

# ブシネスク流体プリミティブ方程式系 を解く三次元スペクトルモデルの構築

2022/07/06

流体地球物理学教育研究分野 M2

岡田和真

# 目次

1. はじめに
2. 支配方程式系
3. スペクトル展開
4. 時間積分法
5. モデルチェック
6. まとめと今後の方針
7. 参考文献

# 1. はじめに

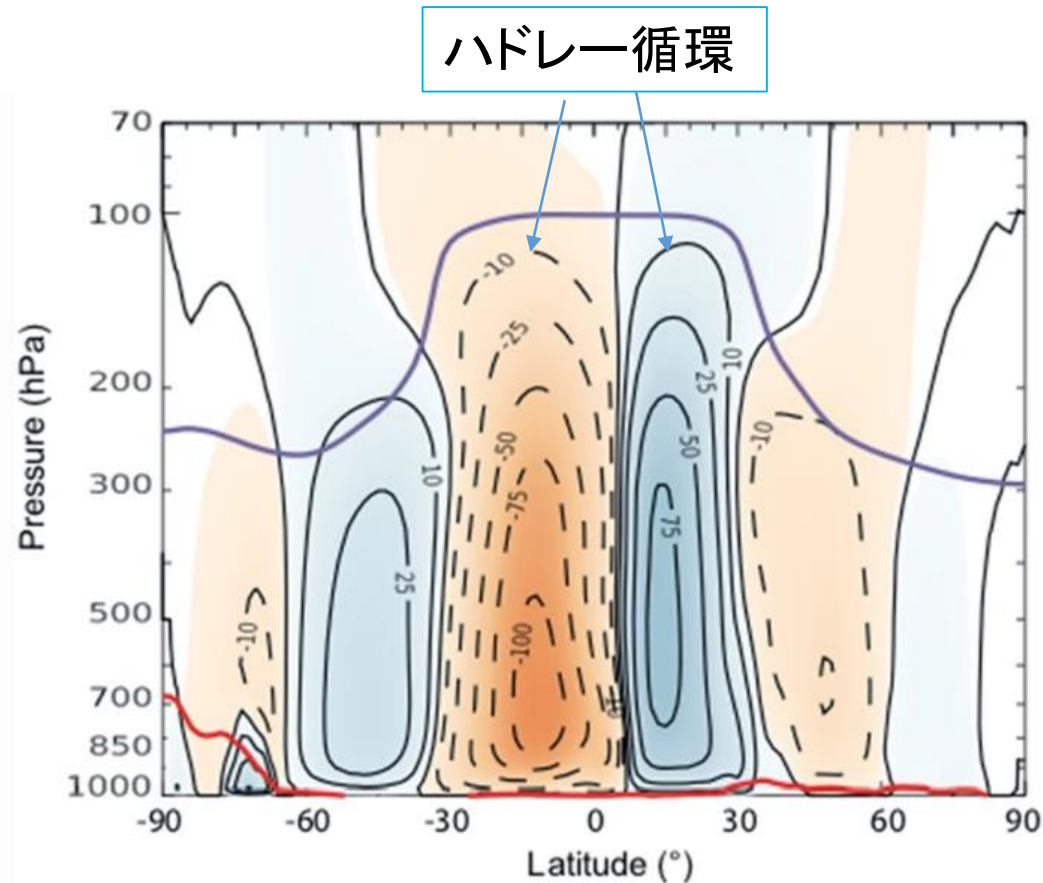
1. はじめに
2. 支配方程式系
3. スペクトル展開
4. 時間積分法
5. モデルチェック
6. まとめと今後の方針
7. 参考文献

# 1. ハドレー循環

➤ 地球には「ハドレー循環」と呼ばれる大気の大規模な運動が存在する

□ ハドレー循環:

熱帯付近で上昇し, 亜熱帯付近で下降する大気の流れ



左図\*: 質量流線関数の等値線

- 等値線に沿う流れ

- 青色: 時計回りの流れ

- オレンジ色: 反時計回りの流れ

- ECMWF (ヨーロッパ中期予報センター) が作成した再解析データ (ERA-I) の 1979-2017 年分の年平均, 東西平均データ (地球大気)

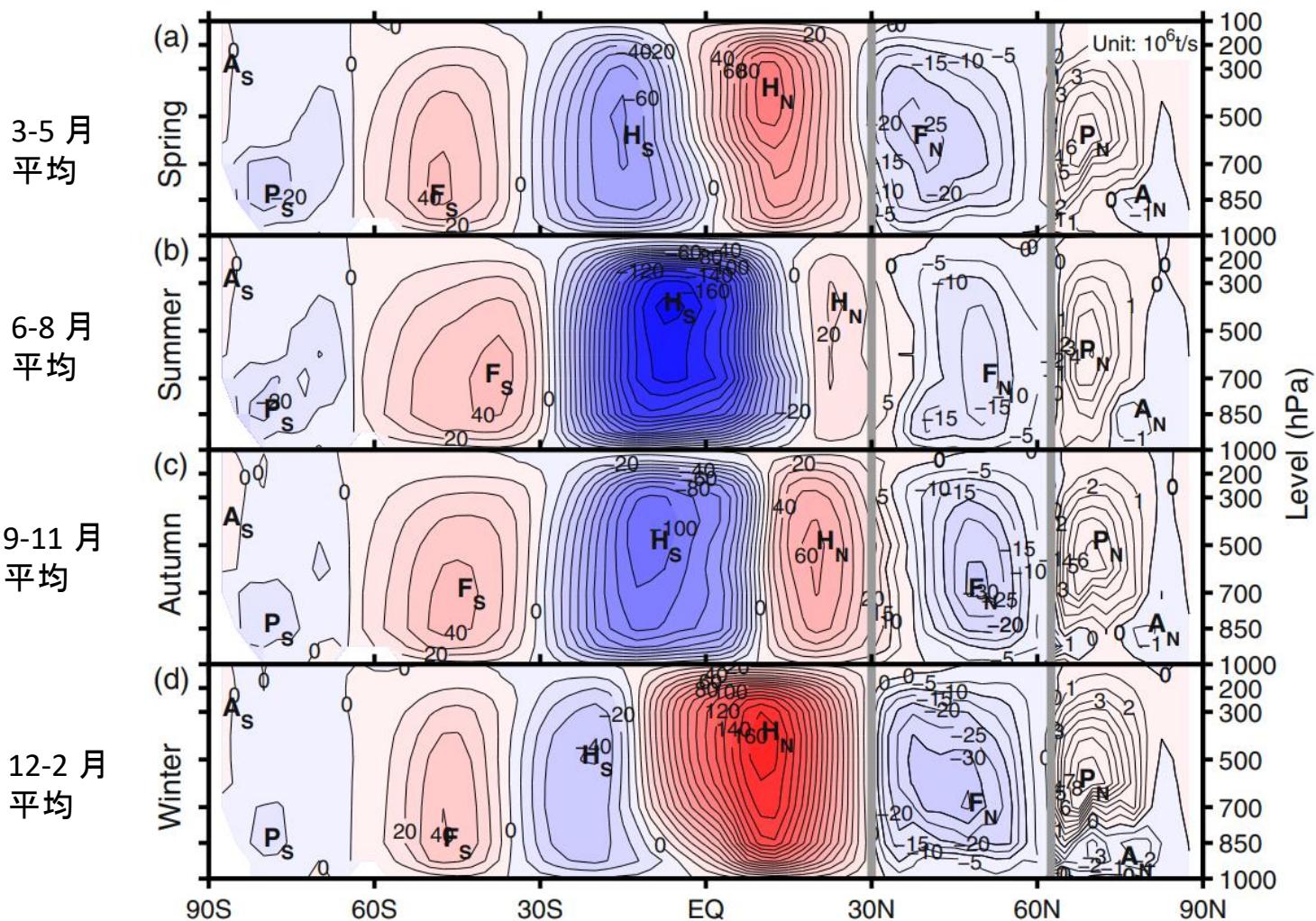
\*

[https://link.springer.com/article/10.1007/s00382-021-05903-](https://link.springer.com/article/10.1007/s00382-021-05903-9#Sec2)

9#Sec2 から引用

# 1. ハドレー循環

➤ 地球大気のハドレー循環 (の幅や強さ) には季節変化がある



左図\*: 質量流線関数の等値線とトーン

- 等値線に沿う流れ
  - 赤色: 時計回りの流れ
  - 青色: 反時計回りの流れ
- NCEP1 再解析データの 1981-2010 年分の各季節平均, 東西平均

\*

[https://www.researchgate.net/publication/276159917\\_Arctic\\_and\\_Antarctic\\_cells\\_in\\_the\\_troposphere](https://www.researchgate.net/publication/276159917_Arctic_and_Antarctic_cells_in_the_troposphere) から引用

# 1. ハドレー循環に関する研究

- 地球大気ของハドレー循環: 季節変化, **赤道非対称**である.
  - 一方で, 年平均ハドレー循環は各季節におけるものより**赤道対称**
    - その力学的構造を理解するための研究が古くから行われている.
- Held and Hou (1980): ハドレー循環の力学 (幅, 強さ) 及びそれと関連する東西風の強さ, 分布を理論的, 数値的に研究
  - 枠組み:
    - 自転軸対称 (経度方向に一様), 緯度高度の空間二次元
    - 乾燥ブシネスク流体プリミティブ方程式系
    - ニュートン加熱冷却\*

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \dots - \frac{\theta - \theta_{eq}}{\tau}$$

$\theta$ : モデル内温位場  
 $\theta_{eq}$ : 放射平衡温位場  
 $\tau$ : 緩和時定数

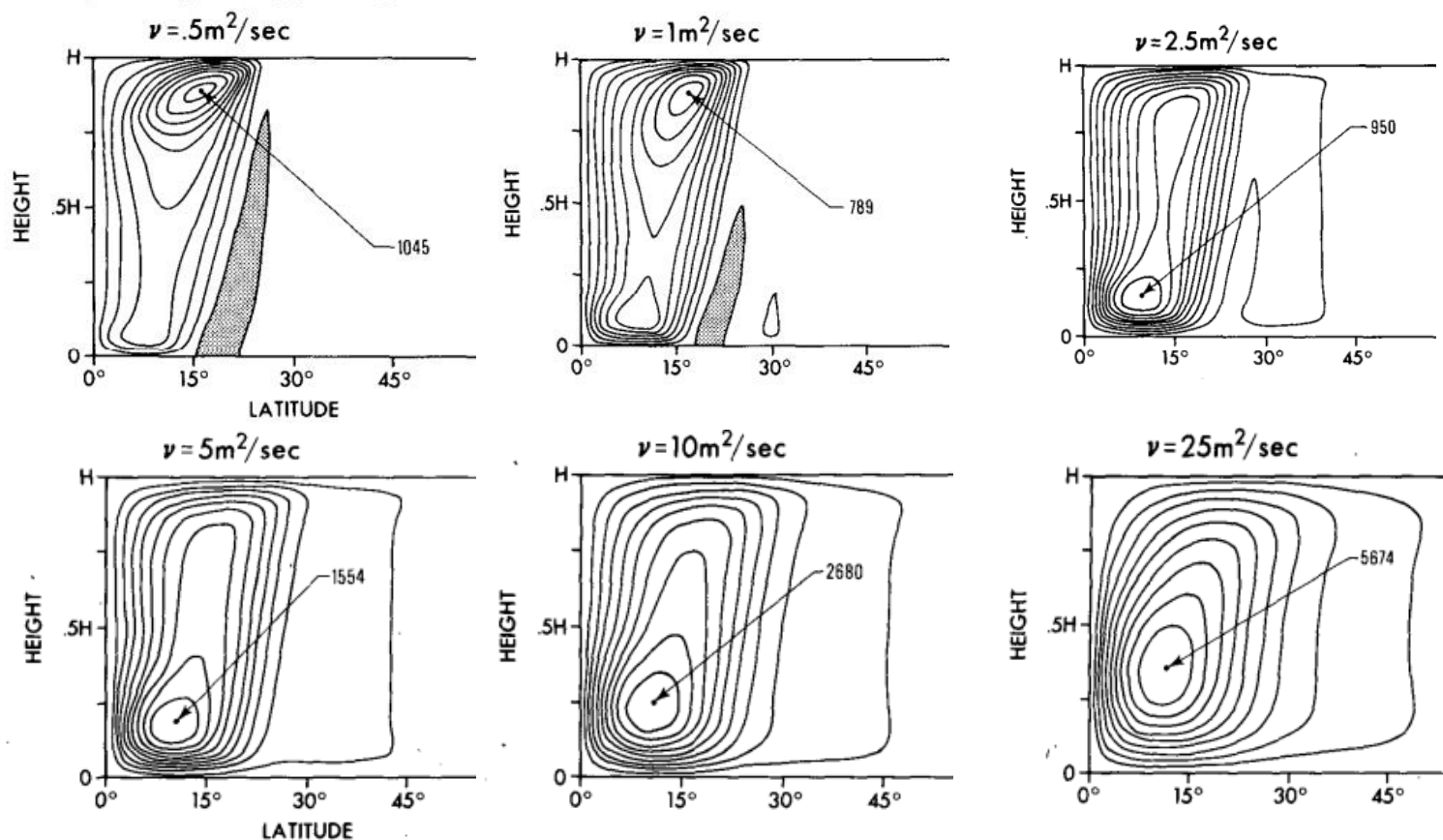
- ハドレー循環を駆動
- Held and Hou (1980) では, 赤道対称な放射平衡温位場

\* ニュートン加熱冷却: 太陽による放射強制による効果を簡単に取り入れるための非断熱加熱項. 放射平衡温位場を与えて, その温位場と, モデル内の温位場の差に比例する項で表現される.

