JM	(I)	入力. Gauss 分点の数 (上記の J)
IM	(I)	入力. θ 方向の分割数 (上記の I)
IT	(I(5))	出力. DKA??? で用いられる配列
T	(D(IM*2))	出力. DKA??? で用いられる配列
P	(D(JM*2*((MM+8)*MM/4+1)))	出力. DKA??? で用いられる配列
A	(D(3*((MM+1)/2)*(MM/2)+7*MM/2))	出力. DKA??? で用いられる配列

5. 備考

- MM は 2 以上の整数, JM および IM はそれぞれ, 2 以上の偶数でなければならない.
- $P(JM, 2, (MM+8)*MM/4+1)$ と宣言されている場合, $Y(J, 1, 1)$ には $r_j = \sqrt{s_j}$ が, $Y(J, 2, 1)$ には w_j がそれぞれ格納される.

4.2 DKAIN0

1. 機能

DKA???の初期化ルーチン. ただし, DKAINI と異なり P, A のみの初期化を行う.

2. 定義

3. 呼び出し方法

DKAIN0(MM, JM, P, A)

4. パラメーターの説明

MM	(I)	入力. 切断波数 (上記の M)
JM	(I)	入力. Gauss 分点の数 (上記の J)
P	(D(JM*2*((MM+8)*MM/4+1)))	出力. DKA???で用いられる配列
A	(D(3*((MM+1)/2)*(MM/2)+7*MM/2))	出力. DKA???で用いられる配列

5. 備考

- DKALNR を使う場合のように, 配列 P, A のみの初期化を行えば十分である場合には DKAINI の代わりにこのサブルーチンを用いればよい.
- MM は 2 以上の整数, JM はそれぞれ, 2 以上の偶数でなければならない.
- $P(JM, 2, (MM+8)*MM/4+1)$ と宣言されている場合, $Y(J, 1, 1)$ には $r_j = \sqrt{s_j}$ が, $Y(J, 2, 1)$ には w_j がそれぞれ格納される.

4.3 DKAS2G

1. 機能

展開係数から格子点値への変換を行う.

2. 定義

3. 呼び出し方法

DKAS2G(MM, JM, IM, S, G, WORK, IT, T, P)

4. パラメーターの説明

MM	(I)	入力. 切断波数
JM	(I)	入力. Gauss 分点の数
IM	(I)	入力. θ 方向の分割数
S	(D((MM+1)*(MM+2)/2*3-1))	入力. $\hat{h}_n^m, \hat{u}_n^m, \hat{v}_n^m$ が格納されている配列 (並べ方は備考参照).
G	(D(JM*IM*3))	出力. h, u, v の格子点値が格納される配列 (並び方は備考参照).
WORK	(D(JM*IM))	作業領域.
IT	(I(5))	入力. DKAINI で初期化された配列
T	(D(IM*2))	入力. DKAINI で初期化された配列
P	(D(JM*2*((MM+8)*MM/4+1)))	入力. DKAINI で初期化された配列

5. 備考

- IM>2*MM であること.
- S には展開係数 $\hat{h}_n^m, \hat{u}_n^m, \hat{v}_n^m$ が以下の順で格納されているとして扱う.

波数 0 成分 (実部のみ)

$$\hat{h}_0^0, \hat{h}_1^0, \dots, \hat{h}_{N_0}^0; \hat{u}_0^0, \hat{u}_1^0, \dots, \hat{u}_{N_0}^0; \hat{v}_1^0, \hat{v}_2^0, \dots, \hat{v}_{N_0}^0$$

波数 1 成分の実部

$$\text{Re}(\hat{h}_0^1), \text{Re}(\hat{h}_1^1), \dots, \text{Re}(\hat{h}_{N_1}^1); \text{Re}(\hat{u}_0^1), \text{Re}(\hat{u}_1^1), \dots, \text{Re}(\hat{u}_{N_1}^1); \text{Re}(\hat{v}_{-1}^1), \text{Re}(\hat{v}_0^1), \dots, \text{Re}(\hat{v}_{N_1-1}^1)$$

波数 1 成分の虚部

$$\text{Im}(\hat{h}_0^1), \text{Im}(\hat{h}_1^1), \dots, \text{Im}(\hat{h}_{N_1}^1); \text{Im}(\hat{u}_0^1), \text{Im}(\hat{u}_1^1), \dots, \text{Im}(\hat{u}_{N_1}^1); \text{Im}(\hat{v}_{-1}^1), \text{Im}(\hat{v}_0^1), \dots, \text{Im}(\hat{v}_{N_1-1}^1)$$

波数 2 成分の実部, 波数 2 成分の虚部, ..., 波数 M 成分の実部, 波数 M 成分の虚部.

