流体力学: ニュートン流体の基礎方程式 (ナビエ-ストークス方程式とその仲間)

林 祥介, 竹広 真一

2000 年 05 月 24 日

目 次

要旨

ここではニュートン流体の運動方程式とエネルギー方程式あるいは内部エネルギー, エンタルピー, エントロピーの式を導く.

等方的な流体の運動方程式を特に Navier-Stokes 方程式という. 場合によってはさらに非圧縮である近似を施したものをそのように呼ぶこともある.

エントロピーの式より全エントロピーが増大するという熱力学第 2 法則 (?) から, 粘性・熱拡散係数が正であることが導かれる.

1 質量保存則

2 Navier-Stokes 方程式

「連続体力学：基礎法則」の運動方程式に「連続体力学：構成方程式」でのニュートン流体の構成方程式の表現を代入することにより, ニュートン流体の運動方程式が得られる.

$$
\begin{aligned}
\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_i}(\zeta\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{v}) \\
&\quad +\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)\right\}-\rho\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

これを Navier-Stokes 方程式[1]という.

特に, 次の仮定が成り立つ場合, 運動方程式 (6) は簡単な形になる.

- 非圧縮流体である, すなわち $\dfrac{d\rho}{dt}=0$ とみなせる. このとき, $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\dfrac{\partial v_l}{\partial x_l}=0$ である.
- 粘性率 η が流体中で大きく変化しない.

$$
\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\eta\frac{\partial^2 v_i}{\partial {x_k}^2}-\rho\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}. \qquad (2)
$$

これが非圧縮での Navier-Stokes 方程式[1]である. ベクトル形式で書けば

$$
\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}\right)=-\nabla p+\eta\nabla^2\boldsymbol{v}-\rho\cdot\nabla\Phi. \qquad (3)
$$

[1] Navier-Stokes 方程式という名称は非圧縮の場合の式について使われるものであると思っていた (例えば, 今井 1973) が, 最近の流行 (例えば, 流体力学ハンドブック (1987) P.14) では圧縮性がある場合について Navier-Stokes 方程式と呼び, 非圧縮の場合には 非圧縮の Navier-Stokes 方程式と呼ぶようである.

あるいは ρ で割って

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\boldsymbol{v} - \nabla\Phi. \tag{4}$$

$\nu \equiv \dfrac{\eta}{\rho}$ は動粘性係数（率）と呼ばれる.

3　ニュートン流体のエネルギー保存則

ここでは, 等方的な Newton 流体における, 内部エネルギー, エンタルピー, エントロピーの時間変化の式を書き下す.

まず, 等方的な流体についての σ_{ik} の表式 (6) を用いて粘性散逸項を表現しておく.

$$\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \eta\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) + \zeta\delta_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}.$$

右辺第 1 項は括弧の中身が対称であることに注意して,

$$\begin{aligned}
& \eta\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) \\
= \;& \frac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) \\
= \;& \frac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2 + \frac{1}{2}\eta\cdot\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_m}{\partial x_m}\cdot\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) \\
= \;& \frac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2.
\end{aligned}$$

右辺第 2 項は

$$\begin{aligned}
\zeta\delta_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial v_l}{\partial x_l} &= \zeta\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \\
&= \zeta(\nabla\cdot\boldsymbol{v})^2.
\end{aligned}$$

よって, 等方的な Newton 流体についての内部エネルギー・エンタルピー・エントロピーの式は次のようになる.

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\varepsilon\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2 + \zeta(\nabla\cdot\boldsymbol{v})^2 - p\nabla\cdot\boldsymbol{v} - \nabla\cdot\boldsymbol{q}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho h\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2 + \zeta(\nabla\cdot\boldsymbol{v})^2 - \nabla\cdot\boldsymbol{q} + \frac{dp}{dt}, \tag{6}$$

$$\rho T\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)s = \frac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2 + \zeta(\nabla\cdot\boldsymbol{v})^2 - \nabla\cdot\boldsymbol{q}. \tag{7}$$

特に, 非圧縮流体 のとき, (17)〜(19) は次のようになる.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \nabla\cdot(\rho\varepsilon\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 - \nabla\cdot\boldsymbol{q}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \nabla\cdot(\rho h\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 - \nabla\cdot\boldsymbol{q} + \frac{dp}{dt}, \tag{9}$$

$$\rho T\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)s = \frac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 - \nabla\cdot\boldsymbol{q}. \tag{10}$$

また, 粘性・熱流の効果を無視できる 場合, (17)〜(19) は次のようになる.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \nabla\cdot(\rho\varepsilon\boldsymbol{v}) = -p\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{v}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \nabla\cdot(\rho h\boldsymbol{v}) = \frac{dp}{dt}, \tag{12}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)s = 0. \tag{13}$$

4　全エントロピーの時間変化

5　まとめ

5.1　ニュートン流体の方程式系

5.2　非圧縮ニュートン流体の方程式系

6 参考文献

Batchelor,G.K., 橋本英典 他 訳：入門流体力学, 東京電機大学出版局, 614pp.

Landau,L.D., Lifshitz,E.M., 竹内 均 訳, 1970：流体力学 1, 東京図書, 280pp.

今井　功, 1973：流体力学 (前編), 裳華房, 428pp.

Glansdorff,P.,Prigogine,I., 松本 元 ,竹山 脇三 訳, 1977：構造・安定性・ゆらぎ. みすず書房, 297pp.

中村 育雄, 1998：流体解析ハンドブック, 共立出版, 538pp.

7 謝辞

本稿は 1989 年から 1993 年に東京大学地球惑星物理学科で行われていた, 流体理論セミナーでのセミナーノートがもとになっている. 原作版は竹広真一による「流体力学の基礎方程式」 (1989-04-21) であり, 保坂征宏による改定 (1990-04-23) を経て, 林祥介/竹広真一によって「連続体力学: 基礎法則」として書き直された (1996-04-23). 構成とデバッグに協力してくれたセミナー参加者のすべてに感謝するものである.