# 1. Held and Hou (1980)

## ➤ Held and Hou (1980)

- 数値計算結果の一部 (下)
  - 動粘性係数を大きくするとハドレー循環幅は大きくなる



左図\*: 子午面流線関数

- パネル上部の動粘性係数の設定での数値計算結果

# 1. ハドレー循環に関する研究

➤ 放射平衡温位場 (ハドレー循環が駆動される場所を決める) の与え方に注目して以下の三つの論文を読んだ

□ Held and Hou (1980)

- 赤道対称, 時間変化しない放射平衡温位場

(結果): 地球大気の年平均ハドレー循環の強さより弱い

□ Lindzen and Hou (1988)

- 赤道非対称, 時間変化しない放射平衡温位場

(結果): 地球大気のように, 冬半球のハドレー循環が夏半球のものより強くなる

□ Fang and Tung (1998)

- 赤道 (非) 対称, 時間変化する\*放射平衡温位場

(結果): 地球大気のように季節変化するハドレー循環

\* 時刻によって, 赤道対称にも, 赤道非対称にもなるような放射平衡温位場



# 1. 研究方針とセミナーの内容

- 研究目的: 季節変化する場合のハドレー循環の力学的構造 (幅, 強さ) を調べる
- 研究の方針: 先行研究のように数値計算による研究をするために, 数値モデルの構築から行う
- 本セミナーの構成
  1. 数値モデルの構築手順
  2. 数値モデルのモデルチェック
  3. Held and Hou (1980) の追試
    - 注意: 数値モデルは, Held and Hou (1980) のものとはいくつかの点で異なる.
    - Held and Hou (1980) における数値計算結果といくつかの点で定性的には整合的な結果が得られた
- 以降では, 数値モデルの構築手順から説明する

## 2. 支配方程式系

1. はじめに
2. 支配方程式系
3. スペクトル展開
4. 時間積分法
5. モデルチェック
6. まとめと今後の方針
7. 参考文献

## 2. 支配方程式系

### ➤ 乾燥ブシネスク流体プリミティブ方程式系

東西流運動方程式: 
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \phi} + w \frac{\partial u}{\partial z} - 2\Omega v \sin \phi - \frac{uv \tan \phi}{a} = -\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + \nu_u$$

南北流運動方程式: 
$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \phi} + w \frac{\partial v}{\partial z} + 2\Omega u \sin \phi + \frac{u^2 \tan \phi}{a} = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} + \nu_v$$

静水圧平衡の式: 
$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = g \frac{\theta}{\Theta_0}$$

熱力学方程式: 
$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} (u\theta) + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (v\theta \cos \phi) + \frac{\partial}{\partial z} (w\theta) = -\frac{\theta - \theta_E}{\tau} + \kappa_\theta$$

非圧縮の式: 
$$\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial (v \cos \phi)}{\partial \phi} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$\lambda$ : 経度,  $\phi$ : 緯度,  $z$ : 地表面からの高度,  $t$ : 時刻

$u$ : 東西風速度,  $v$ : 南北風速度,  $w$ : 鉛直風速度,  $\theta$ : 温位,  $\Phi$ : ジオポテンシャル

$\Omega$ : 自転角速度,  $a$ : 惑星半径,  $\tau$ : 緩和時定数

$\theta_E$ : 放射平衡温位場,  $\Theta_0$ :  $\theta_E$ の全球平均,  $\nu_u, \nu_v, \kappa_\theta$ : 拡散項

文字の定義⇒

## 2. 境界条件

### ➤ 鉛直境界条件

#### □ 本モデル:

$$\text{上端 } z = H : \quad w = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$$

$$\text{下端 } z = 0 : \quad w = 0; \quad u = v = \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$$

#### □ Held and Hou (1980):

$$\text{上端 } z = H : \quad w = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$$

$$\text{下端 } z = 0 : \quad w = 0; \quad \nu \frac{\partial u}{\partial z} = Cu, \nu \frac{\partial v}{\partial z} = Cv, \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$$

$C$ : 定数,  $\nu$ : 動粘性係数

### ➤ 系への角運動量の注入は下端境界条件により行う.

- 実装のしやすさから粘着条件を試した (同じような効果が得られると想定).
- 今後, Held and Hou (1980) のものと同じ境界条件での追試を行う.

# 2. モデル支配方程式系

➤ モデル支配方程式系 (粘性, ニュートン加熱冷却項は省略)

渦度方程式: 
$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ (\zeta + 2\Omega \sin \phi)u + w \frac{\partial v}{\partial z} \right\} - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ (\zeta + 2\Omega \sin \phi)v - w \frac{\partial u}{\partial z} \right\} \cos \phi$$

発散方程式: 
$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ (\zeta + 2\Omega \sin \phi)v - w \frac{\partial u}{\partial z} \right\} - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ (\zeta + 2\Omega \sin \phi)u + w \frac{\partial v}{\partial z} \right\} \cos \phi$$

$$- \nabla_H^2 \left( \Phi + \frac{u^2 + v^2}{2} \right)$$

熱力学方程式: 
$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} (u\theta) - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (v\theta \cos \phi) - \frac{\partial}{\partial z} (w\theta)$$

静水圧平衡の式: 
$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = g \frac{\theta}{\Theta_0}$$

非圧縮の式: 
$$\frac{\partial w}{\partial z} = -D$$

## 文字の定義

$$\zeta = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (u \cos \phi)$$

$$D = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (v \cos \phi)$$

$$\zeta = \nabla_H^2 \psi, \quad D = \nabla_H^2 \chi$$

$$u = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}$$

$$v = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial \chi}{\partial \phi}$$

$$\nabla_H^2 = \frac{1}{a^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{a^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

# 2. モデル支配方程式系

## ➤ 支配方程式系

渦度方程式: 
$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = F_\zeta + \nu_H \nabla_H^2 \zeta + \nu_V \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}$$

発散方程式: 
$$\frac{\partial D}{\partial t} = F_D - \nabla_H^2 (\Phi + KE) + \nu_H \nabla_H^2 D + \nu_V \frac{\partial^2 D}{\partial z^2}$$

熱力学方程式: 
$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = F_\theta - \frac{\theta - \theta_E}{\tau} + \kappa_H \nabla_H^2 \theta + \kappa_V \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$$

静水圧平衡の式: 
$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = g \frac{\theta}{\Theta_0}$$

非圧縮の式: 
$$\frac{\partial w}{\partial z} = -D$$

## ➤ 境界条件

$$z = H : \quad w = 0; \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial D}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$$

$$z = 0 : \quad w = 0; \quad \zeta = D = \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$$

### 文字の定義

$$U = u \cos \phi, \quad V = v \cos \phi, \quad \mu = \sin \phi$$

$$A = (\zeta + 2\Omega\mu)U + w \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$B = (\zeta + 2\Omega\mu)V - w \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$KE = \frac{U^2 + V^2}{2(1 - \mu^2)}$$

$$F_\zeta = -\frac{1}{a(1 - \mu^2)} \frac{\partial A}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial B}{\partial \mu}$$

$$F_D = \frac{1}{a(1 - \mu^2)} \frac{\partial B}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial A}{\partial \mu}$$

$$F_\theta = -\frac{1}{a(1 - \mu^2)} \frac{\partial}{\partial \lambda} (U\theta) - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} (V\theta) - \frac{\partial}{\partial z} (w\theta)$$

## 2. 方針

- 渦度方程式, 発散方程式, 熱力学方程式:
  - 時間発展計算をする
    - ✓ スペクトル法を用いた空間離散化を行う
      - 水平方向: 球面調和関数展開
      - 鉛直方向: チェビシェフ展開
    - ✓ 展開係数に関する常微分方程式を時間積分する
- 静水圧平衡の式, 非圧縮の式:
  - 鉛直積分する
    - ✓ ジオポテンシャルと鉛直風を診断的に求める

# 3. スペクトル展開

1. はじめに
2. 支配方程式系
3. **スペクトル展開**
4. 時間積分法
5. モデルチェック
6. まとめと今後の方針
7. 参考文献



# 3. スペクトル法

## ➤ スペクトル法:

- 有限領域で定義された関数を, 関数系の和で近似 (展開) する. そのとき, それぞれの展開関数にかかる振幅に対応する項を展開係数と呼ぶ.

(例)

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{J-1} a_j(t) \phi_j(x)$$

展開関数系:  $\phi_j(x)$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, J-1$ )

展開係数:  $a_j(t)$

- 展開関数系として, 直交関係\* の性質があるものを選べば, 偏微分方程式は展開係数に対する常微分方程式に帰着し, 数值的に解くことができる.

## ➤ スペクトル法のメリット:

- 通常, 展開関数系として滑らかな関数系を用いるので, 空間微分を差分近似することに伴う誤差がない
- 空間微分を差分近似する場合に比べて, 離散化して得られる常微分方程式が簡明になる

## ➤ スペクトル法のデメリット:

- 境界条件や領域の形が複雑な場合, 展開関数系を簡単には構築できない

\* 簡単に言えば, 同じ関数同士の積をとり, ある区間で定積分したら値は残るが, 違う関数同士の積の定積分はゼロになる性質

# 3. 球面調和関数

- 水平方向: 球面調和関数展開
- 球面調和関数: 球面上の水平ラプラシアン固有関数

$$\nabla^2 Y_n^m(\lambda, \mu) = -n(n+1)Y_n^m(\lambda, \mu)$$
$$\nabla^2 = \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \right\}$$

□ 2 に正規化されたルジャンドル陪関数と三角関数を用いると

$$Y_n^m(\lambda, \mu) = P_n^m(\mu)e^{im\lambda}$$

- ルジャンドル陪関数

$$P_n^m = \sqrt{(2n+1) \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \frac{1}{2^n n!}} (1-\mu^2)^{|m|/2} \frac{d^{n+|m|}}{d\mu^{n+|m|}} (\mu^2-1)^n \quad (n \geq |m|)$$

□ 直交関係

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 Y_n^m(\lambda, \mu) \{Y_{n'}^{m'}(\lambda, \mu)\}^* d\mu d\lambda = \delta_{nn'} \delta_{mm'}$$

定義

$m$  : 東西波数

$n$  : 水平全波数

# 3. 空間微分

## ➤ 球面調和関数の空間微分

### □ 経度微分:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \lambda} Y_n^m(\lambda, \mu) &= \frac{\partial}{\partial \lambda} P_n^m(\mu) e^{im\lambda} \\ &= im Y_n^m\end{aligned}$$

### □ サイン緯度微分: ルジャンドル陪関数の漸化式を用いる

$$(n+1)\varepsilon_n^m P_{n-1}^m - n\varepsilon_{n+1}^m P_{n+1}^m = (1-\mu^2) \frac{d}{d\mu} P_n^m$$

$$\varepsilon_n^m \equiv \sqrt{\frac{n^2 - m^2}{4n^2 - 1}}$$

# 3. 球面調和関数展開

- 球面上で定義された関数を以下のように球面調和関数の重ね合わせで表現

- 逆変換

$$g(\lambda, \mu) = \sum_{n=0}^M \sum_{m=-n}^n s_n^m Y_n^m(\lambda, \mu)$$

- 正変換

$$\begin{aligned} s_n^m &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 g(\lambda, \mu) \{Y_n^m(\lambda, \mu)\}^* d\mu d\lambda \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 g(\lambda, \mu) P_n^m(\mu) e^{-im\lambda} d\mu d\lambda \end{aligned}$$

- 正変換における積分は、数値計算では離散的に実行する必要がある

- 経度方向積分: Gauss の台形公式

- サイン緯度方向積分: Gauss-Legendre の積分公式

# 3. 積分評価

## ➤ 経度方向積分: Gauss の台形公式

$$G_n^m(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\lambda, \mu) e^{-im\lambda} d\lambda$$
$$= \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} g(\lambda_i, \mu) e^{-im\lambda_i}$$
$$\lambda_i = \frac{2\pi i}{I}$$
$$(i = 0, 1, 2, \dots, I - 1)$$

## ➤ サイン緯度方向積分: Gauss-Legendre の積分公式

$$s_n^m = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 G^m(\mu) P_n^m(\mu) d\mu$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J w_j G^m(\mu_j) P_n^m(\mu_j)$$

$\mu_n$  : ルジャンドル多項式  $P_n(\mu)$  の  $n$  個の零点

## □ Gauss-Legendre の積分公式

$$\int_{-1}^1 f(\mu) d\mu = \sum_{k=1}^n w_k f(\mu_k)$$
$$w_k = \int_{-1}^1 \frac{P_n(\mu)}{(\mu - \mu_k) P_n'(\mu_k)} d\mu = \frac{2\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}{nP_{n-1}(\mu_k) P_n'(\mu_k)}$$

※ 実際の数値モデルでは、これらの水平方向の演算 (変換や空間微分など) は spml\* を用いて行う

\* spml: 地球流体電脳倶楽部が開発した、スペクトル法を用いる数値計算を行うためのサブルーチンや関数を提供するライブラリ (<https://www.gfd-dennou.org/arch/spmodel/index.htm>)

# 3. チェビシェフ展開

## ➤ 鉛直方向: チェビシェフ展開

### □ チェビシェフ展開を用いるスペクトル法

#### i. チェビシェフガラーキン法:

- 境界条件を満たすような関数系 (ガラーキン基底) を展開関数系とする
  - ガラーキン基底: チェビシェフ多項式の組み合わせ (チェビシェフ多項式同士の和や差) で構築
- 展開係数に対する常微分方程式を解いた後に, 境界条件の適用を考える必要がない

#### ii. チェビシェフタウ法:

- チェビシェフ多項式そのものを展開関数系とする
- 展開係数に対する常微分方程式を解いた後に, 境界条件を満たすように, 展開係数自体に修正を加える方法.

