連続体力学: 基礎法則

林 祥介, 竹広 真一

2002 年 07 月 14 日

目 次

要旨

連続体の運動を記述するための一連の方程式である連続の式 (質量保存則)・運動方程式 (運動量保存則)・熱の式 (エネルギー保存則), について述べる.

これらの方程式を導く方法として, 物質に固定した領域にて物理量 (質量, 運動量, エネルギー) のやりとりを書き下す方法と空間に固定した領域で行う方法の 2 通りがある.

極性のない物質では運動量保存則の結果を用いて角運動量を診断的に求めることができる. この場合, 角運動量保存則は独立な方程式を与えることはなく, 応力の表現に制限を与えるだけである.

1　物質に固定した領域を用いた導出

1.1　連続の式 = 質量保存則

連続体内の物質の運動とともにうごく領域 $D(t)$ に対して, その質量は連続体の変形にはよらず変化しないことを考えると,

$$\frac{d}{dt}\int_{D(t)}\rho dV = 0. \tag{1}$$

時間微分と積分を入れ換えれば (第 A 節)

$$\int_{D(t)}\left(\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)dV = 0$$

D を任意の無限小領域として選んで良いので

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0. \tag{2}$$

この式は, 流体粒子に伴う密度変化が, 体積変化 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ のみにより生じることを示している.

さらに変形すると

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0, \tag{3}$$

と表すことができる. この表現は空間に固定した領域での質量変化を微視的に表している. 空間に固定したある点での密度変化は, 周囲から流入あるいは流出する質量流束 $\rho\boldsymbol{v}$ の収束・発散により引き起こされる.

1.2　運動量方程式: オイラーの第一法則

連続体の運動方程式は連続体内の領域 D に対してニュートン力学を適用すれば次のように書き下せる:

$$\frac{d}{dt}\int_D \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\rho dV = \oint_{\partial D}\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})dS+\int_D \boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{x})dV \tag{4}$$

ここで, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ は連続体の各点における連続体物質の運動速度であり,

$$\int_D \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\rho dV \tag{5}$$

は連続体領域 D が持つ全運動量に他ならない.

(4) は領域 D の流体が連続体の領域 D に働く力により加速されることを表している. ここで領域に働く力として考えているものは, 各点に働く体積力 $\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{x})$ と, 表面 ∂D に働く応力 $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})$ である.

積分形で表現されるこの運動方程式を特にオイラーの第一運動法則という (Euler's first law of motion) ことがある.

時間積分と空間微分を交換することにより

$$\int_D \rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} dV = \oint_{\partial D} \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) dS + \int_D \boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{x}) dV.$$

さらに応力は応力テンソル σ_{ij} を用いて

$$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{ij} \sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{e}_i (\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{n}) = \sum_{ij} \sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) n_j \boldsymbol{e}_i \tag{6}$$

と表される (「連続体の基礎 : 応力」参照) ので

$$\begin{aligned} \int_D \rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} dV &= \oint_{\partial D} \sigma_{ij} n_j \boldsymbol{e}_i dS + \int_D \boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{x}) dV \\ &= \int_D \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \boldsymbol{e}_i dV + \int_D \boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{x}) dV. \end{aligned}$$

したがって, 各成分の式で表せば

$$\int_D \left(\rho \frac{dv_i}{dt} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - F_{bi} \right) dV = 0.$$

任意の領域 D について成り立たねばならないので

$$\rho \frac{dv_i}{dt} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - F_{bi} = 0.$$

すなわち

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_{bi}. \tag{7}$$

これが連続体の運動方程式である.

さらに物質微分を書き直して質量保存則を用いると

$$\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j - \sigma_{ij}) = F_{bi}. \tag{8}$$

これが連続体の運動量保存則である.

1.3　連続体の角運動量保存則: オイラーの第二法則

連続体の角運動量方程式は連続体内の領域 D に対してニュートン力学を適用すれば次のように書き下せる:

$$\frac{d}{dt}\int_D \boldsymbol{j}\rho dV \quad = \quad \oint_{\partial D} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\sigma_n}(\boldsymbol{x}) dS + \int_D \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{x}) dV \tag{9}$$

$\boldsymbol{j}$ は角運動量密度であり,

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{s} \tag{10}$$

である. ここで $\boldsymbol{s}$ は微視的な内部角運動量である. 通常の非極性物質 (nonpolar material) では内部角運動量を考えることはなく,

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \tag{11}$$

とする.

