

二重拡散対流の線形安定性解析と数値計算

坂廻邊 翼

神戸大学理学部地球惑星科学科
地球および惑星大気科学研究室

2013/02/28

要旨

本論文では海洋の循環やマグマ溜まりなどで観察される二重拡散対流を研究する。最初に、二重拡散対流を記述する方程式系の導出をする。次に導出した方程式系を線形化し、線形安定性解析を行う。その後、支配方程式系の数値計算を行う。本研究の数値計算は、地球流体電脳倶楽部が開発した SPMODEL を用いて行われた。最後に、数値計算により得られた解を線形解と比較し、線形解の有効範囲を議論する。

目次

第1章 導入	3
第2章 二重拡散対流の基礎理論	4
2.1 二重拡散対流とは	4
2.2 ブシネスク近似	5
2.3 二重拡散対流対流に関する方程式の導出	7
第3章 線形安定性解析	17
3.1 定式化	17
3.2 考察	20
第4章 数値計算	26
4.1 スペクトル法の概略	26
4.2 切断スペクトル方程式の導出	29
4.3 変換法	39
4.4 計算設定	40
4.5 エネルギー方程式の導出	42
4.6 予備実験	46

4.7 線形安定性解析解との比較	49
4.8 それぞれの場の時間推移	58
第5章 まとめ	78
付録A 流線関数	79
付録B (3.2.23) の導出	81
付録C 考慮する Ra', Rs' の領域	83
付録D (4.2.11) の変形	85
付録E 線形解析の持つ意味	87
謝辞	88
参考文献	89

第1章 導入

現在の地球は、表面の約 70 % は大量の海水で覆われており、それらは日々動いている。その動きは海水の密度に影響を受ける。さらに海水の密度は圧力、温度、塩分などの物質固有の拡散によって決まる。この拡散係数の違いが原因となって生じる対流は、二重拡散対流と呼ばれる。本研究では、この二重拡散対流を理解することを目的とする。二重拡散対流とは二種類の物理量の濃度によって密度が変化する流体が、異なる拡散速度を原因にして成層した領域のなかで起きる対流運動である。本研究では海水を想定して物理量として熱と塩分を採用する。

本研究では特に“線形化された方程式系を考察することにより得られる結果は、支配方程式系で表現される流体運動をどの程度表現できているのか。”ということに着目する。

構成としては第 2 章から二重拡散対流に関する基礎的な式を導出し、第 3 章にて前章で導出した方程式系を線形化し、線形安定性解析を行う。第 4 章では地球流体電脳倶楽部の `smodel` を用いてスペクトル法による二重拡散対流の数値計算を行う。解析解と計算値を比較することにより、線形性解析で得られた解析解の有効範囲に関して議論することを目的とする。

第 2 章 二重拡散対流の基礎理論

ここでは、まず二重拡散対流の基礎知識について述べる。次に基礎方程式 (連続の式, 運動方程式, 状態方程式, 熱力学における拡散方程式) を出発点として二重拡散対流を記述する支配方程式を導出していく。

2.1 二重拡散対流とは

二重拡散対流とは、流体に含まれる物理量の拡散係数の違いが原因となり生じる対流のことである。まず、熱や物理量を含んでいる密度成層している流体を考える。上に行くほど高温高塩分、下に行くほど低温低塩分の状態、もしくはその逆の状態を考える。まず前者の場合を模式的に示したのが図 2.1.1 である。この場合では、