## ➤ 本数値モデルでは, チェビシェフタウ法の考え方に基づいて構築を行った

# 3. チェビシエフ多項式

➤ 鉛直方向の展開関数系にはチェビシエフ多項式を用いる

□ チェビシエフ多項式

⇒ 定義域:  $-1 \leq x \leq 1$ , 重み:  $1/\sqrt{1-x^2}$  の直交多項式

■ 定義式

$$T_n(x) = \cos(n\vartheta); \quad x = \cos \vartheta$$

■ 一般項

$$T_0 = 1$$

$$T_1 = x$$

$$T_2 = 2x^2 - 1$$

$$T_3 = 4x^3 - 3x$$

$$T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5 = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

⋮

■ 直交関係

$$\int_{-1}^1 T_m(x)T_n(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi/2 & (m = n \neq 0) \\ \pi & (m = n = 0) \end{cases}$$

■ 領域の端での値 (境界条件の離散化などで用いる)

- $x = 1$  のとき  $\vartheta = 0$  なので

$$T_n(1) = \cos(n \cdot 0) = 1$$

- $x = -1$  のとき  $\vartheta = \pi$  なので

$$T_n(-1) = \cos(n \cdot \pi) = (-1)^n$$

# 3. Gauss-Lobatto 選点

➤ チェビシェフ補間: ある有限区間で離散的に定義された関数を離散的なチェビシェフ多項式の和で近似すること

➤ ここでは離散化された座標 (選点) の選び方として, Gauss-Lobatto 選点を用いる

□ Gauss-Lobatto 選点:  $N$  次のチェビシェフ多項式の一階微分の零点

- 一階微分の値がゼロとなる点

$$\frac{dT_N(x)}{dx} = \frac{d\vartheta}{dx} \frac{dT_N(x)}{d\vartheta} = \frac{N \sin(N\vartheta)}{\sin \vartheta} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \vartheta_k &= \frac{N-k}{N} \pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N) \\ x_k &= \cos(\vartheta_k) \end{aligned}$$

□ Gauss-Lobatto 選点での選点直交性

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}T_m(x_0)T_n(x_0) + \sum_{k=1}^{N-1} T_m(x_k)T_n(x_k) + \frac{1}{2}T_m(x_N)T_n(x_N) \\ &= \sum_{k=0}^N T_m(x_k)T_n(x_k) \\ &= \begin{cases} N & (m = n = 0, N) \\ \frac{N}{2} & (m = n \neq 0, N) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \end{aligned}$$

※ 展開の自由度 (切断波数) と等しい自由度の格子点数で離散化する



# 3. 座標変換

- 本モデルでは, 鉛直方向の選点には Gauss-Lobatto 選点を用いる
- しかし, モデル内では, 地表面からの高度で鉛直座標をとるため, チェビシェフ展開を用いるためには座標変換する必要がある.

$$f(z, t) \quad (0 \leq z \leq H) \quad \Leftrightarrow \quad f(x, t) \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

□ Gauss-Lobatto 選点:

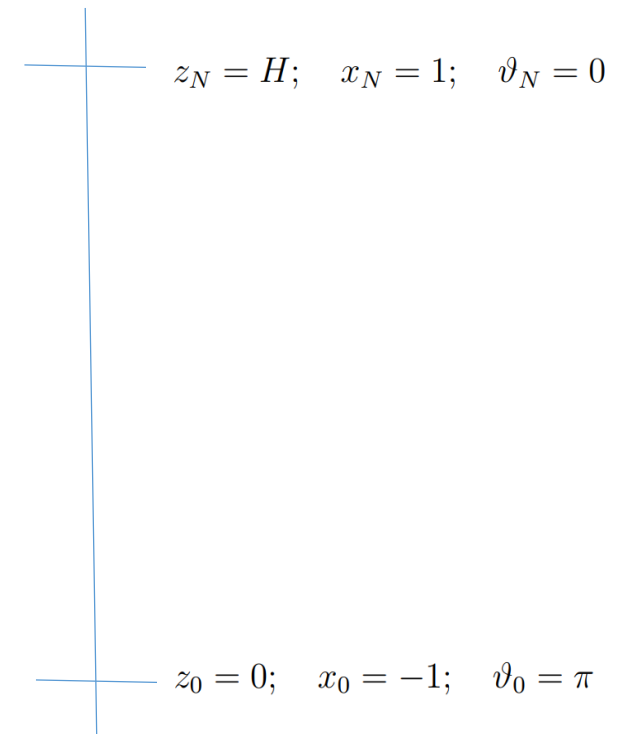
$$x_k = \cos \vartheta_k; \quad \vartheta_k = \frac{N - k}{N} \pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N)$$

□ 離散化された鉛直高度座標:

$$z_k = \frac{x_k + 1}{2} H$$

- 微分, 積分演算での注意点:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} = \left( \frac{2}{H} \right) \frac{\partial}{\partial x}$$



# 3. チェビシエフ展開

➤ 鉛直方向のスペクトル展開の定義:

$$\begin{aligned} f(z_k) = f(x_k) &= \frac{1}{2}a_0T_0(x_k) + \sum_{n=1}^{N-1} a_nT_n(x_k) + \frac{1}{2}a_NT_N(x_k) \\ &= \sum_{n=0}^N a_nT_n(x_k) \end{aligned}$$

□ チェビシエフ多項式

$$T_n(x_k) = \cos(n\vartheta_k)$$

□ Gauss-Lobatto 選点

$$x_k = \cos \vartheta_k; \quad \vartheta_k = \frac{N-k}{N}\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N)$$

➤ 展開係数:

$$a_n = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^N f(x_k)T_n(x_k) \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N)$$

※ ここから先では,  
 $N$ : 偶数として考える

# 3. チェビシエフ多項式の微分

➤ チェビシエフ展開された関数の微分を内挿して考える

□ 関数  $f(x)$  が  $-1 \leq x \leq 1$  で定義されており, その導関数も含めて, チェビシエフ展開されていると考える.

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0T_0(x) + \sum_{n=1}^{N-1} a_nT_n(x) + \frac{1}{2}a_NT_N(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}a_0^{(1)}T_0(x) + \sum_{n=1}^{N-1} a_n^{(1)}T_n(x) + \frac{1}{2}a_N^{(1)}T_N(x)$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}a_0^{(2)}T_0(x) + \sum_{n=1}^{N-1} a_n^{(2)}T_n(x) + \frac{1}{2}a_N^{(2)}T_N(x)$$

•  $a_n, a_n^{(1)}, a_n^{(2)}$  : 展開係数

➤  $a_n, a_n^{(1)}, a_n^{(2)}$  の間に成り立つ関係を求める.

# 3. チェビシエフ多項式の微分

- $f(x)$  の微分を計算する前に  $n$  次のチェビシエフ多項式の微分を考える
- $n$  次のチェビシエフ多項式の微分

$$\begin{aligned}\frac{dT_n(x)}{dx} &= \frac{d\vartheta}{dx} \frac{dT_n(\cos \vartheta)}{d\vartheta} \\ &= -\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d \cos(n\vartheta)}{d\vartheta} \\ &= -\frac{n \sin n\vartheta}{\sin \vartheta} \\ &= n \frac{(e^{ni\vartheta} - e^{-ni\vartheta})/(2i)}{(e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta})/(2i)} \\ &= n \frac{e^{ni\vartheta} - e^{-ni\vartheta}}{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}} \\ &= n \frac{\{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}\} \{e^{(n-1)i\vartheta} + e^{(n-2)i\vartheta} e^{-i\vartheta} + e^{(n-3)i\vartheta} e^{-2i\vartheta} + \dots + e^{i\vartheta} e^{-(n-2)i\vartheta} + e^{-(n-1)i\vartheta}\}}{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}} \\ &= n \{e^{(n-1)i\vartheta} + e^{(n-3)i\vartheta} + \dots + e^{-(n-3)i\vartheta} + e^{-(n-1)i\vartheta}\} \\ &= \begin{cases} 2n \{ \cos(n-1)\vartheta + \cos(n-3)\vartheta + \dots + \cos \vartheta \} & (n : \text{偶数}) \\ 2n \{ \cos(n-1)\vartheta + \cos(n-3)\vartheta + \dots + \cos 2\vartheta + \frac{1}{2} \} & (n : \text{奇数}) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2n(T_{n-1} + T_{n-3} + \dots + T_1) & (n : \text{偶数}) \\ 2n(T_{n-1} + T_{n-3} + \dots + T_2 + \frac{1}{2}T_0) & (n : \text{奇数}) \end{cases}\end{aligned}$$

# 3. 展開係数の関係

➤ したがってチェビシェフ展開された  $f(x)$  の一階微分は

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}a_0 \cdot 0 + a_1T_0 + a_2 \cdot 4T_1 + a_3 \cdot 6 \left( T_2 + \frac{1}{2}T_0 \right) \\ &\quad + a_4 \cdot 8(T_3 + T_1) + a_5 \cdot 10 \left( T_4 + T_2 + \frac{1}{2}T_0 \right) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + a_{N-1} \cdot 2(N-1)(T_{N-2} + T_{N-4} + \cdots + T_2 + \frac{1}{2}T_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}a_N \cdot 2N(T_{N-1} + T_{N-3} + \cdots + T_1) \\ f'(x) &= a_1T_0 + 3a_3T_0 + 5a_5T_0 + \cdots + (N-1)a_{N-1}T_0 \\ &\quad + 4a_2T_1 + 8a_4T_1 + 12a_6T_1 + \cdots + Na_NT_1 \\ &\quad + 6a_3T_2 + 10a_5T_2 + 14a_7T_2 + \cdots + 2(N-1)a_{N-1}T_2 \\ &\quad \vdots \\ &\quad + 2(N-2)a_{N-2}T_{N-3} + Na_NT_{N-3} \\ &\quad + 2(N-1)a_{N-1}T_{N-2} \\ &\quad + Na_NT_{N-1} \\ &\quad + 0 \cdot T_N \end{aligned}$$

# 3. 展開係数の関係

➤ チェビシェフ展開された式と各項を比べる

$$\square f(x) \Rightarrow f'(x)$$

$$a_N^{(1)} = 0$$

$$a_{N-1}^{(1)} = Na_N$$

$$a_{N-2}^{(1)} = 2(N-1)a_{N-1}$$

$$a_{N-3}^{(1)} = a_{N-1}^{(1)} + 2(N-2)a_{N-2}$$

$$a_{N-4}^{(1)} = a_{N-2}^{(1)} + 2(N-3)a_{N-3}$$

⋮

$$a_2^{(1)} = a_4^{(1)} + 2 \cdot 3a_3$$

$$a_1^{(1)} = a_3^{(1)} + 2 \cdot 2a_2$$

$$a_0^{(1)} = a_2^{(1)} + 2 \cdot 1a_1$$

$$\square f'(x) \Rightarrow f''(x)$$

$$a_N^{(2)} = 0$$

$$a_{N-1}^{(2)} = Na_N^{(1)}$$

$$a_{N-2}^{(2)} = 2(N-1)a_{N-1}^{(1)}$$

$$a_{N-3}^{(2)} = a_{N-1}^{(2)} + 2(N-2)a_{N-2}^{(1)}$$

$$a_{N-4}^{(2)} = a_{N-2}^{(2)} + 2(N-3)a_{N-3}^{(1)}$$

⋮

$$a_2^{(2)} = a_4^{(2)} + 2 \cdot 3a_3^{(1)}$$

$$a_1^{(2)} = a_3^{(2)} + 2 \cdot 2a_2^{(1)}$$

$$a_0^{(2)} = a_2^{(2)} + 2 \cdot 1a_1^{(1)}$$

# 3. チェビシエフ多項式の積分

➤ 次に, チェビシエフ多項式の積分を考える (診断方程式を解く際に用いる)

□ 三角関数の加法定理とチェビシエフ多項式の定義:

$$2 \cos(n\vartheta) \sin \vartheta = \sin(n+1)\vartheta - \sin(n-1)\vartheta$$

$$T_n(x) = \cos(n\vartheta), \quad \frac{d}{dx} = -\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta}$$

を用いると

$$2T_n(x) = \frac{1}{n+1} \frac{dT_{n+1}}{dx} - \frac{1}{n-1} \frac{dT_{n-1}}{dx} \quad (n \geq 2)$$

➤ チェビシエフ多項式の不定積分:

$$\int^x T_n(\eta) d\eta = \frac{T_{n+1}(x)}{2(n+1)} - \frac{T_{n-1}(x)}{2(n-1)} + C \quad (n \geq 2)$$

$$\int^x T_1(\eta) d\eta = \frac{T_2(x)}{4} + C$$

$$\int^x T_0(\eta) d\eta = T_1(x) + C$$

# 3. チェビシエフ多項式の定積分

➤ 次に以下の式を定積分する

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{2}a_0^{(1)}T_0(x) + \sum_{n=1}^{N-1} a_n^{(1)}T_n(x) + \frac{1}{2}a_N^{(1)}T_N(x)$$

□  $\eta = -1$  から  $\eta = x$  まで定積分する

$$\begin{aligned} \int_{-1}^x df &= \int_{-1}^x \left( \frac{1}{2}a_0^{(1)}T_0(\eta) + \sum_{n=1}^{N-1} a_n^{(1)}T_n(\eta) + \frac{1}{2}a_N^{(1)}T_N(\eta) \right) d\eta \\ f(x) - f(-1) &= \left[ \frac{a_0^{(1)} - a_2^{(1)}}{2}T_1(\eta) + \frac{a_1^{(1)} - a_3^{(1)}}{4}T_2(\eta) + \frac{a_2^{(1)} - a_4^{(1)}}{6}T_3(\eta) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \frac{a_{N-2}^{(1)}}{2(N-1)}T_{N-1}(\eta) + \frac{a_{N-1}^{(1)}}{2N}T_N(\eta) \right]_{-1}^x \end{aligned}$$

- $x = -1$  は数値モデル内では、地表面  $z = 0$  に相当する。地表面では鉛直風はゼロなので、非圧縮の式の定積分を解析的に実行できる。



# 3. 非圧縮の式の鉛直積分

➤ 非圧縮の式を鉛直積分し, 鉛直風を求める

□ 非圧縮の式:

$$D(z) + \frac{\partial w(z)}{\partial z} = 0$$

$$\left(\frac{2}{H}\right) \frac{\partial w(x)}{\partial x} = -D(x)$$

□ これを地表面  $\eta = -1$  から  $\eta = x$  まで定積分すると

$$w(x) - w(-1) = -\frac{H}{2} \left[ \frac{D_0 - D_2}{2} T_1(\eta) + \frac{D_1 - D_3}{4} T_2(\eta) + \frac{D_2 - D_4}{6} T_3(\eta) \right. \\ \left. + \dots + \frac{D_{N-2} - (1/2)D_N}{2(N-1)} T_{N-1}(\eta) + \frac{D_{N-1}}{2N} T_N(\eta) \right]_{-1}^x$$

# 3. 非圧縮の式の鉛直積分

➤ この式において  $x = 1$  とすると,

$$w(1) - w(-1) = -\frac{H}{2} \left\{ \left[ \frac{D_0 - D_2}{2} + \frac{D_1 - D_3}{4} + \frac{D_2 - D_4}{6} + \dots + \frac{D_{N-2} - (1/2)D_N}{2(N-1)} + \frac{D_{N-1}}{2N} \right] - \left[ -\frac{D_0 - D_2}{2} + \frac{D_1 - D_3}{4} - \frac{D_2 - D_4}{6} + \dots - \frac{D_{N-2} - (1/2)D_N}{2(N-1)} + \frac{D_{N-1}}{2N} \right] \right\}$$