(9) は領域 D の流体の全角運動量が連続体の領域 D に働く力のトルクにより変化させせられることを示している.

積分形で表現されるこの角運動量の式を特にオイラーの第二運動法則という (Euler's first law of motion) ことがある.

応力が応力テンソル σ_{ij} で

$$\boldsymbol{\sigma_n}(\boldsymbol{x}) \quad = \quad \sum_{ij} \sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{e}_i (\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{n}) = \sum_{ij} \sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) n_j \boldsymbol{e}_i \tag{12}$$

と表されることを用いて (「連続体の基礎 : 応力」参照), 各成分の式として表すと

$$\frac{d}{dt}\int_D j_i \rho dV \quad = \quad \oint_{\partial D} \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} n_l dS + \int_D \epsilon_{ijk} x_j F_{bk} dV$$

ここで ϵ_{ijk} は... テンソルである.

時間微分と空間積分を交換し, Gauss の定理を用いると

$$\int_D \frac{dj_i}{dt} \rho dV \quad = \quad \int_D \frac{\partial}{\partial x_l}(\epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl}) dV + \int_D \epsilon_{ijk} x_j F_{bk} dV,$$

左辺は, 時間部分が物質微分であることに注意すると

$$\begin{aligned} \frac{dj_i}{dt} \quad &= \quad \frac{d}{dt}(\epsilon_{ijk} x_j v_k + s_i) = \epsilon_{ijk} \frac{dx_j}{dt} v_k + \epsilon_{ijk} x_j \frac{dv_k}{dt} + \frac{ds_i}{dt} \\ &= \quad \epsilon_{ijk} v_j v_k + \epsilon_{ijk} x_j \frac{dv_k}{dt} + \frac{ds_i}{dt} = \epsilon_{ijk} x_j \frac{dv_k}{dt} + \frac{ds_i}{dt} \end{aligned}$$

右辺第 1 項目は

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_l}(\epsilon_{ijk}x_j\sigma_{kl}) &= \epsilon_{ijk}\frac{\partial x_j}{\partial x_l}\sigma_{kl} + \epsilon_{ijk}x_j\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} \\
&= \epsilon_{ijk}\delta_{jl}\sigma_{kl} + \epsilon_{ijk}x_j\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} = \epsilon_{ijk}\sigma_{kj} + \epsilon_{ijk}x_j\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l}
\end{aligned}
$$

これらを代入して整理すると

$$
\int_D \epsilon_{ijk}x_j\left(\rho\frac{dv_k}{dt} - \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} - F_{bk}\right)dV + \int_D \rho\frac{ds_i}{dt}dV = \int_D \epsilon_{ijk}\sigma_{kj}dV
$$

運動方程式 (4) を代入することにより

$$
\int_D (\rho\frac{ds_i}{dt} - \epsilon_{ijk}\sigma_{kj})dV = 0.
$$

任意の領域 D について成り立たねばならないので

$$
\rho\frac{ds_i}{dt} - \epsilon_{ijk}\sigma_{kj} = 0. \tag{13}
$$

となり, 内部角運動量の時間変化を表す式が得られる.

非極性物質の場合にはこの式は単に

$$
\epsilon_{ijk}\sigma_{kj} = 0, \tag{14}
$$

となる. 独立な方程式を与えず, 応力テンソルが対称であることを制約するだけである.

1.4　連続体のエネルギー保存則

流体の運動を記述するには, 質量保存則, 運動方程式に加えて, 流体がどのように熱を受け取るかを記述する式が必要である. ここではエネルギー保存則から出発して, 流体の熱のやりとりの仕方を表わす式 — 熱輸送の式 — を導く.