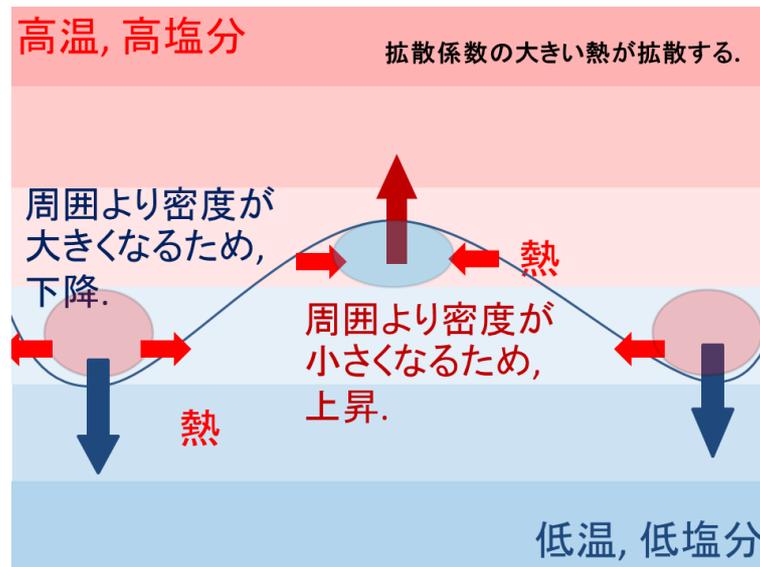


図 2.1.1: 上層に高温高塩分, 下層に低温低塩分が存在する領域

熱の拡散係数 κ が塩分の拡散係数 κ_S よりも 10^2 倍程度なことより, 上層から下層

に熱が塩分よりも先に移動することにより、下に変位した流体は熱を失う結果、密度が上がりさらに下降する。下降した後、周りはさらに温度は低いので流体は熱を失い、さらに下降する。このように流体はどんどんと密度を増すことにより沈降する。逆に流体が上に変位した場合は、周りから熱を奪うことによりどんどんと密度が下がり上昇し続ける。これは finger 型対流と呼ばれる。次に後者の場合は、これは図 (2.1.2) のような状況である。この場合では、熱が塩分よりも先に移動するこ

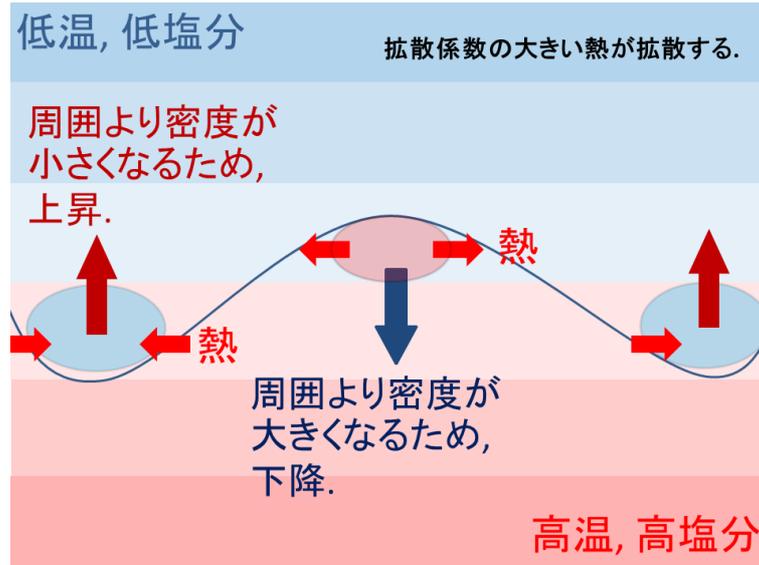


図 2.1.2: 上層に低温低塩分, 下層に高温高塩分が存在する領域

とにより、上に変位した流体は熱を失う。結果、密度が下がり下降する。元の位置に戻ってきたとき、温度は周りよりも低くなっているはずであるから、これはさらに下降する。その後、周りより熱を奪い上昇する。このようにして振幅が大きくなることにより、不安定となる。このような状況下で起こる対流を二重拡散対流と呼ぶ。

2.2 ブシネスク近似

流体力学における最も一般的な支配方程式である圧縮性流体を記述する方程式系は、連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.2.1)$$

ナビエ - ストークスの式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \left\{ \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right\} + \mathbf{g}, \quad (2.2.2)$$

状態方程式

$$p = \rho(p, T) \quad (2.2.3)$$

熱力学における拡散方程式

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)C = \kappa \nabla^2 C, \quad (2.2.4)$$

の4つである.

