

磁気流体の 支配方程式の導出

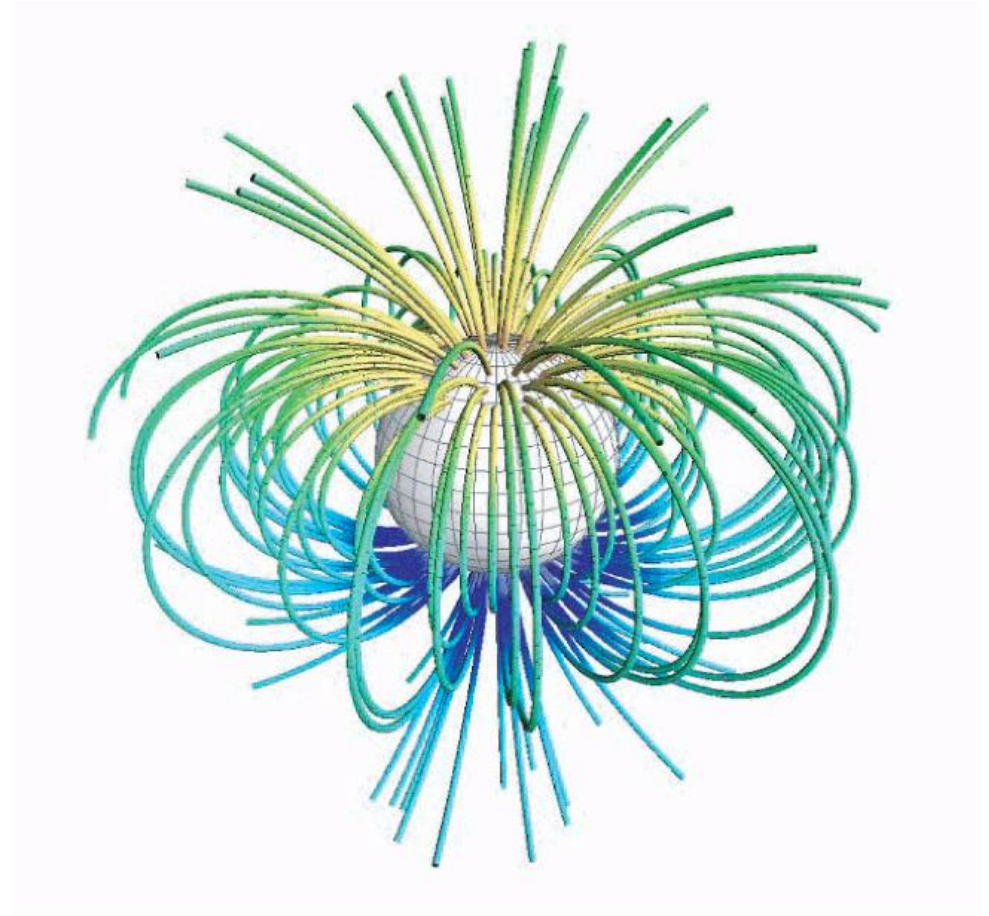
流体地球物理学教育研究分野

1833484s

服部蒼紀

はじめに

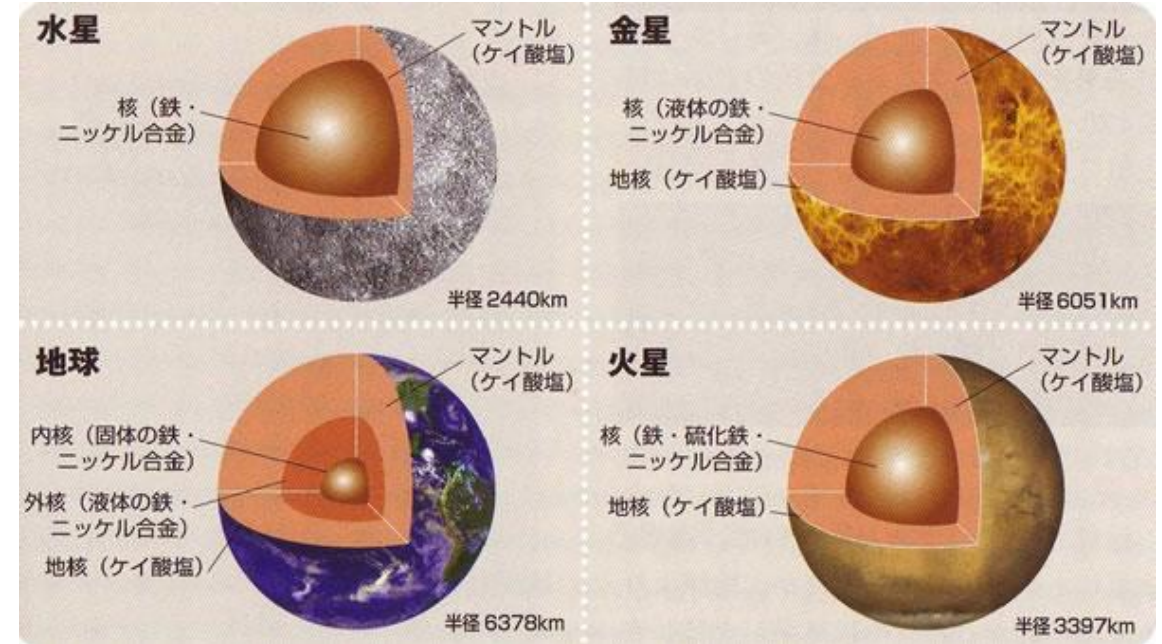
- 一部の惑星は固有磁場を持つ。
 - この惑星磁場の起因は惑星核内の流体金属の運動によるものとされている。
- ここでは
 - 流体金属の運動 \approx 磁気流体の支配方程式を導出する。



出典 : <https://www.research.kobe-u.ac.jp/csi-viz/research/past/index.ja.html>

惑星のモデル化

- 固有磁場のモデル
 - 惑星の内部は流体金属で構成されている.
 - 惑星は光速よりかなり遅い速さで自転している.
- この発表では磁場が電場を卓越する環境下の遅い運動をする物体の支配方程式を導出する.



岩石惑星の内部構造

(出典 : <https://www.neomag.jp/mailmagazines/topics/letter201807.html>)

電磁気学の方程式の復習

- マクスウェル方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

- ローレンツ力

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

- オームの法則

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}'$$

- 静止系から見た慣性系の電場

$$\mathbf{E}' = (1 - \gamma) \left(\frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{v}}{v} \right)$$

$$+ \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

\mathbf{E} : 電場 \mathbf{B} : 磁場

\mathbf{J} : 電流 \mathbf{v} : 物体の速度

ρ_e : 電荷密度

ϵ : 誘電率 μ : 透磁率

σ : 電気伝導率 γ : ローレンツ因子

MHD 近似 (1)

- 電磁場の中で運動する物体は光速より十分遅いので
 - ファラデーの法則 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
または
アンペールの法則 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$
のどちらかの時間変位項を無視できる.
 - オームの法則では必要な慣性系からみた電場は

$$\mathbf{E}' = (1 - \gamma) \left(\frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{v}}{v} \right) + \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

となるが, ローレンツ因子 $\gamma \approx 1$ なので $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$

MHD 近似 (2)

- 惑星の内部は磁場が卓越していることからアンペールの法則の電場の時間変化を無視し, (つまり $\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}$)
MHD 近似下のオームの法則を適用すると誘導方程式が求まる.

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu \sigma} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})$$

MHD 近似 (3)

- 誘導方程式と $\frac{\mathbf{B}}{\mu}$ の内積をとると, エネルギー方程式が求まる.

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu} \right) dV = \int_V \left(-\nabla \cdot \left(\mathbf{E} \times \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \right) - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) - \frac{|\mathbf{J}|^2}{\sigma} \right) dV$$

- 右辺第 3 項は抵抗による加熱の項でオーム加熱と呼ばれる.

まとめ

- MHD 方程式は物体の運動が光速よりも十分に遅いときを考えた近似である.

- 誘導の式

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu\sigma} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})$$

- 磁場のソレノイド条件

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- アンペールの法則

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}$$