1.4.1　エネルギー保存則

流体とともに運動する領域 D' を考える. 領域内の流体になされる仕事と流体が受け取る熱は

- 領域を囲む閉曲面 $\partial D'$ に働く応力がする仕事
- 体積力のする仕事
- 閉曲面を通して流れ込む熱

である. 熱力学第 1 法則（エネルギー保存則）によれば, 加えられた仕事と熱が流体の運動エネルギーと内部エネルギーの増加に等しい. したがって D' についてのエネルギーの式は次のようになる.

$$\frac{d}{dt}\int_{D'}\rho\left(\frac{1}{2}v_i^2+\varepsilon\right)dV=\oint_{\partial D'}\sigma_{ik}v_i n'_k dS+\int_{D'}F_{bi}v_i dV-\oint_{\partial D'}q_k n'_k dS$$

ε は単位質量当りの流体の内部エネルギー, q_i は閉曲面を通して流れ込む熱流束[1]である. Gauss の定理を用いて変型すると[2]

$$\int_{D'}\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v_i^2+\varepsilon\right)dV=\int_{D'}\frac{\partial}{\partial x_k}(v_i\sigma_{ik})dV+\int_{D'}F_{bi}v_i dV-\int_{D'}\frac{\partial q_k}{\partial x_k}dV.$$

領域 D' が任意にとれることから

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v_i^2+\varepsilon\right)=\frac{\partial}{\partial x_k}(v_i\sigma_{ik})+F_{bi}v_i-\frac{\partial q_k}{\partial x_k}.$$

あるいは質量保存則を用いると

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{1}{2}v_i^2+\varepsilon\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\rho\left(\frac{1}{2}v_i^2+\varepsilon\right)v_k-\sigma_{ik}v_i+q_k\right]=F_{bi}v_i. \tag{15}$$

これが連続体のエネルギー保存則である.

特に体積力が保存力であり, 時間変化しないポテンシャルエネルギー Φ で

$$\boldsymbol{F_b}=-\rho\nabla\Phi, \tag{16}$$

と表される場合を考えよう[1].　このとき, 左辺は次のように変型できる.

$$F_i v_i=-\rho\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}v_i=-\rho\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t}-\nabla\cdot(\rho\Phi\boldsymbol{v})$$

[1]熱流束として考えるものはおもに次の 2 つである.

- 熱伝導 による熱流束 $\boldsymbol{q}^T$
  流体中に温度勾配が存在するとき, それを解消する方向に熱流束が生じる
- 放射による熱流束 $\boldsymbol{q}^{rad}$

特に熱伝導による熱流束は, 考える流体中の温度勾配が十分小さいとき, $q_i^T=-\kappa_{ij}\dfrac{\partial T}{\partial x_j}$ と表わされる.

[2]左辺の時間微分と空間積分の演算の順序の交換については, 別シリーズ‘スカラー量の保存’参照.

[1]ポテンシャルが時間変化する場合, 例えば重力がその密度分布により定まる場合にはエネルギーは保存しないのであろうか?

したがってエネルギー保存則は

$$\frac{\partial e_{tot}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(e_{tot} v_k - v_i \sigma_{ik} + q_k) = 0, \tag{17}$$

$$e_{tot} \equiv \rho \left(\frac{1}{2} v_i^2 + \varepsilon + \Phi \right). \tag{18}$$

となる. ここで e_{tot} は, 単位体積当りの流体のもつ全エネルギーである. $F_k = e_{tot} v_k - v_i \sigma_{ik} + q_k$ をエネルギー流束密度ベクトルという.

エネルギー保存則の代わりとして, 内部エネルギー, エンタルピー, またはエントロピーの時間変化を表す式を用いることも多い.

1.4.2　運動エネルギーの時間変化の式

エネルギー保存則 (15) の変形に移る前に, 運動エネルギーの時間変化の式をもとめておこう. 運動方程式 (7) に ρv_i をかけて i について和をとることにより運動エネルギーの時間変化の式が得られる.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} \rho v_i^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{ v_k \left(\frac{1}{2} \rho v_i^2 \right) - v_i \sigma_{ik} \right\} = F_{bi} v_i - \sigma_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \tag{19}$$

1.4.3　内部エネルギーの時間変化の式

(19) を (15) から差し引くと内部エネルギーの式が得られる.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \nabla\cdot(\rho\varepsilon \boldsymbol{v}) = \sigma_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \nabla\cdot\boldsymbol{q}. \tag{20}$$