- G(JM,0;IM-1,3) と宣言されている場合, G(J,I,1) には $h(s_j, \theta_i)$ が, G(J,I,2) には $u(s_j, \theta_i)$ が, G(J,I,3) には $v(s_j, \theta_i)$ が, それぞれ格納される.

4.4 DKAG2S

1. 機能

格子点値から展開係数への変換を行う.

2. 定義

3. 呼び出し方法

DKAG2S(MM, JM, IM, S, G, WORK, IT, T, P, A)

4. パラメーターの説明

MM	(I)	入力. 切断波数
JM	(I)	入力. Gauss 分点の数
IM	(I)	入力. θ 方向の分割数
G	(D(JM*IM*3))	入力. h, u, v の格子点値が格納されている配列.
S	(D((MM+1)*(MM+2)/2*3-1))	出力. $\hat{h}_n^m, \hat{u}_n^m, \hat{v}_n^m$ が格納される配列.
WORK	(D(JM*IM))	作業領域.
IT	(I(5))	入力. DKAINI で初期化された配列
T	(D(IM*2))	入力. DKAINI で初期化された配列
P	(D(JM*2*((MM+8)*MM/4+1))	入力. DKAINI で初期化された配列
A	(D(3*((MM+1)/2)*(MM/2)+7*MM/2))	入力. DKAINI で初期化された配列.

5. 備考

- IM>2*MM であること.
- S, G への展開係数および格子点値の並び方については DKAS2G の項を参照.
- 入力 G の中身は保存されないので注意 (作業領域の一つとして用いられる).
- 格子点値から展開係数を決定するためには Galerkin 法を用いている. 詳細については 既出論文を参照.

4.5 DKAS2V

1. 機能

展開係数から格子点値への変換を行う (勾配成分も同時に計算).

2. 定義

3. 呼び出し方法

DKAS2V(MM, JM, IM, S, G, WORK, IT, T, P)

4. パラメーターの説明

MM	(I)	入力. 切断波数
JM	(I)	入力. Gauss 分点の数
IM	(I)	入力. θ 方向の分割数
S	(D((MM+1)*(MM+2)/2*3-1))	入力. $\hat{h}_n^m, \hat{u}_n^m, \hat{v}_n^m$ が格納されている配列 (並べ方は備考参照).
G	(D(JM*IM*9))	出力. h, u, v の格子点値と勾配が格納される配列 (並び方は備考参照).
WORK	(D(JM*IM))	作業領域.
IT	(I(5))	入力. DKAINI で初期化された配列
T	(D(IM*2))	入力. DKAINI で初期化された配列
P	(D(JM*2*((MM+8)*MM/4+1))	入力. DKAINI で初期化された配列

5. 備考

- IM>2*MM であること.
- S, G への展開係数の並べ方については DKAS2G の項を参照.

- $G(JM, 0; IM-1, 3, 3)$ と宣言されている場合,
 $G(J, I, 1, 1)$ には h , $G(J, I, 2, 1)$ には $\partial h / \partial \theta$, $G(J, I, 3, 1)$ には $\partial h / \partial s$,
 $G(J, I, 1, 2)$ には u , $G(J, I, 2, 2)$ には $\partial u / \partial \theta$, $G(J, I, 3, 2)$ には $\partial(s^{1/2}u) / \partial s$,
 $G(J, I, 1, 3)$ には v , $G(J, I, 2, 3)$ には $\partial v / \partial \theta$, $G(J, I, 3, 3)$ には $\partial(s^{1/2}v) / \partial s$,
 がそれぞれ格納される (s -偏微分に関する出力がスカラー場 h とベクトル場 (u, v) とで異なっていることに注意). ただし, DKAS2G と同様に, 添字 J, I は格子点 s_j, θ_i での値を表す.