これらを用いた

$$T_n(1) = \cos(n \cdot 0) = 1$$

$$T_n(-1) = \cos(n \cdot \pi) = (-1)^n$$



- 運動学的境界条件:  $w(-1) = w(1) = 0$  より

$$(D_0 - D_2) + \frac{D_2 - D_4}{3} + \dots + \frac{D_{N-2} - (1/2)D_N}{N-1} = 0$$

鉛直風を求める前に,  $D_0$  に修正を加えた後に, 鉛直風を計算する

# 3. 力学的境界条件の離散的表現

➤ 鉛直境界条件も離散的に表現する

□ ここでは、以下の力学的境界条件の離散化を解説する

$$z = H : \quad \frac{\partial \zeta(z)}{\partial z} = \frac{\partial D(z)}{\partial z} = \frac{\partial \theta(z)}{\partial z} = 0$$

$$z = 0 : \quad \zeta(z) = D(z) = \frac{\partial \theta(z)}{\partial z} = 0$$

□ 鉛直座標変換後の表現:

$$x = 1 : \quad \frac{\partial \zeta(x)}{\partial x} = \frac{\partial D(x)}{\partial x} = \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} = 0$$

$$x = -1 : \quad \zeta(x) = D(x) = \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} = 0$$

① 上端ノイマン下端ディリクレ境界条件 (鉛直渦度, 水平発散)

② 両端ノイマン境界条件 (温位)

①, ②の場合についての離散的表現を示す

# 3. 境界条件の離散的表現

① 上端ノイマン下端ディリクレ境界条件 (渦度, 発散) の場合

➤ ある関数とその一階導関数も含めて以下のように展開されているとする

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0T_0(x) + \sum_{n=1}^{N-1} a_nT_n(x) + \frac{1}{2}a_NT_N(x)$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{1}{2}a_0^{(1)}T_0(x) + \sum_{n=1}^{N-1} a_n^{(1)}T_n(x) + \frac{1}{2}a_N^{(1)}T_N(x)$$

➤ 上端  $z = H; x = 1$  において,  $\vartheta = 0$  より

チェビシエフ多項式は  $T_n(1) = \cos(n \cdot 0) = 1$  となるので

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=1} = \frac{1}{2}a_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{N-1} a_n^{(1)} + \frac{1}{2}a_N^{(1)} = 0$$

つまり

$$1 \cdot 1a_1 + 2 \cdot 2a_2 + 3 \cdot 3a_3 + \cdots + (N-1)(N-1)a_{N-1} + \frac{N^2}{2}a_N = 0$$

# 3. 境界条件の離散的表現

## ① 上端ノイマン下端ディリクレ境界条件の場合

- 一方で, 下端  $z = 0$ ;  $x = -1$  においては  $\vartheta = \pi$  より  
チェビシエフ多項式は  $T_n(-1) = \cos(n \cdot \pi) = (-1)^n$  となるので

$$f(-1) = \frac{1}{2}a_0 - a_1 + a_2 + \cdots + \frac{1}{2}a_N = 0$$

- 上端, 下端の境界条件による展開係数に対する制約:

上端:  $1 \cdot 1a_1 + 2 \cdot 2a_2 + 3 \cdot 3a_3 + \cdots + (N-1)(N-1)a_{N-1} + \frac{N^2}{2}a_N = 0$

下端:  $\frac{1}{2}a_0 - a_1 + a_2 + \cdots + \frac{1}{2}a_N = 0$

# 3. 境界条件の離散的表現

## ② 両端ノイマン境界条件 (温位) の場合

➤ 上端と下端それぞれで

$$\frac{1}{2}a_0^{(1)} + a_1^{(1)} + a_2^{(1)} + a_3^{(1)} + \cdots + \frac{1}{2}a_N^{(1)} = 0, \quad (x = 1)$$

$$\frac{1}{2}a_0^{(1)} - a_1^{(1)} + a_2^{(1)} - a_3^{(1)} + \cdots + \frac{1}{2}a_N^{(1)} = 0, \quad (x = -1)$$

➤ 二つの式の両辺の和と差をとると

$$a_0^{(1)} + 2a_2^{(1)} + 2a_4^{(1)} + \cdots + a_N^{(1)} = 0$$

$$a_1^{(1)} + a_3^{(1)} + a_5^{(1)} + \cdots + a_{N-1}^{(1)} = 0$$

➤ 境界条件による展開係数への二つの制約:

$$2 \cdot 1a_1 + 6 \cdot 3a_3 + 10 \cdot 5a_5 + \cdots + 2(N-3)^2 a_{N-3} + 2(N-1)^2 a_{N-1} = 0$$

$$2 \cdot 2a_2 + 4 \cdot 4a_4 + 6 \cdot 6a_6 + \cdots + (N-2)^2 a_{N-2} + \frac{N^2}{2} a_N = 0$$

# 3. 三次元スペクトル展開

- モデル支配方程式系に話を戻す
- 準備が整ったので支配方程式系中の各変数をスペクトル展開する
  - 水平方向: 球面調和関数展開
  - 鉛直方向: チェビシェフ展開
- 離散化された座標値の取り方
  - 経度方向: 等間隔格子点

$$\lambda_i = \frac{2\pi i}{I} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, I - 1)$$

- サイン緯度方向: ルジャンドル多項式の零点 (ガウス緯度)
- 鉛直方向: Gauss-Lobatto 選点

$$x_k = \cos \frac{K - k}{K} \pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots, K)$$
$$z_k = \frac{x_k + 1}{2} H$$

# 3. 三次元スペクトル展開

## ➤ スペクトル展開の定義

### □ 逆変換 (スペクトル→グリッド):

$$\begin{aligned}\zeta(\lambda_i, \mu_j, x_k, t) &= \sum_{l=0}^L \sum_{n=0}^M \sum_{m=-n}^n \zeta_{n,m,l}(t) Y_{n,m}(\lambda_i, \mu_j) T_l(x_k) \\ &= \sum_{l=0}^L \sum_{n=0}^M \sum_{m=-n}^n \zeta_{n,m,l}(t) e^{im\lambda_i} P_{n,m}(\mu_j) T_l(x_k)\end{aligned}$$

### □ 正変換 (グリッド→スペクトル):

$$\begin{aligned}\zeta_{n,m,l}(t) &= \frac{1}{IK} \sum_{k=0}^K \sum_{j=1}^J \sum_{i=0}^{I-1} \zeta(\lambda_i, \mu_j, x_k, t) \{Y_{n,m}(\lambda_i, \mu_j)\}^* w_j T_l(x_k) \\ &= \frac{1}{IK} \sum_{k=0}^K \sum_{j=1}^J \sum_{i=0}^{I-1} \zeta(\lambda_i, \mu_j, x_k, t) e^{-im\lambda_i} P_{n,m}(\mu_j) w_j T_l(x_k)\end{aligned}$$

## ➤ その他の変数も, 同様に展開する (展開係数も上のものとは異なる)



# 3. 支配方程式系

## ➤ スペクトル展開された支配方程式系

$$\frac{\partial \zeta_{n,m,l}(t)}{\partial t} = (F_\zeta)_{n,m,l} - \nu_H \frac{n(n+1)}{a^2} \zeta_{n,m,l} + \nu_V \zeta_{n,m,l}^{(2)}$$

$$\frac{\partial D_{n,m,l}(t)}{\partial t} = (F_D)_{n,m,l} + \frac{n(n+1)}{a^2} [\Phi_{n,m,l} + (\text{KE})_{n,m,l}] - \nu_H \frac{n(n+1)}{a^2} D_{n,m,l} + \nu_V D_{n,m,l}^{(2)}$$

$$\frac{\partial \theta_{n,m,l}(t)}{\partial t} = (F_\theta)_{n,m,l} - \frac{\theta_{n,m,l} - (\theta_E)_{n,m,l}}{\tau} - \kappa_H \frac{n(n+1)}{a^2} \theta_{n,m,l} + \nu_V \theta_{n,m,l}^{(2)}$$

$$w(\lambda_i, \mu_j, x_k, t) = -\frac{H}{2} \sum_{n=0}^M \sum_{m=-n}^n \left[ \frac{D_0 - D_2}{2} T_1(\eta) + \frac{D_1 - D_3}{4} T_2(\eta) + \frac{D_2 - D_4}{6} T_3(\eta) \right. \\ \left. + \dots + \frac{D_{L-2} - (1/2)D_L}{2(L-1)} T_{L-1}(\eta) + \frac{D_{L-1}}{2L} T_L(\eta) \right]_{-1}^{x_k} Y_{n,m}(\lambda_i, \mu_j)$$

$$\Phi(\lambda_i, \mu_j, x_k, t) = \frac{H}{2} \frac{g}{\Theta_0} \sum_{n=0}^M \sum_{m=-n}^n \left[ \frac{\theta_0 - \theta_2}{2} T_1(\eta) + \frac{\theta_1 - \theta_3}{4} T_2(\eta) + \frac{\theta_2 - \theta_4}{6} T_3(\eta) \right. \\ \left. + \dots + \frac{\theta_{L-2} - (1/2)\theta_L}{2(L-1)} T_{L-1}(\eta) + \frac{\theta_{L-1}}{2L} T_L(\eta) \right]_{-1}^{x_k} Y_{n,m}(\lambda_i, \mu_j)$$

簡単のため  
 $D_{n,m,l}(t) \rightarrow D_l$   
 $\theta_{n,m,l}(t) \rightarrow \theta_l$   
としている

## □ 非線形項の評価には変換法を用いる

- 変換法: 格子点上で非線形項を計算し, スペクトルに変換する

# 3. 境界条件

## ➤ 鉛直境界条件

### □ 鉛直渦度:

$$1 \cdot 1\zeta_1 + 2 \cdot 2\zeta_2 + 3 \cdot 3\zeta_3 + \cdots + (L-1)(L-1)\zeta_{L-1} + \frac{L^2}{2}\zeta_L = 0$$
$$\frac{1}{2}\zeta_0 - \zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \frac{1}{2}\zeta_L = 0$$

### □ 水平発散:

$$1 \cdot 1D_1 + 2 \cdot 2D_2 + 3 \cdot 3D_3 + \cdots + (L-1)(L-1)D_{L-1} + \frac{L^2}{2}D_L = 0$$
$$\frac{1}{2}D_0 - D_1 + D_2 + \cdots + \frac{1}{2}D_L = 0$$

### □ 温位:

$$2 \cdot 1\theta_1 + 6 \cdot 3\theta_3 + 10 \cdot 5\theta_5 + \cdots + 2(L-3)^2\theta_{L-3} + 2(L-1)^2\theta_{L-1} = 0$$
$$2 \cdot 2\theta_2 + 4 \cdot 4\theta_4 + 6 \cdot 6\theta_6 + \cdots + (L-2)^2\theta_{L-2} + \frac{L^2}{2}\theta_L = 0$$

# 4. 時間積分法

1. はじめに
2. 支配方程式系
3. スペクトル展開
4. 時間積分法
5. モデルチェック
6. まとめと今後の方針
7. 参考文献

# 4. 時間積分法

- 以下の式を時間積分する方法を解説する

$$\frac{\partial \zeta_{n,m,l}(t)}{\partial t} = (F_\zeta)_{n,m,l} - \nu_H \frac{n(n+1)}{a^2} \zeta_{n,m,l} + \nu_V \zeta_{n,m,l}^{(2)}$$

$$\frac{\partial D_{n,m,l}(t)}{\partial t} = (F_D)_{n,m,l} + \frac{n(n+1)}{a^2} [\Phi_{n,m,l} + (\text{KE})_{n,m,l}] - \nu_H \frac{n(n+1)}{a^2} D_{n,m,l} + \nu_V D_{n,m,l}^{(2)}$$

$$\frac{\partial \theta_{n,m,l}(t)}{\partial t} = (F_\theta)_{n,m,l} - \frac{\theta_{n,m,l} - (\theta_E)_{n,m,l}}{\tau} - \kappa_H \frac{n(n+1)}{a^2} \theta_{n,m,l} + \nu_V \theta_{n,m,l}^{(2)}$$

- 石岡 (2004) によると

(鉛直) 拡散項に対してチェビシェフ展開を用いるスペクトル法で離散化して得られる常微分方程式は硬い方程式\*となる. その場合, ルンゲクッタ法などの陽的公式で安定に長時間積分することは困難である.

- 時間刻み幅を  $h < \mathcal{O}(N^{-4})$  とすればこの問題を回避できるが, 長時間積分には向いていない
- 実際, 4 次のルンゲクッタ法で陽的に解くと数値発散する

- 石岡 (2004) において, 上式のような非線形項も含む方程式を安定に長時間積分するための方法としてセミインプリシット法が解説されていたのでそれを用いる

\* 硬い方程式: 絶対値の大きな負の固有値もち, その解自体は急激に一定値に収束するが, 陽的公式では時間刻み幅を十分小さくしないと正しい解が得られないような常微分方程式

# 4. 時間積分法 (石岡 (2004))

➤ 微分方程式:

$$\frac{dx}{dt} = A(x)x(t) + f(t) + g(x, t)$$

における線形項が硬さの原因となっている場合の時間発展を以下のように計算する

$$x(t+h) = L\left(t+h, t+\frac{h}{2}\right) \left[ L\left(t+\frac{h}{2}, t\right) \left[ x(t) + \frac{1}{6}k_1 \right] + \frac{1}{3}(k_2 + k_3) \right] + \frac{1}{6}k_4$$

$$k_1 = hg(x(t), t)$$

$$k_2 = hg\left(L\left(t+\frac{h}{2}, t\right) \left[ x(t) + \frac{1}{2}k_1 \right], t+\frac{h}{2}\right)$$

$$k_3 = hg\left(L\left(t+\frac{h}{2}, t\right) [x(t)] + \frac{1}{2}k_2, t+\frac{h}{2}\right)$$

$$k_4 = hg\left(L\left(t+h, t+\frac{h}{2}\right) \left[ L\left(t+\frac{h}{2}, t\right) [x(t)] + k_3 \right], t+h\right)$$

\*  $\mathcal{L}(t_2, t_1)$  は、線形項のみとした場合の時刻  $t_1$  から  $t_2$  までの時間発展を記述する演算子

# 4. セミインプリシット法

- 鉛直拡散項を含む (スペクトル展開する前の) モデル支配方程式のような方程式をスペクトル法で離散化して得られた常微分方程式を安定にかつ効率的に時間積分するには硬さの原因となる線形項に対応する時間発展は陰的に行い, 非線形項に対応する時間発展はそのまま陽的に行えばよい.\*
- スペクトル展開し得られた渦度, 発散, 温位に関する常微分方程式を 4 次のルンゲクッタ法をベースとするセミインプリシット法で解く
  - 演算子  $\mathcal{L}$  : 鉛直拡散項のみを含む場合の時間発展を陰的に計算
    - 陰的公式には, アダムズ・ムルトン二位公式を用いる
  - 演算子  $g$  : 鉛直拡散以外の項の時間変化項を計算
- 次に, 演算子  $\mathcal{L}$  の計算方法, つまりスペクトル法を用いて離散化した鉛直方向の拡散方程式のアダムズ・ムルトン二位公式を用いた (陰的) 解法を説明する.