1.4.4　エンタルピーの時間変化の式

質量保存則と熱力学関係式を用いて (20) を変型する. 単位質量あたりのエンタルピーを h とする. 熱力学関係式 $h = \varepsilon + \dfrac{p}{\rho}$ を用いると (20) 式左辺は次のようになる.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \nabla\cdot(\rho\varepsilon \boldsymbol{v}) \;\; = \;\; \frac{\partial}{\partial t}\left\{ \rho \left(h - \frac{p}{\rho} \right) \right\} + \nabla\cdot \left\{ \rho \left(h - \frac{p}{\rho} \right) \boldsymbol{v} \right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial t}(\rho h) - \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho h \boldsymbol{v}) - \nabla\cdot(p\boldsymbol{v}) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \nabla\cdot(\rho h \boldsymbol{v}) - \frac{dp}{dt} - p\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{v}
\end{aligned}
$$

よってエンタルピーの式は

$$
\frac{d}{dt}(\rho h) + \nabla\cdot(\rho h\boldsymbol{v}) = \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \nabla\cdot\boldsymbol{q} + \frac{dp}{dt}. \tag{21}
$$

ただし $\sigma'_{ik} \equiv \sigma_{ik} + p\delta_{ik}$ は粘性応力テンソル（応力テンソルから圧力成分 $-p\delta_{ik}$ を除いたもの）である.

1.4.5 エントロピーの時間変化の式

単位質量あたりのエントロピーを s とする. 熱力学関係式 $d\varepsilon = Tds + \dfrac{p}{\rho^2}d\rho$ と質量保存則を用いて (20) 式左辺を変型すると,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \nabla\cdot(\rho\varepsilon\boldsymbol{v}) &= \rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\varepsilon \\
&= \rho T\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)s + \frac{p}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\rho \\
&= \rho T\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)s - p\nabla\cdot\boldsymbol{v}.
\end{aligned}
$$

よってエントロピーの式は

$$
\rho T\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)s = \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \nabla\cdot\boldsymbol{q}. \tag{22}
$$

(22) 式は熱輸送の式とも呼ばれる. 左辺 $\rho T\left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)s$ は単位時間に単位体積の流体が受け取った熱, 右辺第 1 項 $\sigma'_{ik}\dfrac{\partial v_i}{\partial x_k}$ は粘性散逸により発生した熱, 右辺第 2 項は熱流の収束発散である.

連続体の運動の時間発展を記述する方程式系は質量保存則 (3), 運動方程式 (7), エネルギー保存則 (15) で十分である. 連続体の運動を記述するための未知変数が 5 つであるのに対して, 方程式の数も 5 つである (質量保存則 + 運動方程式 3 成分 + エネルギー保存則).

しかしながら, 実際に運動を解くためには構成物質の物理的性質を表現する構成方程式 (応力テンソルの表現) と熱力学関係式が必要となる. 「連続体力学 : 構成方程式」, 「流体力学 : ナビエストークス方程式」を参照のこと.

2　空間に固定した領域を用いた導出

2.1　単位体積あたりのスカラー量の保存則

空間に固定した領域 D を考える. 単位体積当りの量として定義されたスカラー量 A について, 領域 D 内の量の時間変化は次のように書ける.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_D A(\boldsymbol{x},t)dV = -\oint_{\partial D}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dS + \int_D Q[A](\boldsymbol{x},t)dV.$$

ただし ∂D は D の表面を表し, $\boldsymbol{n}$ は ∂D における外向き単位法線ベクトルを表す.

$\boldsymbol{F}$ は A に関する流速密度 (flux density) であり, 右辺第 1 項は単位時間当りに ∂D を通して D 内に流れ込む A の量である. $Q[A]$ は単位体積 · 単位時間当りの A の生成 · 消滅 (source, sink) を表わす.

空間積分と時間微分を交換し, Gauss の定理を用いて変形すると

$$\int_D\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{F}\right)dV = \int_D Q[A]dV.$$

領域 D のとりかたは任意であるから被積分関数が等しくなければならない.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{F} = Q[A]. \tag{23}$$

これがスカラー量の保存を表わす式である.