4.6 DKATDV

1. 機能

浅水方程式の時間微分項の計算を行う.

2. 定義

浅水方程式 (??)-(??) に対して Galerkin 法を適用して展開係数の時間微分を定める. この場合の Galerkin 法の詳細については既出論文を参照.

3. 呼び出し方法

DKATDV(MM, JM, IM, F, HB, S, DS, G, IT, T, P, A)

4. パラメーターの説明

MM	(I)	入力. 切断波数
JM	(I)	入力. Gauss 分点の数
IM	(I)	入力. θ 方向の分割数
F	(D)	入力. コリオリパラメーター f の値.
HB	(D(JM*IM*2))	入力. $\partial h_b / \partial \theta, \partial h_b / \partial s$ の格子点値が格納されている配列 (並べ方は備考参照).
S	(D((MM+1)*(MM+2)/2*3-1))	入力. $\hat{h}_n^m, \hat{u}_n^m, \hat{v}_n^m$ が格納されている配列 (並べ方は備考参照).
DS	(D((MM+1)*(MM+2)/2*3-1))	出力. $d\hat{h}_n^m/dt, dt\hat{u}_n^m/dt, d\hat{v}_n^m/dt$ が格納される配列 (並び方は備考参照).
WORK	(D(JM*IM*10))	作業領域.
IT	(I(5))	入力. DKAINI で初期化された配列
T	(D(IM*2))	入力. DKAINI で初期化された配列
P	(D(JM*2*((MM+8)*MM/4+1)))	入力. DKAINI で初期化された配列
A	(D(3*((MM+1)/2)*(MM/2)+7*MM/2))	入力. DKAINI で初期化された配列.

5. 備考

- 2 次の非線形項からの aliasing を除去するためには, $IM > 3*MM$, かつ $JM \geq (MM+MM/2+2)/2$ を満すようにしておくこと.
- S および DS への $\hat{h}_n^m, \hat{u}_n^m, \hat{v}_n^m$ および $d\hat{h}_n^m/dt, dt\hat{u}_n^m/dt, d\hat{v}_n^m/dt$ の格納順については, DKAS2G の項参照.
- $HB(JM, 0; IM-1, 2)$ と宣言する場合, $HB(J, I, 1)$ には $(\partial h_b / \partial \theta)(s_j, \theta_i)$ を $HB(J, I, 2)$ には $(\partial h_b / \partial s)(s_j, \theta_i)$ をそれぞれ格納しておくこと.

4.7 DKACNS

1. 機能

浅水方程式の保存量の計算を行う。

2. 定義

浅水方程式 (??)-(??) には以下のような保存量がある:

- 全角運動量 (A.Mom.):

$$\text{A.Mom.} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 h(u + \frac{f}{2}s^{1/2})s^{1/2}dsd\theta \quad (16)$$

- 全エネルギー (A.Ene.):

$$\text{A.Ene.} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{2}h(u^2 + v^2 + h + 2h_b)dsd\theta \quad (17)$$

である。本サブルーチンは, h, u, v のスペクトル展開係数 $\hat{h}_n^m, \hat{u}_n^m, \hat{v}_n^m$ を入力として, 上記の保存量 A.Mom. および A.Ene. を求めるものである (他にも無限個のカシミール不変量も保存量になるが, これについては扱わない。また, 平均水深:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 hdsd\theta$$

もちろん保存量であるが, これは \hat{h}_0^0 そのものである)。

なお, 本パッケージで用いているスペクトル法では, 平均水深以外の保存量は厳密には保存されないことに注意されたい。

3. 呼び出し方法

DKACNS(MM, JM, IM, F, HB, S, AMOM, AENE, WORK, IT, T, P)