\* このように陰的公式と陽的公式を組み合わせ時間積分を計算する手法はセミインプリシット法と呼ばれる.

# 4. 拡散方程式の解法

➤ 以下のような拡散方程式を解くことを考える

$$\text{支配方程式} : \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\text{初期条件} : u(x, 0) = f(x)$$

$$\text{境界条件} : \frac{\partial u}{\partial x}(\pm 1, t) = 0$$

➤ 導関数も含めてチェビシェフ展開できると考える

$$u(x, t) = \frac{1}{2}a_0T_0(x) + \sum_{n=1}^{N-1} a_nT_n(x) + \frac{1}{2}a_NT_N(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{2}a_0^{(1)}T_0(x) + \sum_{n=1}^{N-1} a_n^{(1)}T_n(x) + \frac{1}{2}a_N^{(1)}T_N(x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{1}{2}a_0^{(2)}T_0(x) + \sum_{n=1}^{N-1} a_n^{(2)}T_n(x) + \frac{1}{2}a_N^{(2)}T_N(x)$$

# 4. アダムズ・ムルトン二位公式

➤ 支配方程式と境界条件を離散的に書くと

$$\frac{da_n}{dt} = \nu a_n^{(2)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}a_0^{(1)} - a_1^{(1)} + a_2^{(1)} - a_3^{(1)} + \dots + \frac{1}{2}a_N^{(1)} = 0, \quad (x = -1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}a_0^{(1)} + a_1^{(1)} + a_2^{(1)} + a_3^{(1)} + \dots + \frac{1}{2}a_N^{(1)} = 0, \quad (x = 1)$$

➤ アダムズ・ムルトン二位公式:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n)$$

アダムズ・ムルトン二位公式を適用し, 左辺に未知数を右辺に既知の数に移行すると

$$\underbrace{-a_n(t+h) + \frac{h\nu}{2}a_n^{(2)}(t+h)}_{\text{未知の数}} = \underbrace{-\left(\frac{h\nu}{2}a_n^{(2)}(t) + a_n(t)\right)}_{\text{既知の数}}$$

□  $a_n(t+h)$  を求めるには  $a_n(t+h)$  から計算される  $a_n^{(2)}(t+h)$  を求める必要がある。



# 4. 展開係数の関係

➤ それぞれの関数の展開係数には以下のような関係がある

$$\begin{array}{ll} a_N^{(1)} = 0 & a_N^{(2)} = 0 \\ a_{N-1}^{(1)} = Na_N & a_{N-1}^{(2)} = Na_N^{(1)} \\ a_{N-2}^{(1)} = 2(N-1)a_{N-1} & a_{N-2}^{(2)} = 2(N-1)a_{N-1}^{(1)} \\ a_{N-3}^{(1)} = a_{N-1}^{(1)} + 2(N-2)a_{N-2} & a_{N-3}^{(2)} = a_{N-1}^{(2)} + 2(N-2)a_{N-2}^{(1)} \\ a_{N-4}^{(1)} = a_{N-2}^{(1)} + 2(N-3)a_{N-3} & a_{N-4}^{(2)} = a_{N-2}^{(2)} + 2(N-3)a_{N-3}^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ a_2^{(1)} = a_4^{(1)} + 2 \cdot 3a_3 & a_2^{(2)} = a_4^{(2)} + 2 \cdot 3a_3^{(1)} \\ a_1^{(1)} = a_3^{(1)} + 2 \cdot 2a_2 & a_1^{(2)} = a_3^{(2)} + 2 \cdot 2a_2^{(1)} \\ a_0^{(1)} = a_2^{(1)} + 2 \cdot 1a_1 & a_0^{(2)} = a_2^{(2)} + 2 \cdot 1a_1^{(1)} \end{array}$$

➤ これらを用いて  $a_n^{(2)}(t+h)$  を  $a_n(t+h)$  で表す

# 4. 二階微分の展開係数の変換

➤ 例えば  $n = 0$  のとき

$$a_0^{(2)} = 2 \cdot 1 a_1^{(1)} + 2 \cdot 3 a_3^{(1)} + 2 \cdot 5 a_5^{(1)} a + \cdots + 2(N-1) a_{N-1}^{(1)}$$

これをさらに展開すると

$$\begin{aligned} a_0^{(2)} &= 2 \cdot 1(2 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 4a_4 + 2 \cdot 6a_6 + \cdots + Na_N) \\ &\quad + 2 \cdot 3(2 \cdot 4a_4 + 2 \cdot 6a_6 + \cdots + Na_N) \\ &\quad + 2 \cdot 5(2 \cdot 6a_6 + \cdots + Na_N) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + 2 \cdot (N-1)(Na_N) \end{aligned}$$

整理すると

$$\begin{aligned} a_0^{(2)} &= (2 \cdot 1)2 \cdot 2a_2 + (2 \cdot 1 + 2 \cdot 3)2 \cdot 4a_4 + (2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5)2 \cdot 6a_6 \\ &\quad + \cdots + \{2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + \cdots + 2(N-3)\}2(N-2)a_{N-2} \\ &\quad + \{2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + \cdots + 2(N-1)\}Na_N \end{aligned}$$

# 4. 二階微分の展開係数の変換

➤ その他の  $n$  の場合についても書き下すと

$$\begin{aligned} a_1^{(2)} &= (2 \cdot 2)2 \cdot 3a_3 + (2 \cdot 2 + 2 \cdot 4)2 \cdot 5a_5 + (2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 6)2 \cdot 7a_7 \\ &\quad + \cdots + \{2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + \cdots + 2(N-4)\}2(N-3)a_{N-3} \\ &\quad + \{2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + \cdots + 2(N-2)\}2(N-1)a_{N-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2^{(2)} &= (2 \cdot 3)2 \cdot 4a_4 + (2 \cdot 3 + 2 \cdot 5)2 \cdot 6a_6 + (2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 7)2 \cdot 8a_8 \\ &\quad + \cdots + \{2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + \cdots + 2(N-3)\}2(N-2)a_{N-2} \\ &\quad + \{2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + \cdots + 2(N-1)\}Na_N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3^{(2)} &= (2 \cdot 4)2 \cdot 5a_5 + (2 \cdot 4 + 2 \cdot 6)2 \cdot 7a_7 + (2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 8)2 \cdot 9a_9 \\ &\quad + \cdots + \{2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 8 + \cdots + 2(N-4)\}2(N-3)a_{N-3} \\ &\quad + \{2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 8 + \cdots + 2(N-2)\}2(N-1)a_{N-1} \end{aligned}$$

⋮

$$a_{N-5}^{(2)} = 2(N-4)2(N-3)a_{N-3} + \{2(N-4) + 2(N-2)\}2(N-1)a_{N-1}$$

$$a_{N-4}^{(2)} = 2(N-3)2(N-2)a_{N-2} + \{2(N-3) + 2(N-1)\}Na_N$$

$$a_{N-3}^{(2)} = 2(N-2)2(N-1)a_{N-1}$$

$$a_{N-2}^{(2)} = 2(N-1)Na_N$$

$$a_{N-1}^{(2)} = 0$$

$$a_N^{(2)} = 0$$

# 4. 展開係数に対する方程式

- アダムズ・ムルトン二位公式に話を戻す

$$-a_n(t+h) + \frac{h\nu}{2} a_n^{(2)}(t+h) = -\left(\frac{h\nu}{2} a_n^{(2)}(t) + a_n(t)\right)$$

- チェビシェフタウ法の考えに基づき,  $n = 0, 1, 2, \dots, N-2$  とすると  $a_n(t+h)$  に関する  $N-1$  本の方程式が得られる.

$$-a_0 + *a_2 + *a_4 + *a_6 + \dots + *a_N = * \quad (n=0)$$

$$-a_1 + *a_3 + *a_5 + *a_7 + \dots + *a_{N-1} = * \quad (n=1)$$

$$-a_2 + *a_4 + *a_6 + *a_8 + \dots + *a_N = * \quad (n=2)$$

$$-a_3 + *a_5 + *a_7 + *a_9 + \dots + *a_{N-1} = * \quad (n=3)$$

⋮

$$-a_{N-5} + *a_{N-3} + *a_{N-1} = * \quad (n=N-5)$$

$$-a_{N-4} + *a_{N-2} + *a_N = * \quad (n=N-4)$$

$$-a_{N-3} + *a_{N-1} = * \quad (n=N-3)$$

$$-a_{N-2} + *a_N = * \quad (n=N-2)$$

※ アスタリスクは非ゼロ成分

# 4. 境界条件による制約

➤ これらの式では、未知数の数が  $N + 1$  個なのに対して、方程式の数が  $N - 1$  個となっているため、解くことができない。そこで境界条件による二つの制約 (方程式) を加えて、解けるようにする。(チェビシェフタウ法)

➤ 両端ノイマン境界条件 (熱力学方程式中の鉛直拡散の時間発展を演算する場合)

$$2 \cdot 1a_1 + 6 \cdot 3a_3 + 10 \cdot 5a_5 + \cdots + 2(N-3)^2 a_{N-3} + 2(N-1)^2 a_{N-1} = 0$$

$$2 \cdot 2a_2 + 4 \cdot 4a_4 + 6 \cdot 6a_6 + \cdots + (N-2)^2 a_{N-2} + \frac{N^2}{2} a_N = 0$$

➤ 上端ノイマン, 下端ディリクレ境界条件 (渦度方程式と発散方程式中の鉛直拡散の時間発展を演算する場合)

$$1 \cdot 1a_1 + 2 \cdot 2a_2 + 3 \cdot 3a_3 + \cdots + (N-1)(N-1)a_{N-1} + \frac{N^2}{2} a_N = 0$$

$$\frac{1}{2}a_0 - a_1 + a_2 + \cdots + \frac{1}{2}a_N = 0$$

# 4. 拡散方程式の解法

- 境界条件を連立させると, 以下のような連立一次方程式となる
  - 上二行が境界条件による制約 (下の例は両端ノイマン境界条件の場合)
  - LU 分解を用いて解く

$$\begin{pmatrix} * & 0 & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & * & 0 & * & 0 & \cdots & 0 & * & 0 & * & 0 \\ -1 & 0 & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & -1 & 0 & * & 0 & \cdots & 0 & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & 0 & * \\ & & & \ddots & \ddots & & & & & & \\ & & & & \ddots & & * & 0 & * & 0 & * \\ & & & & & \ddots & 0 & * & 0 & * & 0 \\ & & & & & & -1 & 0 & * & 0 & * \\ & & & & & & & -1 & 0 & * & 0 \\ 0 & & & & & & & & -1 & 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \vdots \\ a_{N-4} \\ a_{N-3} \\ a_{N-2} \\ a_{N-1} \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ * \\ * \\ * \\ \vdots \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

※ アスタリスクは非ゼロ成分

# 5. モデルチェック

1. はじめに
2. 支配方程式系
3. スペクトル展開
4. 時間積分法
5. モデルチェック
6. まとめと今後の方針
7. 参考文献

# 5. モデルチェック

- スペクトル法で離散化して得られた支配方程式系に対して, いくつかのモデルチェックを実施した
  - 山本 (2009) において実施されたモデルチェック法
    - 水平方向のチェック: ロスビー波の伝播
    - 鉛直方向のチェック: 重力波の振動
  - Held and Hou (1980) の追試
    - いくつかの点で Held and Hou (1980) における数値モデルとは異なる



# 5. 水平方向のモデルチェック

➤ モデル支配方程式系に対して以下の仮定をする

- 等温
- 順圧場
- 非粘性

➤ そのとき、解析的には鉛直渦度のみの時間発展方程式に帰着する

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla_H^2 \psi = -\frac{2\Omega}{a^2} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}$$

以下の形の解を仮定:

$$\psi = Y_n^m e^{-i\omega t}$$

□ 分散関係:

$$\frac{\omega}{m} = -\frac{2\Omega}{n(n+1)}$$

➤ 初期に与えた位相がこの各振動数で伝播することをチェックする

# 5. 水平方向のモデルチェック

## ➤ 解析的な周期:

- $m = 1, n = 1, \Omega = 7.292 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  とすると
- 周期:  $T = 86165.45951 \text{ s}$

## ➤ 実験設定

水平切断波数	21	経度格子点数	64	緯度格子点数	32
鉛直切断波数	16	鉛直格子点数	17		
時間刻み幅	600 s	積分時間	86400 s	出力間隔	600 s

