

地球流体コアの 支配方程式

流体地球物理学分野

1833484s

服部蒼紀

はじめに

- MHD 方程式：地球流体コアの振舞を支配する代表的な式
- 目標
 - 支配方程式を計算, 地磁気の無次元量依存性を考察する.
 - 他天体の同様な構造に適用させる.
- ここでは
 - どのような条件下で MHD 方程式が成り立つのかを説明する.

基礎方程式

- マクスウェル方程式

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho_e}{\varepsilon} & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

- オームの法則

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}'$$

MHD 近似 (1)

- 電磁場の中で運動する物体が光速より十分遅い場合
ファラデーの法則 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
またはアンペールの法則 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ が成り立たない。
- オームの法則で必要な慣性系からみた電場は

$$\mathbf{E}' = (1 - \gamma) \left(\frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{v}}{v} \right) + \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

となるが、ローレンツ因子 $\gamma \approx 1$ なので $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$

MHD 近似 (2)

- アンペールの法則の電場の時間変化を無視し, MHD 近似下のオームの法則を適用すると誘導方程式が求まる.

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{\mu\sigma} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})$$

- これは磁場の時間偏微分なので回転系でも成り立つ.
- 一般的な電磁場の問題と同じくローレンツ力は

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

MHD 近似 (3)

- 誘導方程式と $\frac{\mathbf{B}}{\mu}$ の内積をとると, エネルギー方程式が求まる.

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu} \right) dV = \int_V \left(-\nabla \cdot \left(\mathbf{E} \times \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \right) - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) - \frac{|\mathbf{J}|^2}{\sigma} \right) dV$$

- 右辺第 3 項は抵抗による加熱の項でオーム加熱と呼ばれる.

まとめ

- MHD 方程式は流体の運動が光速よりも十分に遅いときに成り立つ近似である。
 - 誘導方程式は磁場の時間偏微分なので慣性系でも回転系でも成り立つ。
 - アンペールの法則が成り立たないので近似では電磁放射は失われる。
 - 電磁場の変化は情報を伝搬することのみに使われる。

参考文献

- Gubbins, D., and Roberts, P.H., 1987: Magnetohydrodynamics of the earth's core. Jacobs, J.A., Ed., Geomagnetism, Vol.2, 1–184.
- 吉田茂生, 竹広真一, 佐々木洋平, 林祥介, 2002: 磁気流体力学 (MHD) の定式化. at <https://www.gfd-dennou.org/library/riron/mhd/teishiki/pub/teishiki.pdf> (2021年11月閲覧)
- 木村龍治 (1983) 『地球流体力学入門』東京堂出版 (気象学のプロムナード).