4. パラメーターの説明

MM	(I)	入力. 切断波数
JM	(I)	入力. Gauss 分点の数
IM	(I)	入力. θ 方向の分割数
F	(D)	入力. コリオリパラメーター f の値.
HB	(D(JM*IM))	入力. h_b の格子点値が格納されている配列 (並べ方は備考参照).
S	(D((MM+1)*(MM+2)/2*3-1))	入力. $\hat{h}_n^m, \hat{u}_n^m, \hat{v}_n^m$ が格納されている配列 (並べ方は備考参照).
AMOM	(D)	出力. A.Mom. の値
AENE	(D)	出力. A.Ene. の値
WORK	(D(JM*IM*4))	作業領域.
IT	(I(5))	入力. DKAINI で初期化された配列
T	(D(IM*2))	入力. DKAINI で初期化された配列
P	(D(JM*2*((MM+8)*MM/4+1))	入力. DKAINI で初期化された配列

5. 備考

- S への $\hat{h}_n^m, \hat{u}_n^m, \hat{v}_n^m$ の格納順については, DKAS2G の項参照.
- HB(JM, 0; IM-1) と宣言する場合, HB(J, I) には $h_b(s_j, \theta_i)$ を格納しておくこと.

4.8 DKABLC

1. 機能

傾度風バランスした水深場を求める.

2. 定義

浅水方程式 (??)-(??) において, $h_b \equiv 0$ とした場合, θ に依存しない定常解 $h = \bar{h}(s), u = \bar{u}(s), v = 0$ の満すべき式は,

$$0 = \bar{u} \left(f + s^{-1/2} \bar{u} \right) - 2s^{1/2} \frac{d\bar{h}}{ds} \quad (18)$$

となる. 本サブルーチンは, $\bar{u}(s)$ を与え, 式 (??) に対応する Galerkin 法の式

$$\left\langle \left(\bar{u} \left(f + s^{-1/2} \bar{u} \right) - 2s^{1/2} \frac{d\bar{h}}{ds} \right) s^{1/2} (1-s) \frac{d}{ds} P_n^{(0,0)}(s) \right\rangle = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, N_0) \quad (19)$$

を満す $\bar{h}(s)$ に対応する展開係数 $\hat{h}_1^0, \hat{h}_2^0, \dots, \hat{h}_{N_0}^0$ を求めるものである (定数成分 \hat{h}_0^0 はこの式では決まらない). ちなみに, 式 (??) は, 以下のように書換えられ, 本サブルーチンでもこの式を利用している.

$$\hat{h}_n^0 = \frac{1}{2n(n+1)} \left\langle \bar{u} \left(f s^{1/2} + \bar{u} \right) (1-s) \frac{d}{ds} P_n^{(0,0)}(s) \right\rangle \quad (n = 1, 2, \dots, N_0) \quad (20)$$

3. 呼び出し方法

DKABLC(MM, JM, F, U, SH, P)

4. パラメーターの説明

MM	(I)	入力. 切断波数
JM	(I)	入力. Gauss 分点の数
F	(D)	入力. コリオリパラメーター f の値.
U	(D(JM))	入力. $\bar{u}(s_j)$ の分布を格納した配列
SH	(D(MM/2))	出力. $\hat{h}_1^0, \hat{h}_2^0, \dots, \hat{h}_{N_0}^0$ の値が格納される配列
P	(D(JM*2*((MM+8)*MM/4+1)))	入力. DKAINI で初期化された配列

5. 備考

4.9 DKALNR

1. 機能

線形安定性解析のための行列の計算.

2. 定義

浅水方程式 (??)-(??) において, $h_b \equiv 0$ とした場合, θ に依存しない定常解 $h = \bar{h}(s), u = \bar{u}(s), v = 0$ が得られているとする. $h = \bar{h}(s) + h'(s, \theta, t), u = \bar{u}(s) + u'(s, \theta, t), v = 0 + v'(s, \theta, t)$ とこの定常解に擾乱を加えた場合, この擾乱に対する線形化方程式は以下ようになる.