## ➤ 等温, 順圧場を仮定しているので, 理論的には, 元の数値モデルに含まれている発散方程式と熱力学方程式を解いても影響を及ぼさない

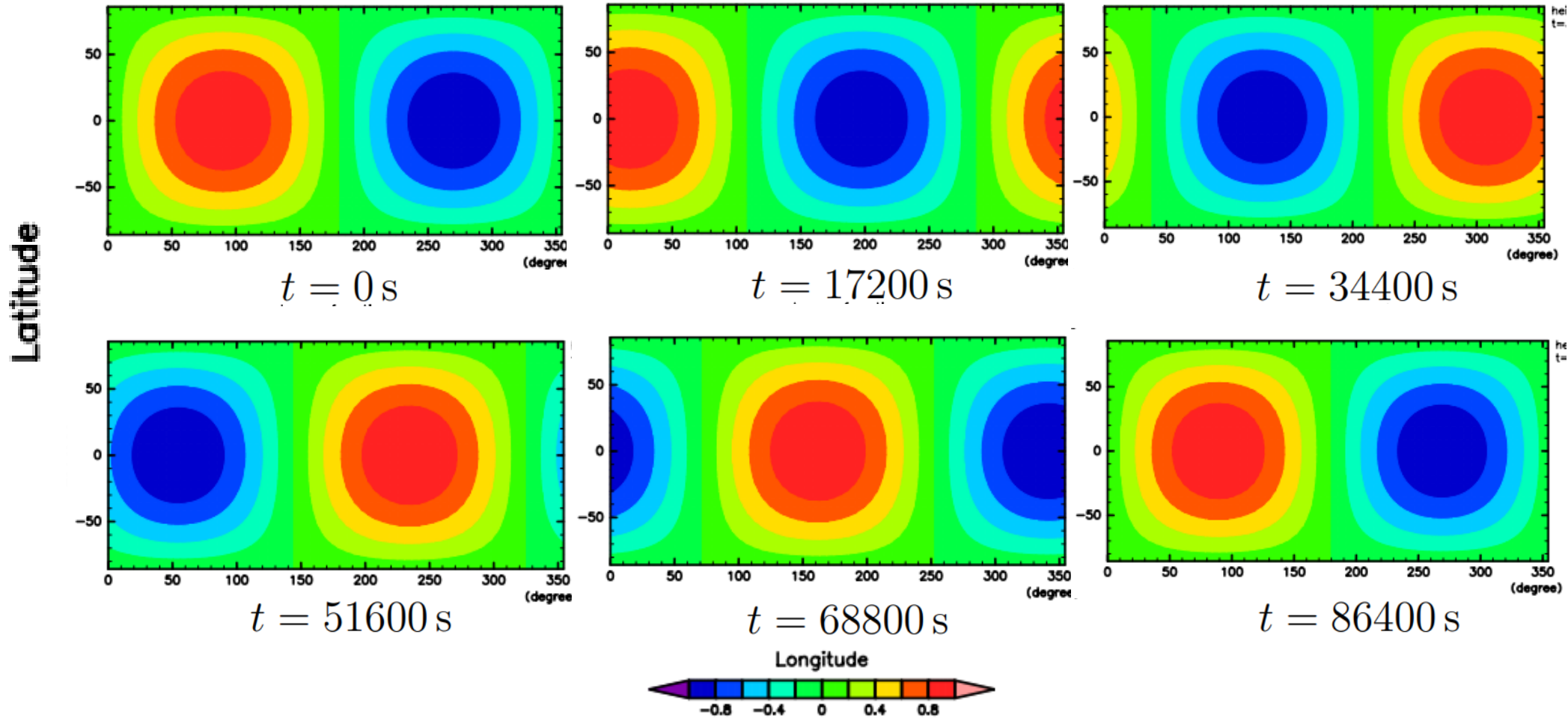
□ しかし, 構築した数値モデルには, 鉛直境界条件の取り扱い方で, 等温, 順圧場を崩すサブルーチンが含まれている.

- (このモデルチェック法における) 鉛直境界条件にあうように変える

# 5. 水平方向のモデルチェック

## ➤ 数値計算結果 (流線関数)

- 解析的な周期 (86165.45951 s) に近い周期で西方に伝播.



# 5. 鉛直方向のモデルチェック

➤ モデル支配方程式系に対して以下の仮定を行う

□ 温位場を基本場と擾乱場に分解

$$\theta(\lambda, \mu, z, t) = \bar{\theta}(z) + \theta'(\lambda, \mu, t)$$

□ 基本場の鉛直温位勾配は一定

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = \text{一定.}$$

□ 惑星の自転はなく, 非粘性, 非拡散

$$\Omega = \nu_H = \nu_V = \kappa_H = \kappa_V = 0$$

□ 渦度, 発散の基本場はゼロとする

# 5. 鉛直方向のモデルチェック

➤ これらの仮定をし, 方程式系を線形化すると, 以下の二つの時間発展方程式が残る

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \chi}{\partial z} \right) = -g \frac{\theta'}{\Theta_0}$$
$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} = -w \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}$$

上の式の両辺を時間微分し, 下の式を代入

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial \chi}{\partial z} \right) = -\frac{g}{\Theta_0} \frac{\partial \theta'}{\partial t}$$
$$= -\frac{g}{\Theta_0} \cdot -w \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}$$

両辺を鉛直微分し, 非圧縮の式を用いると

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = N^2 \frac{\partial w}{\partial z}$$
$$= -N^2 D$$
$$= -N^2 \nabla_H^2 \chi$$

N: ブラントバイサラ振動数

$$N^2 \equiv \frac{g}{\Theta_0} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}$$

# 5. 鉛直方向のモデルチェック

- 以下の形の解を仮定

$$\chi = Y_n^m \sin \left[ \frac{l\pi z}{H} \right] e^{-i\omega t}$$

- 分散関係:

$$\omega^2 = \frac{N^2 n(n+1)}{a^2} \left( \frac{H}{l\pi} \right)^2$$

- パラメータ設定

$$n = 1, \quad l = 1$$

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2, \quad \Theta_0 = 332.5 \text{ K}, \quad \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = 6.5 \times 10^{-3} \text{ K/m}$$

$$a = 6.4 \times 10^6 \text{ m}, \quad H = 8.0 \times 10^3 \text{ m}.$$

- 解析的な周期:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 806734.8881 \text{ s}$$

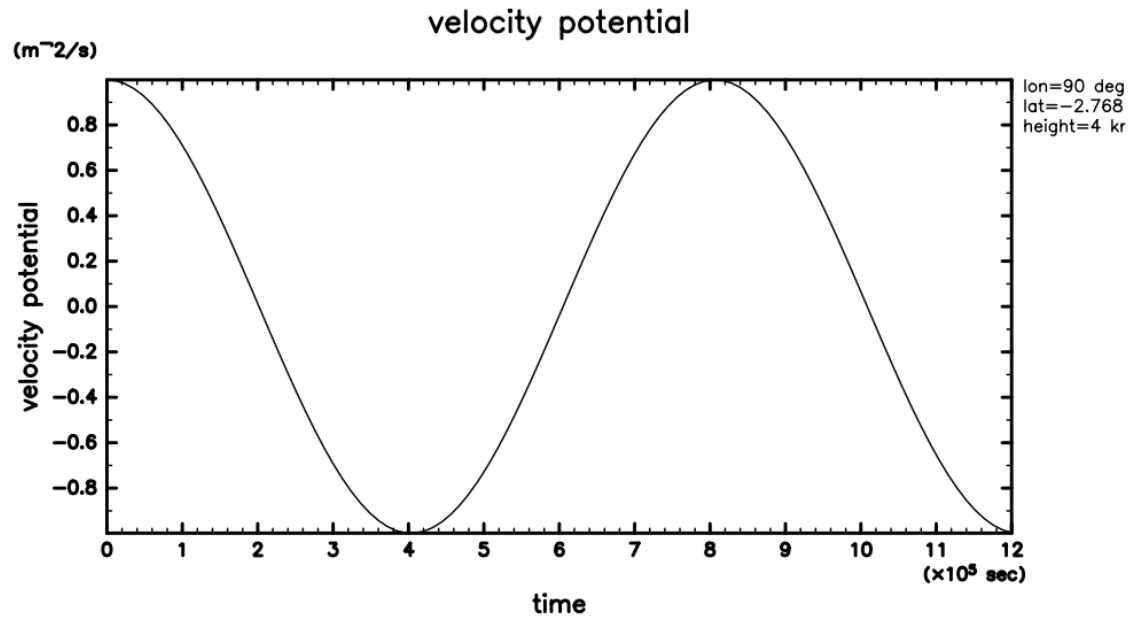
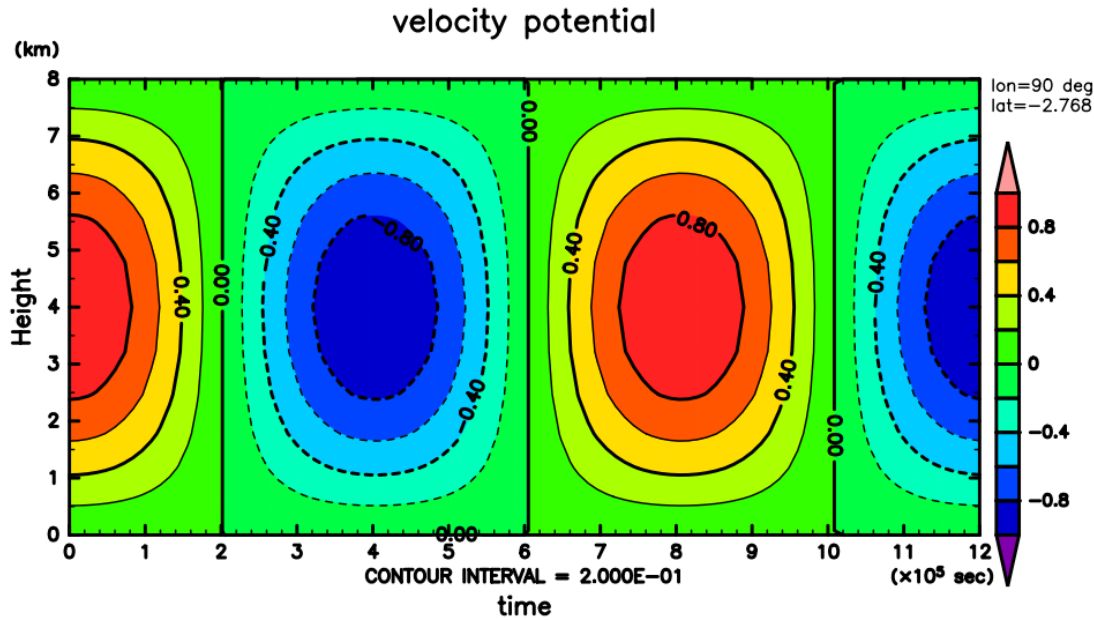
- 実験設定

水平切断波数	21	経度格子点数	64	緯度格子点数	32
鉛直切断波数	16	鉛直格子点数	17		
時間刻み幅	600 s	積分時間	1200000 s	出力間隔	12000 s

# 5. 鉛直方向のモデルチェック

## ➤ 数値計算結果 (速度ポテンシャル)

- 解析的な周期 (806734.8881 s) に近い周期で振動



$z = 4$  km で切り出す

## 5. Held and Hou (1980) の追試

- Held and Hou (1980) では, 自転軸対称を仮定したモデルが用いられた
  - 自転軸対称: 経度方向に一様な場を意味する.
- ここまで説明した本数値モデルは, 経度, 緯度, 高度の空間三次元版である.
  - Held and Hou (1980) の追試を行うため, 自転軸対称を仮定し, 緯度, 高度 (子午面) の空間二次元モデルを別途作成して, それを用いて計算した.



# 5. Held and Hou (1980) との主な相違点

## ➤ 主な相違点:

### □ 鉛直境界条件

- 本モデル:

$$z = H : \quad w = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$$

$$z = 0 : \quad w = 0; \quad u = v = \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$$

- Held and Hou (1980):

$$z = H : \quad w = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$$

$$z = 0 : \quad w = 0; \quad \nu \frac{\partial u}{\partial z} = Cu, \nu \frac{\partial v}{\partial z} = Cv, \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$$

### □ 空間離散化, 空間微分

- 本モデル: スペクトル法を用いて離散化して, 内挿して微分を計算
- Held and Hou (1980): スタッガードグリッドを用いた空間離散化, 二次の有限差分による空間微分

### □ 時間積分法

- 本モデル: 4 次のルンゲクッタ法をベースとするセミインプリシット法
- Held and Hou (1980): Matsuno's (1966) explicit "simulated backward difference" method\*

\* どのような計算手法なのか (自分が) 調べることができていない.