特に, $\boldsymbol{F}$ が流体の運動による移流の部分 $A\boldsymbol{v}$ と, その他の部分 $\boldsymbol{F}'$ に分けられるときは次のように書ける.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla\cdot(A\boldsymbol{v} + \boldsymbol{F}') = Q[A]. \tag{24}$$

2.2 質量保存則

A として, 単位体積当りの質量 (密度) ρ を考える. 質量の変化は境界面を通しての質量の流入・流出にのみ引き起こされる. すなわち,

$$\boldsymbol{F} = \rho \boldsymbol{v}, \quad Q[\rho] = 0,$$

であるから

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho \boldsymbol{v}) = 0. \tag{25}$$

となる.

2.3 運動量保存則

A として単位体積当りの運動量の i 成分 ρv_i を考える. 運動量の時間変化を与えるものは, 境界を通しての流れによる運動量の移流, 境界面を通じて与えられる面積力による力積, それに体積力による力積である. すなわち,

$$(F_i)_k = \Pi_{ik} = \rho v_i v_k - \sigma_{ik},$$
$$Q[\rho v_i] = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i},$$

とおくことにより, 運動量保存則が得られる.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k - \sigma_{ik}) = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}. \tag{26}$$

2.4 エネルギー保存則

ポテンシャルが時間によらない場合について考える. A として単位体積当りの全エネルギー $e_{tot} \equiv \rho \left(\frac{1}{2} v^2 + \varepsilon + \Phi \right)$ を考える. エネルギーの時間変化は境界面を通しての面積力による仕事, 熱流のみである.

$$F_i' = -\sigma_{ij} v_j + q_i,$$
$$Q[e_{tot}] = 0.$$

全エネルギーが保存しなければならないのでソース項は 0 である. したがって,

$$\frac{\partial e_{tot}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(e_{tot} v_i - \sigma_{ij} v_j + q_i \right) = 0. \tag{27}$$

A 補遺：積分と微分の交換

ある物理量 A の時間変化のを定める式を求める際には, 流体とともに運動する領域 D における時間変化

$$\frac{d}{dt}\int_{D(\boldsymbol{x},t)} A(\boldsymbol{x},t)dV \tag{28}$$

において, 空間積分と時間微分を交換しなければならなくなる. ここではその公式であるレイノルズの輸送定理 (Reynolds' transport theorem) [2]を導出する.

左辺の積分について, 積分変数を $\boldsymbol{x}$ から流体粒子のラベル座標[1] $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$ に変換する.

$$\frac{d}{dt}\int_{D(\boldsymbol{x},t)} A(\boldsymbol{x},t)dV = \frac{d}{dt}\int_{D'_\xi} A(\boldsymbol{\xi},t)\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}}d\xi d\eta d\zeta.$$

D' が流体とともに運動するので, $\boldsymbol{\xi}$ 座標での積分領域 D'_ξ は任意の時間で変化しない. したがって時間微分は空間積分と交換する.

$$\frac{d}{dt}\int\int\int_{D'_\xi} A(\boldsymbol{\xi},t)\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}}d\xi d\eta d\zeta = \int\int\int_{D'_\xi} \frac{d}{dt}\left(A(\boldsymbol{\xi},t)\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}}d\xi d\eta d\zeta\right)$$

この時間微分は, ラベル座標一定のもとで実行する Lagrange 微分であることに注意しよう. $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{\xi}, t$ の関数であることに注意して右辺は次のように変形される.