$$\frac{\partial h'}{\partial t} = -\bar{h} \left(s^{-1/2} \frac{\partial u'}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial(s^{1/2} v')}{\partial s} \right) - s^{-1/2} \bar{u} \frac{\partial h'}{\partial \theta} - 2s^{1/2} v' \frac{d\bar{h}}{ds}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -v' \left(f + 2 \frac{d(s^{1/2} \bar{u})}{ds} \right) - s^{-1/2} \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial \theta} - s^{-1/2} \frac{\partial h'}{\partial \theta}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = \bar{u} \left(2s^{-1/2} u' - s^{-1/2} \frac{\partial v'}{\partial \theta} \right) + f u' - 2s^{1/2} \frac{\partial h'}{\partial s}. \quad (23)$$

$(h', u', v') = (\tilde{h}^m(s), \tilde{u}^m(s), \tilde{v}^m(s)) e^{i(m\theta - \omega t)}$ と波動解を仮定すれば,

$$-i\omega \tilde{h}^m = -\bar{h} \left(s^{-1/2} i m \tilde{u}^m + 2 \frac{d(s^{1/2} \tilde{v}^m)}{ds} \right) - s^{-1/2} \bar{u} i m \tilde{h}^m - 2s^{1/2} \tilde{v}^m \frac{d\bar{h}}{ds}, \quad (24)$$

$$-i\omega \tilde{u}^m = -\tilde{v}^m \left(f + 2 \frac{d(s^{1/2} \bar{u})}{ds} \right) - s^{-1/2} \bar{u} i m \tilde{u}^m - s^{-1/2} i m \tilde{h}^m, \quad (25)$$

$$-i\omega \tilde{v}^m = \bar{u} \left(2s^{-1/2} \tilde{u}^m - s^{-1/2} i m \tilde{v}^m \right) + f \tilde{u}^m - 2s^{1/2} \frac{d\tilde{h}^m}{ds}, \quad (26)$$

となる. 少し整理すると,

$$\omega \tilde{h}^m = -\bar{h} \left(s^{-1/2} (-m) \tilde{u}^m + 2 \frac{d(s^{1/2} (i\tilde{v}^m))}{ds} \right) + s^{-1/2} \bar{u} m \tilde{h}^m - 2s^{1/2} (i\tilde{v}^m) \frac{d\bar{h}}{ds}, \quad (27)$$

$$\omega \tilde{u}^m = -(i\tilde{v}^m) \left(f + 2 \frac{d(s^{1/2} \bar{u})}{ds} \right) + s^{-1/2} \bar{u} m \tilde{u}^m + s^{-1/2} m \tilde{h}^m, \quad (28)$$

$$\omega (i\tilde{v}^m) = m s^{-1/2} \bar{u} (i\tilde{v}^m) - (f + 2s^{-1/2} \bar{u}) \tilde{u}^m + 2s^{1/2} \frac{d\tilde{h}^m}{ds}, \quad (29)$$

となる. 本サブルーチンは, $\bar{u}(s), \bar{h}(s)$ を与え, $m \geq 0$ の場合には展開式 (??), (??), (??) および Galerkin 法に基いて式 (??)-(??) を

$$\omega \begin{bmatrix} \hat{h}_0^m \\ \vdots \\ \hat{h}_{N_m}^m \\ \hat{u}_0^m \\ \vdots \\ \hat{u}_{N_m}^m \\ \hat{v}_{-1}^m \\ \vdots \\ \hat{v}_{N_m-1}^m \end{bmatrix} = \mathbf{B}_m \begin{bmatrix} \hat{h}_0^m \\ \vdots \\ \hat{h}_{N_m}^m \\ \hat{u}_0^m \\ \vdots \\ \hat{u}_{N_m}^m \\ \hat{v}_{-1}^m \\ \vdots \\ \hat{v}_{N_m-1}^m \end{bmatrix}$$

と表した場合の $(3N_m + 3) \times (3N_m + 3)$ 行列 \mathbf{B}_m を, $m = 0$ の場合には, 展開式 (??), (??)