# 5. 実験設定

## ➤ パラメータ設定

$$\Omega = 2\pi/(8.64 \times 10^4 \text{ s}), \quad a = 6.4 \times 10^6 \text{ m}, \quad g = 9.8 \text{ m}^2\text{s}^{-1} \quad H = 8.0 \times 10^3 \text{ m}$$

$$\Theta_0 = 300 \text{ K}, \quad \Delta_H = 1/3, \quad \Delta_v = 1/8, \quad \tau = 20 \text{ days}$$

## ➤ 放射平衡温位場

$$\frac{\theta_E(\phi, z)}{\Theta_0} = 1 - \frac{2}{3}\Delta_H P_2(\sin \phi) + \Delta_v \left( \frac{z}{H} - \frac{1}{2} \right) \quad P_2(x) = 1/2(3x^2 - 1)$$

## ➤ 実験設定

- 鉛直動粘性係数  $\nu_V = 0.5, 1, 2.5, 5, 10, 25 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  の場合について計算する
- 初期条件: 等温 (  $\theta = 300 \text{ K}$  ), 静止大気
- 解像度等:

水平切断波数	21	緯度格子点数	32		
鉛直切断波数	48	鉛直格子点数	49		
時間刻み幅	600 s	積分時間	500 days	出力間隔	60 hours



※ 水平切断波数を大きくすると、計算自体は完了するが、高波数成分が目立つような構造になってしまった

- 現在原因を調査中

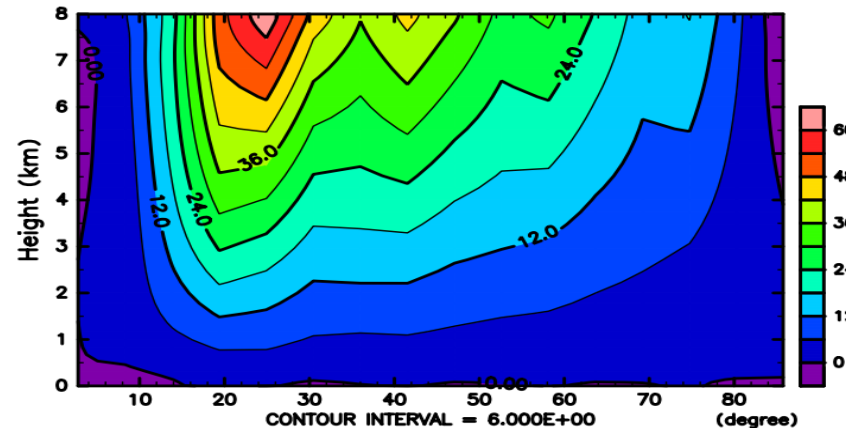
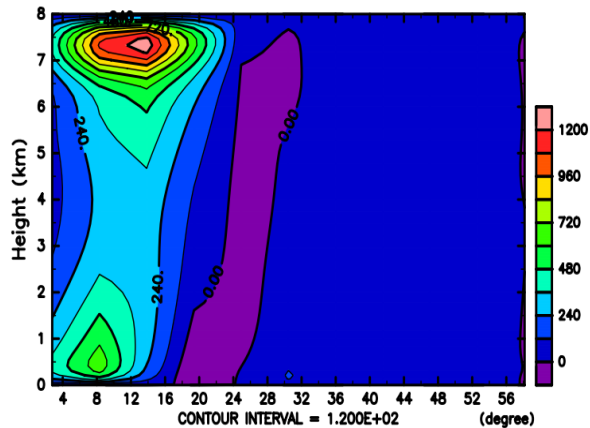
# 5. 実験結果

$$\nu_V = 0.5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

子午面流線関数  $v = -(1/\cos\phi)\partial\Psi/\partial z$

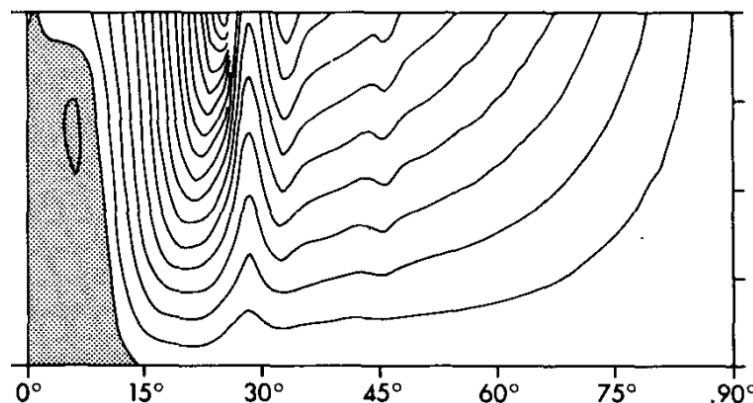
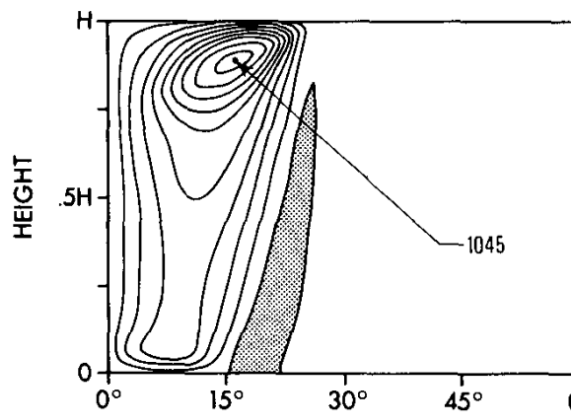
東西風

本モデル



(  
1  
9  
8  
0  
)

H  
H



↑  
Height  
↓

← Latitude →

\* ここでは, Held and Hou (1980) を HH (1980) と略す.  
\* 上段: 時間発展で得られた 200 - 500 日のデータの平均

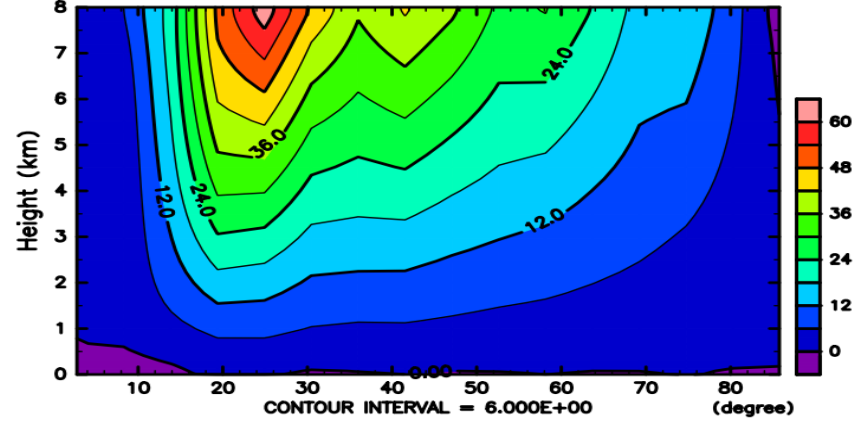
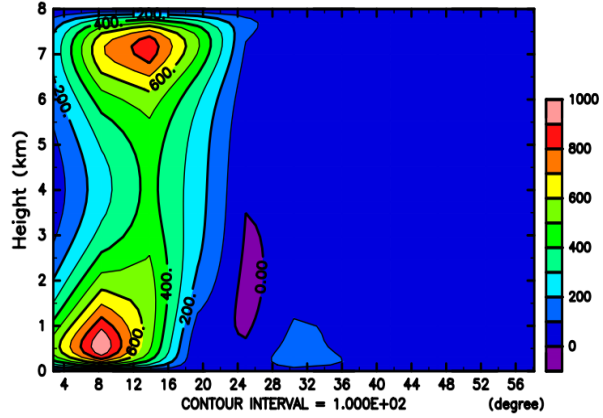
# 5. 実験結果

$$\nu_V = 1.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

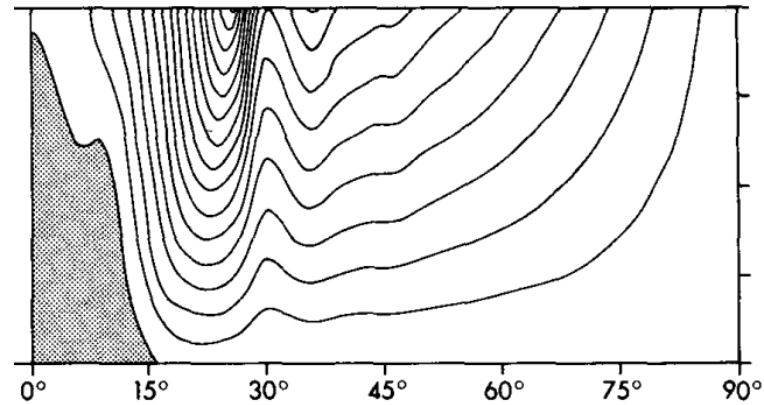
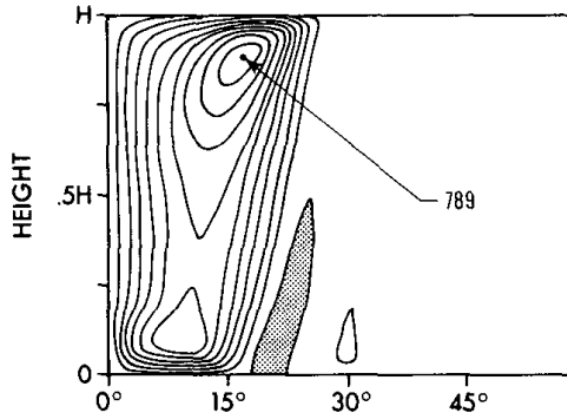
子午面流線関数  $v = -(1/\cos\phi)\partial\Psi/\partial z$

東西風

本モデル



(  
1  
9  
8  
0  
)



Height ↑

Latitude →

\* ここでは, Held and Hou (1980) を HH (1980) と略す.  
\* 上段: 時間発展で得られた 200 - 500 日のデータの平均

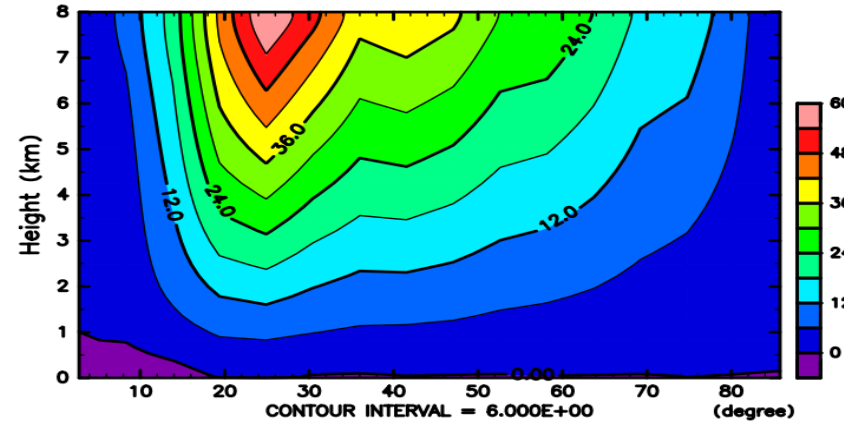
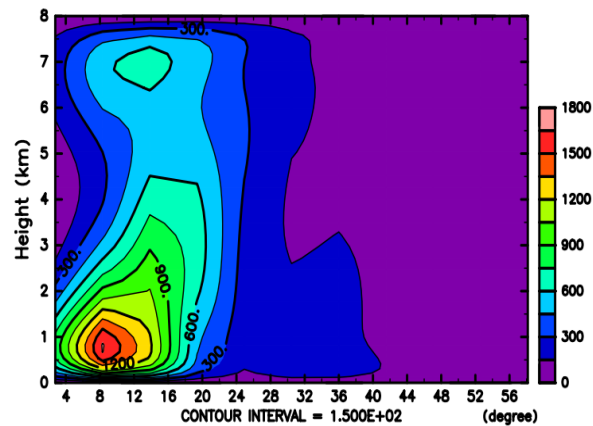
# 5. 実験結果

$$\nu_V = 2.5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

子午面流線関数  $v = -(1/\cos\phi)\partial\Psi/\partial z$

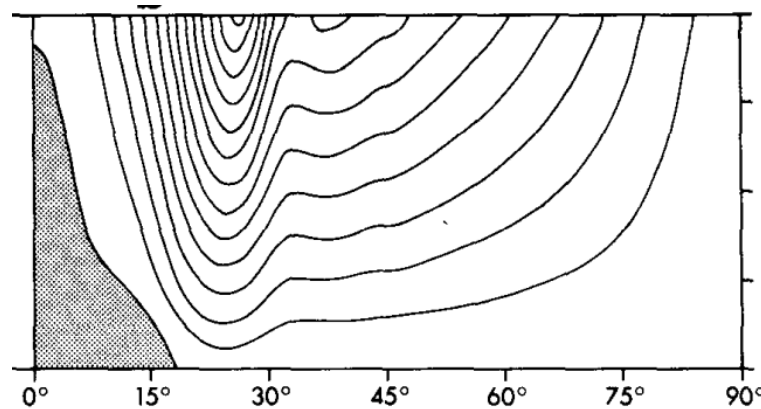
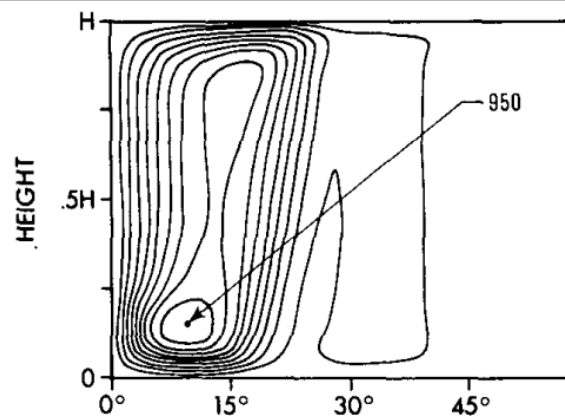
東西風

本モデル



(  
1  
9  
8  
0  
)

H  
H



↑  
Height  
↓

← Latitude →

- \* ここでは, Held and Hou (1980) を HH (1980) と略す.
- \* 上段: 時間発展で得られた 200 - 500 日のデータの平均

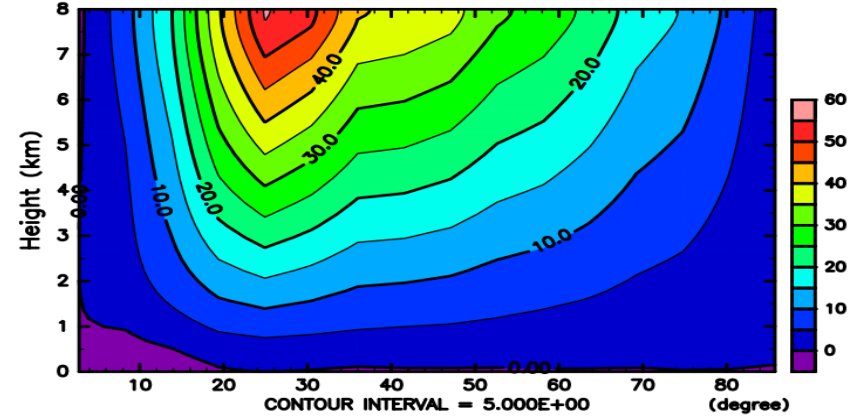
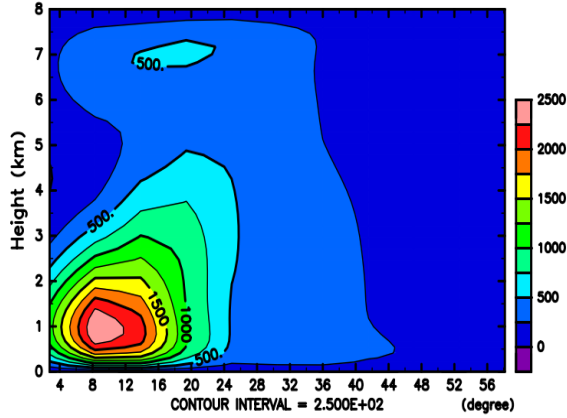
# 5. 実験結果

$$\nu_V = 5.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

子午面流線関数  $v = -(1/\cos\phi)\partial\Psi/\partial z$

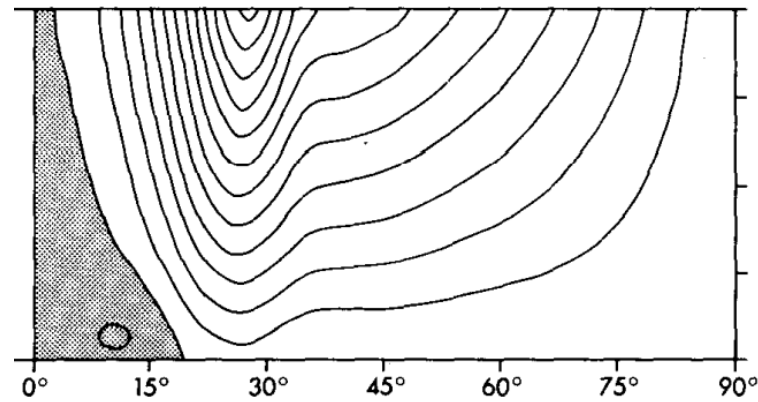
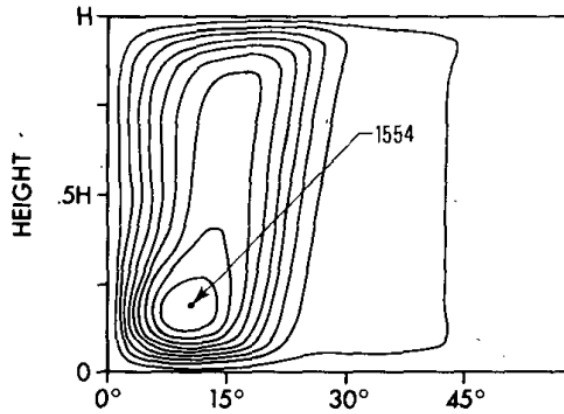
東西風