$$\begin{aligned}
&\int_{D'_\xi} \frac{d}{dt}\left(A(\boldsymbol{\xi},t)\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}}d\xi d\eta d\zeta\right) \\
= \ &\int_{D'_\xi} \frac{dA(\xi,t)}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}}d\xi d\eta d\zeta + \int_{D'_\xi} A(\boldsymbol{\xi},t)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}}\right)d\xi d\eta d\zeta \\
= \ &\int_{D'(\boldsymbol{x},t)} \frac{dA(\boldsymbol{x},t)}{dt}dxdydz + \int_{D'_\xi} A(\boldsymbol{\xi},t)\left(\frac{\partial(\dot{x},y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)} + \frac{\partial(x,\dot{y},z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)} + \frac{\partial(x,y,\dot{z})}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}\right)d\xi d\eta d\zeta \\
= \ &\int_{D'(\boldsymbol{x},t)} \frac{dA(\boldsymbol{x},t)}{dt}dxdydz + \int_{D'(\boldsymbol{x},t)} A(\boldsymbol{x},t)\left(\frac{\partial(\dot{x},y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)} + \frac{\partial(x,\dot{y},z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)} + \frac{\partial(x,y,\dot{z})}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}\right)\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \boldsymbol{x}}dxdydz \\
= \ &\int_{D'(\boldsymbol{x},t)} \frac{dA}{dt}dxdydz \\
&+\int_{D'(\boldsymbol{x},t)} A(\boldsymbol{x},t)\left(\frac{\partial(\dot{x},y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}\frac{\partial(\xi,\eta,\zeta)}{\partial(x,y,z)} + \frac{\partial(x,\dot{y},z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}\frac{\partial(\xi,\eta,\zeta)}{\partial(x,y,z)} + \frac{\partial(x,y,\dot{z})}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}\frac{\partial(\xi,\eta,\zeta)}{\partial(x,y,z)}\right)dxdydz \\
= \ &\int_{D'(\boldsymbol{x},t)} \frac{dA}{dt}dxdydz + \int_{D'(\boldsymbol{x},t)} A\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)dxdydz \\
= \ &\int_{D'(\boldsymbol{x},t)} \left(\frac{dA}{dt} + A\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)dxdydz
\end{aligned}$$

[2]この名前は流体解析ハンドブックにて紹介されていた.

[1]例えば, $t = t_0$ における流体粒子の位置とすることが多い.

したがって (6) 式は

$$\frac{d}{dt}\int_{D'(\boldsymbol{x},t)} A(\boldsymbol{x},t)dV = \int_{D'(\boldsymbol{x},t)} \left(\frac{dA}{dt} + A\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right) dV \qquad (29)$$

となる. これをレイノルズの輸送定理 (Reynolds' transport theorem) という.

(29) はさらに変形できて

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{D'(\boldsymbol{x},t)} A(\boldsymbol{x},t)dV &= \int_{D'(\boldsymbol{x},t)} \left(\frac{dA}{dt} + A\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right) dV \\ &= \int_{D'(\boldsymbol{x},t)} \left\{\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla\cdot(A\boldsymbol{v})\right\} dV \\ &= \int_{D'(\boldsymbol{x},t)} \frac{\partial A}{\partial t}dV + \oint_{\partial D'(\boldsymbol{x},t)} A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}dS\end{aligned}$$

となる. これをライプニッツの法則 (Libniz rule) という.

単位質量あたりの物理量 s を考える場合には, $A = \rho s$ として質量保存則を用いることにより

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{D'(\boldsymbol{x},t)} \rho s(\boldsymbol{x},t)dV &= \int_{D'(\boldsymbol{x},t)} \left(\frac{d(\rho s)}{dt} + \rho s\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right) dV \\ &= \int_{D'(\boldsymbol{x},t)} \left\{s\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right) + \rho\frac{ds}{dt}\right\} dV \\ &= \int_{D'(\boldsymbol{x},t)} \rho\frac{ds}{dt}dV\end{aligned}$$

とできる.

B　参考文献

Batchelor,G.K., 橋本英典 他 訳 : 入門流体力学, 東京電機大学出版局, 614pp.

Landau,L.D., Lifshitz,E.M., 竹内 均 訳, 1970 : 流体力学 1, 東京図書, 280pp.

今井　功, 1973 : 流体力学 (前編), 裳華房, 428pp.

Glansdorff,P.,Prigogine,I., 松本 元 , 竹山 脇三 訳, 1977 : 構造・安定性・ゆらぎ. みすず書房, 297pp.

中村 育雄, 1998 : 流体解析ハンドブック, 共立出版, 538pp.

C 謝辞

本稿は 1989 年から 1993 年に東京大学地球惑星物理学科で行われていた, 流体理論セミナーでのセミナーノートがもとになっている. 原作版は竹広真一による「流体力学の基礎方程式」 (1989-04-21) であり, 保坂征宏による改定 (1990-04-23) を経て, 林祥介/竹広真一によって「連続体力学: 基礎法則」として書き直された (1996-04-23). 構成とデバッグに協力してくれたセミナー参加者のすべてに感謝するものである.

本ドキュメントは

http://www.gfd-dennou.org/library/rironn/renzoku/housoku/pub/