および \hat{v}^0 のかわりに $i\hat{v}^0$ を (??) の形に展開したものに基いて式 (??)–(??) を

$$\omega \begin{bmatrix} \hat{h}_1^0 \\ \vdots \\ \hat{h}_{N_0}^0 \\ \hat{u}_0^0 \\ \vdots \\ \hat{u}_{N_0}^0 \\ \hat{v}_1^0 \\ \vdots \\ \hat{u}_{N_0}^0 \end{bmatrix} = B_0 \begin{bmatrix} \hat{h}_1^0 \\ \vdots \\ \hat{h}_{N_0}^0 \\ \hat{u}_0^0 \\ \vdots \\ \hat{u}_{N_0}^0 \\ \hat{v}_1^0 \\ \vdots \\ \hat{u}_{N_0}^0 \end{bmatrix}$$

と表した場合の $(3N_0 + 1) \times (3N_0 + 1)$ 行列 B_0 をそれぞれ求めるものである ($m = 0$ の場合, 定数成分 \hat{h}_0^0 は固有値問題に関係しない).

3. 呼び出し方法

DKALNR(MM, JM, M, F, H, U, B, WORK, P, A)

4. パラメーターの説明

MM	(I)	入力. 切断波数
JM	(I)	入力. Gauss 分点の数
M	(I)	入力. 波数 m の値.
F	(D)	入力. コリオリパラメーター f の値.
H	(D(JM*2))	入力. $\bar{h}(s_j)$, $d\bar{h}(s)/ds _{s=s_j}$ の分布を格納した配列
U	(D(JM*2))	入力. $\bar{u}(s_j)$, $d(s^{1/2}\bar{u}(s))/ds _{s=s_j}$ の分布を格納した配列
B	(D(大きさは備考参照))	出力. B_m が格納される配列
WORK	(D(JM*9))	作業領域.
P	(D(JM*2*((MM+8)*MM/4+1)))	入力. DKAINI で初期化された配列
A	(D(3*((MM+1)/2)*(MM/2)+7*MM/2))	入力. DKAINI で初期化された配列.

5. 備考

- B の大きさは, $M = 0$ の場合は $(MM/2*3+1)*(MM/2*3+1)$, $M \geq 1$ の場合は $((MM-M)/2*3+3)*((MM-M)/2*3+3)$ とすること. $M = 0$ の場合は $B(MM/2*3+1, MM/2*3+1)$, $M \geq 1$ の場合は $B((MM-M)/2*3+3, (MM-M)/2*3+3)$, とそれぞれ宣言しておけば, $B(I, J)$ には $(B_m)_{ij}$ が格納される.
- $H(JM, 2)$ と宣言されている場合, $H(J, 1)$ には $\bar{h}(s_j)$ を, $H(J, 2)$ には $d\bar{h}(s)/ds|_{s=s_j}$ をそれぞれ格納しておくこと.
- $U(JM, 2)$ と宣言されている場合, $U(J, 1)$ には $\bar{u}(s_j)$ を, $U(J, 2)$ には $d(s^{1/2}\bar{u}(s))/ds|_{s=s_j}$ をそれぞれ格納しておくこと.

4.10 DKAQ2U

1. 機能

ポテンシャル渦度分布から対応するバランスした \bar{u}, \bar{h} 場の展開係数を求める.

2. 定義

DKABLC の項で述べたように, 浅水方程式 (??)-(??) において, $h_b \equiv 0$ とした場合, θ に依存しない定常解 $h = \bar{h}(s)$, $u = \bar{u}(s)$, $v = 0$ の満すべき式は, 式 (??) となる. また, 対応するポテンシャル渦度 $\bar{q}(s)$ は

$$\bar{q}(s) = \frac{f + 2d(s^{1/2}\bar{u}(s))/ds}{\bar{h}(s)} \quad (30)$$

と定義される. 本サブルーチンは, $\bar{q}(s)$ を与え, 式 (??) に対応する Galerkin 法の式 (??) および, 式 (??) に対応する式

$$\left\langle \left(\bar{q}(s)\bar{h}(s) - (f + 2d(s^{1/2}\bar{u}(s))/ds) \right) P_n^{(0,0)}(s) \right\rangle = 0 \quad (n = 0, 1, \dots, N_0) \quad (31)$$

を満す $\bar{h}(s)$ および $\bar{u}(s)$ に対応する展開係数 $\hat{h}_0^0, \hat{h}_1^0, \dots, \hat{h}_{N_0}^0$ および $\hat{u}_0^0, \hat{u}_1^0, \dots, \hat{u}_{N_0}^0$ を求めるものである. ただし, 式 (??) および (??) では $\bar{h}(s)$ を決めるための条件が足りないので, 境界での値 $\bar{h}(1)$ を陽に与えておくものとする.