本モデル



(1980)

HH



Height ↑

Latitude →

\* ここでは, Held and Hou (1980) を HH (1980) と略す.  
 \* 上段: 時間発展で得られた 200 - 500 日のデータの平均

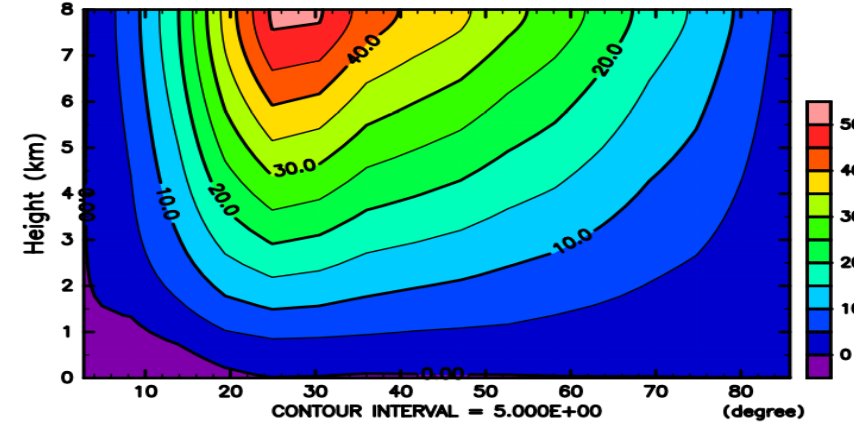
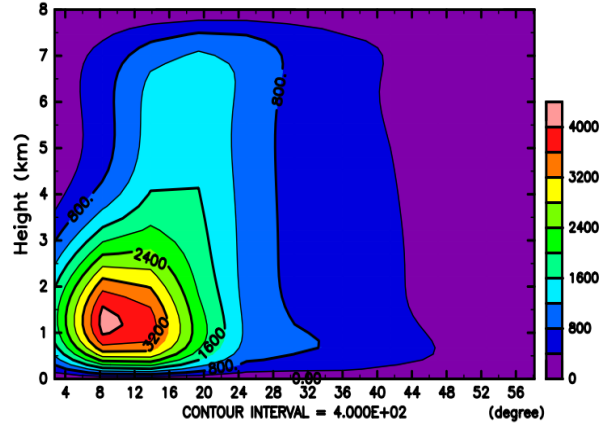
# 5. 実験結果

$$\nu_V = 10.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

子午面流線関数  $v = -(1/\cos\phi)\partial\Psi/\partial z$

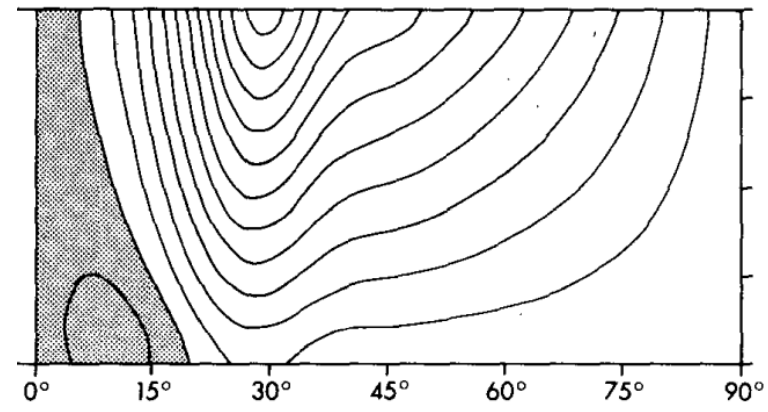
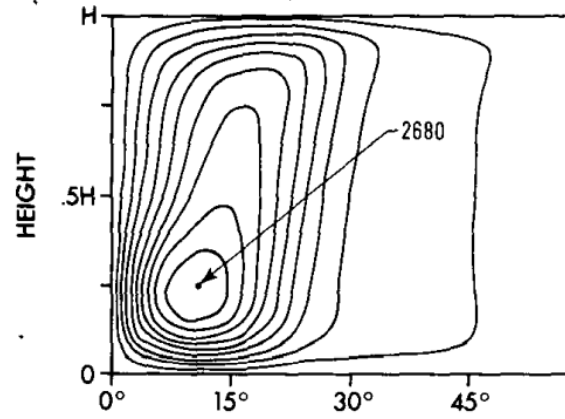
東西風

本モデル



(  
1  
9  
8  
0  
)

H  
H



Height ↑

Latitude →

\* ここでは, Held and Hou (1980) を HH (1980) と略す.  
\* 上段: 時間発展で得られた 200 - 500 日 のデータの平均

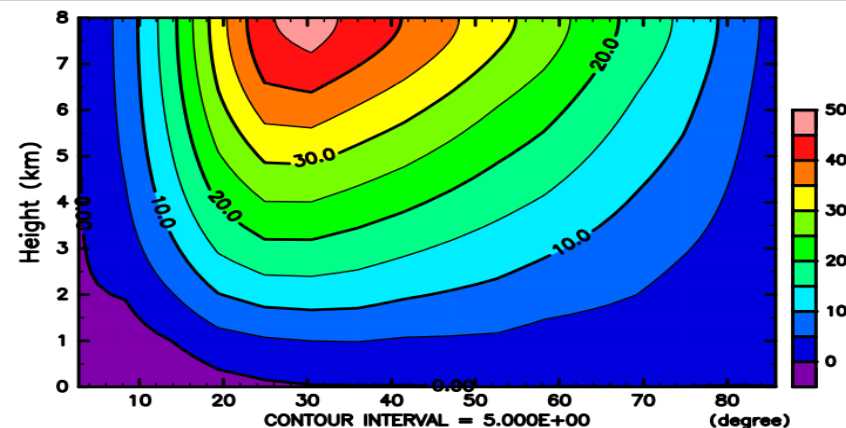
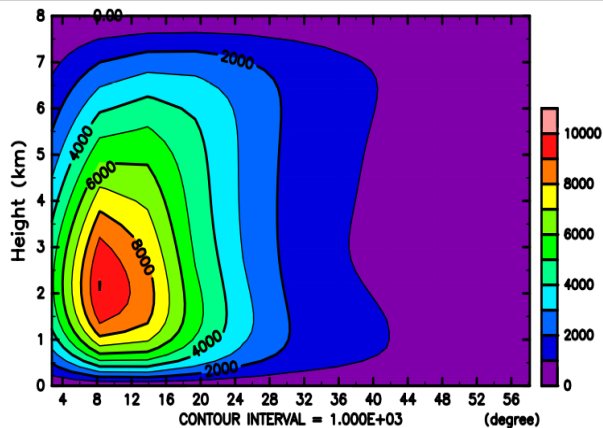
# 5. 実験結果

$$\nu_V = 25.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

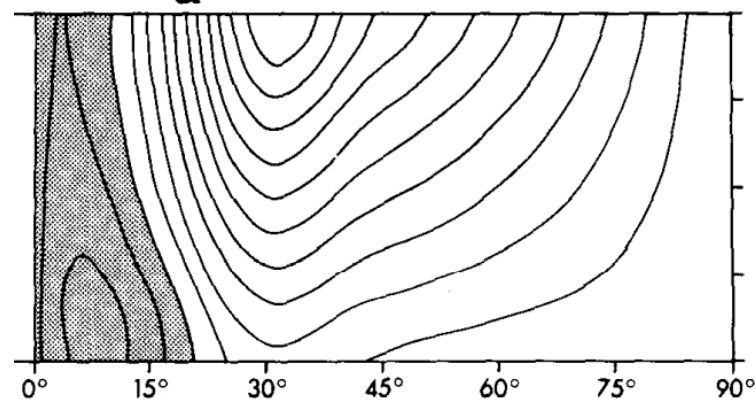
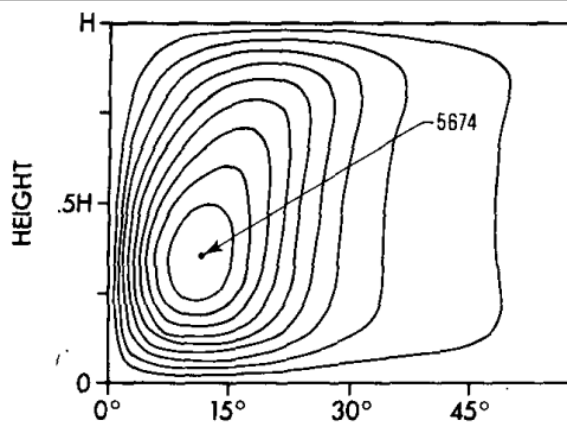
子午面流線関数  $v = -(1/\cos\phi)\partial\Psi/\partial z$

東西風

本モデル



(  
1  
9  
8  
0  
)



Height ↑

Latitude →

- \* ここでは, Held and Hou (1980) を HH (1980) と略す.
- \* 上段: 時間発展で得られた 200 - 500 日 のデータの平均



## 6. まとめ

- ブシネスク流体プリミティブ方程式系を解く数値モデルの構築を試みた
  - スペクトル展開
    - 水平方向: 球面調和関数
    - 鉛直方向: チェビシェフ多項式
  - 時間積分
    - 4 次のルンゲクッタ法をベースとするセミインプリシット法
- 構築した数値モデルでモデルチェックを行った
  - 山本 (2009) におけるもので実施
    - 水平方向: ロスビー波の西進
    - 鉛直方向: 重力波の伝播

# 6. まとめ

- Held and Hou (1980) の追試
  - 実験設定の主な違い
    - 下端境界条件
    - 空間離散化, 時間積分法
  - 結果
    - Held and Hou (1980) におけるいくつかの数値計算結果と定性的には整合的
  - 問題点
    - いくつかの結果は Held and Hou (1980) のものと異なる
    - 水平解像度を上げた場合にはうまくいかない
    - 動粘性係数の設定方法

# 6. 今後の方針

## 1. Held and Hou (1980) の追試

そのために:

- Held and Hou (1980) と同じ下端境界条件を組み込む
- 数値モデル構築に関する疑問を解決する

## 2. Lindzen and Hou (1988) の追試

- ニュートン加熱強制の中心が赤道から離れている (加熱中心自体は時間変化しない) 場合のハドレー循環

## 3. Fang and Tung (1998) の追試

- ニュートン加熱強制の中心が時間変化する場合のハドレー循環

## 7. 参考文献

- 石岡圭一, 2004: 「スペクトル法による数値計算入門」, 東京大学出版会
- Keiichi ISHIOKA, Naoto YAMAMOTO, and Masato FUJITA, 2022: 「A Formulation of a Three-Dimensional Spectral Model for the Primitive Equations」,  
[https://www.jstage.jst.go.jp/article/jmsj/advpub/0/advpub\\_2022-022/\\_article/-char/ja/](https://www.jstage.jst.go.jp/article/jmsj/advpub/0/advpub_2022-022/_article/-char/ja/)
- 山本博基, 2009: 「修士論文付録 B」, [http://www.gfd-dennou.org/member/hiroki/file/BPmodel/Note\\_BPM.pdf](http://www.gfd-dennou.org/member/hiroki/file/BPmodel/Note_BPM.pdf)
- 吉田茂生, 2020: 「直交多項式」,  
[http://dyna.geo.kyushu-u.ac.jp/~yoshida/japanese/science-notes/orthogonal\\_polynomials/polynomials.pdf](http://dyna.geo.kyushu-u.ac.jp/~yoshida/japanese/science-notes/orthogonal_polynomials/polynomials.pdf)

# 7. 参考文献

- 地球流体電脳倶楽部, 2002: 「階層的地球流体スペクトルモデル集 SPMODEL」 <https://www.gfd-dennou.org/arch/spmodel/index.htm.ja>
- 地球流体電脳倶楽部, : 「大気大循環モデル DCPAM, 定式化文書」
  - [https://www.gfd-dennou.org/arch/dcpam/dcpam5/dcpam5\\_latest/doc/basic\\_equations/pub/basic\\_equations.pdf](https://www.gfd-dennou.org/arch/dcpam/dcpam5/dcpam5_latest/doc/basic_equations/pub/basic_equations.pdf)
  - [https://www.gfd-dennou.org/arch/dcpam/dcpam5/dcpam5\\_latest/doc/derivation/pub/derivation.pdf](https://www.gfd-dennou.org/arch/dcpam/dcpam5/dcpam5_latest/doc/derivation/pub/derivation.pdf)