3. 呼び出し方法

DKAQ2U(MM, JM, F, HBNDRY, Q, U, SU, SH, C, D, E, DD, ERR, P)

4. パラメーターの説明

MM	(I)	入力. 切断波数
JM	(I)	入力. Gauss 分点の数
F	(D)	入力. コリオリパラメーター f の値.
HBNDRY	(D)	入力. $\bar{h}(1)$ の値.
Q	(D(JM))	入力. $\bar{q}(s_j)$ の分布を格納した配列
U	(D(JM))	作業領域.
SU	(D(MM/2+1))	出力. $\hat{u}_0^0, \hat{u}_1^0, \dots, \hat{u}_{N_0}^0$ の値が格納される配列
SH	(D(MM/2+1))	出力. $\hat{h}_0^0, \hat{h}_1^0, \dots, \hat{h}_{N_0}^0$ の値が格納される配列
C	(D((MM/2+1)*(MM/2+1)))	作業領域.
D	(D((MM/2+1)*(MM/2+1)))	作業領域.
E	(D(MM/2*(MM/2+1)))	作業領域.
DD	(D((MM/2+2)*(MM/2+2)))	作業領域.
ERR	(D(MM/2+2))	作業領域.
P	(D(JM*2*((MM+8)*MM/4+1)))	入力. DKAINI で初期化された配列

5. 備考

4.11 DKAEGA

1. 機能

重力波成分を分離して解くための行列の準備. DKATDG で用いられる配列 WRM, VRM, VLM の初期化を行う.

2. 定義

3. 呼び出し方法

DKAEGA(MM, JM, F, HBAR, WORK, P, A, WL, WV, WRM, VRM, VLM)

4. パラメーターの説明

MM	(I)	入力. 切断波数
JM	(I)	入力. Gauss 分点の数
F	(D)	入力. コリオリパラメーター f の値.
HBAR	(D)	入力. H の値 (DKATDG の項を参照).
WORK	(D(JM*13))	作業領域.
P	(D(JM*2*((MM+8)*MM/4+1)))	入力. DKAINI で初期化された配列
A	(D(3*((MM+1)/2)*(MM/2)+7*MM/2))	入力. DKAINI で初期化された配列.
WL	(D((MM/2+1)*18))	作業領域.
WV	(D((MM/2+1)*(MM/2+1)*27))	作業領域.
WRM	(D(MM*(MM+4)/2))	出力. DKATDG で用いられる配列.
VRM	(D(6*(1+(MM+2)/2*((MM+5)/2*MM-3)/3)+MM/2*2))	出力. DKATDG で用いられる配列.
VLM	(D(6*(1+(MM+2)/2*((MM+5)/2*MM-3)/3)+MM/2*2))	出力. DKATDG で用いられる配列.

5. 備考

- 本サブルーチンは, 内部で LAPACK(<ftp://ftp.netlib.org/lapack/lapack.tar.gz>) に含まれる固有値・固有ベクトル計算ルーチン DGEEV を利用している.

4.12 DKATDG

1. 機能

重力波成分のみについての時間発展を行う.

2. 定義

浅水方程式 (??)-(??) から平均水深 H (定数) に対応する重力波成分のみに対する線形方程式:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H \left(s^{-1/2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial (s^{1/2} v)}{\partial s} \right) \quad (32)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -fv - s^{-1/2} \frac{\partial h}{\partial \theta} \quad (33)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = fu - 2s^{1/2} \frac{\partial h}{\partial s} \quad (34)$$

に対して Galerkin 法を適用して展開係数を Δt だけ時間発展する.

3. 呼び出し方法

DKATDG(MM, S, DT, WS, WRM, VRM, VLM)

4. パラメーターの説明

MM	(I)	入力. 切断波数
S	(D((MM+1)*(MM+2)/2*3-1))	入力および出力. 入力: 現在時刻の $\hat{h}_n^m, \hat{u}_n^m, \hat{v}_n^m$ が格納されている配列. 出力: Δt 後の $\hat{h}_n^m, \hat{u}_n^m, \hat{v}_n^m$ が格納される配列.
DT	(D)	入力. 時間発展する時間刻み幅 (Δt).
WS	(D((MM/2+1)*4))	作業領域.
WRM	(D(MM*(MM+4)/2))	入力. DKAEGA で初期化された配列.
VRM	(D(6*(1+(MM+2)/2*((MM+5)/2*MM-3)/3)+MM/2*2))	入力. DKAEGA で初期化された配列.
VLM	(D(6*(1+(MM+2)/2*((MM+5)/2*MM-3)/3)+MM/2*2))	入力. DKAEGA で初期化された配列.

5. 備考

- このサブルーチンは, DKATDL と組み合わせて TDRKNU 等から利用される.

4.13 DKATDL

1. 機能

重力波成分を除いた時間微分項の計算.

2. 定義

浅水方程式 (??)-(??) から平均水深 H に対応する重力波成分を除いた方程式:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -(h - H) \left(s^{-1/2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial(s^{1/2}v)}{\partial s} \right) - s^{-1/2} u \frac{\partial h}{\partial \theta} - 2s^{1/2} v \frac{\partial h}{\partial s} \quad (35)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v \left(2 \frac{\partial(s^{1/2}u)}{\partial s} \right) - s^{-1/2} u \frac{\partial u}{\partial \theta} - s^{-1/2} \frac{\partial h_b}{\partial \theta} \quad (36)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = u \left(s^{-1/2} u - s^{-1/2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - 2v \frac{\partial(s^{1/2}v)}{\partial s} + s^{-1/2} v^2 - 2s^{1/2} \frac{\partial h_b}{\partial s} \quad (37)$$

に対して Galerkin 法を適用して展開係数の時間微分を定める.

3. 呼び出し方法

DKATDL(MM, JM, IM, F, HB, S, DS, G, IT, T, P, A)

4. パラメーターの説明

MM	(I)	入力. 切断波数
JM	(I)	入力. Gauss 分点の数
IM	(I)	入力. θ 方向の分割数
F	(D)	入力. コリオリパラメーター f の値.
HB	(D(JM*IM*2))	入力. $\partial h_b / \partial \theta, \partial h_b / \partial s$ の格子点値が格納されている配列 (並べ方は備考参照).
S	(D((MM+1)*(MM+2)/2*3-1))	入力. $\hat{h}_n^m, \hat{u}_n^m, \hat{v}_n^m$ が格納されている配列 (並べ方は備考参照).
DS	(D((MM+1)*(MM+2)/2*3-1))	出力. $d\hat{h}_n^m/dt, dt\hat{u}_n^m/dt, d\hat{v}_n^m/dt$ が格納される配列 (並び方は備考参照).
WORK	(D(JM*IM*10))	作業領域.
IT	(I(5))	入力. DKAINI で初期化された配列
T	(D(IM*2))	入力. DKAINI で初期化された配列
P	(D(JM*2*((MM+8)*MM/4+1))	入力. DKAINI で初期化された配列
A	(D(3*((MM+1)/2)*(MM/2)+7*MM/2))	入力. DKAINI で初期化された配列.

5. 備考

- 2 次の非線形項からの aliasing を除去するためには, $IM > 3*MM$, かつ $JM \geq (MM+MM/2+2)/2$ を満すようにしておくこと.
- S および DS への $\hat{h}_n^m, \hat{u}_n^m, \hat{v}_n^m$ および $d\hat{h}_n^m/dt, dt\hat{u}_n^m/dt, d\hat{v}_n^m/dt$ の格納順については, DKAS2G の項参照.
- $HB(JM, 0; IM-1, 2)$ と宣言する場合, $HB(J, I, 1)$ には $(\partial h_b / \partial \theta)(s_j, \theta_i)$ を $HB(J, I, 2)$ には $(\partial h_b / \partial s)(s_j, \theta_i)$ をそれぞれ格納しておくこと.