ここで, 以下の表記を用いている:

- \mathbf{u} 速度ベクトル,
- ρ 密度,
- p 圧力,
- T 温度,
- C 構成物質の状態変数 (温度, 濃度など),
- ν 動粘性係数,
- \mathbf{g} 重力ベクトル,
- κ 拡散係数

条件としてブシネスク近似を考える. ブシネスク近似とは考える流体を非圧縮とするが, 浮力を生み出す熱膨張だけは認める近似法である. 密度の変化はとても小さいものと考えするため, ρ は定数部分 ρ_0 と, そこからのずれ ρ' の和として

$$\rho = \rho_0 + \rho' \quad (2.2.5)$$

と表現する. これを連続の式 (2.2.1) に代入することにより第一項と第二項はとても小さくなるので無視できる. すると (2.2.1) は

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.2.6)$$

となる.

次に圧力を密度 ρ_0 に対する静水圧 $p_0(z)$ とそこからのずれ p' との和として表すと

$$p = p_0(z) + p', \quad (2.2.7)$$

$$\frac{dp_0(z)}{dz} = -\rho_0 g \quad (2.2.8)$$

と書くことができる.

ここで、鉛直方向のベクトルを \mathbf{k} とおくことによって

$$\mathbf{g} = -g\mathbf{k} \quad (2.2.9)$$

とし、(2.2.5), (2.2.6), (2.2.7) をナビエ - ストークスの式 (2.2.2) に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \nabla(p_0(z) + p') + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} \\ &= -\frac{1}{\rho_0(1 + \rho'/\rho_0)} \nabla(p_0(z) + p') + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} \\ &\simeq -\frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0}\right) \nabla(p_0(z) + p') + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} \\ &\simeq -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_0(z) + \frac{\rho'}{\rho_0^2} \nabla p_0(z) - \frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} \quad (2.2.10) \\ &= \left\{ -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0(z)}{\partial z} + \frac{\rho'}{\rho_0^2} \frac{\partial p_0(z)}{\partial z} \right\} \mathbf{k} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} \\ &= -\mathbf{g} + \frac{\rho'}{\rho_0} \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} \\ &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\rho'}{\rho_0} \mathbf{g} \end{aligned}$$

と近似できる*1.

ここでこの節で導出したブシネスク近似における基礎方程式系をまとめると

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.2.12)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\rho'}{\rho_0} \mathbf{g}, \quad (2.2.13)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) C = \kappa \nabla^2 C, \quad (2.2.14)$$

となる.

2.3 二重拡散対流対流に関する方程式の導出

前節ではブシネスク近似における基礎方程式系を導出した. この節ではその方程式をさらに変形し、二重拡散対流に関する支配方程式を導出する.

*1式変換の途中で

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^{-1} \simeq \left(1 - \frac{a}{b}\right) \quad (2.2.11)$$

という近似を用いた

まず前節では議論しなかった拡散方程式について、二重拡散対流では構成物質を温度と塩分とする。このとき、支配方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.3.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\rho'}{\rho_0} \mathbf{g}, \quad (2.3.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \kappa \nabla^2 T, \quad (2.3.3)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) S = \kappa_S \nabla^2 S \quad (2.3.4)$$

である。 κ は熱に関する拡散係数、 κ_S は塩分に関する拡散係数である。以上の式に関して変形を行っていく。

ここで水平鉛直二次元 (x, z) 系と仮定する。各変数 $\mathbf{u} = (u, w)$, T , S を水平方向に一様で定常な基本場とそれからのずれに分けて考える。ここでいう基本場は静水圧状態を考えるので、 \mathbf{u} の基本場を \mathbf{u}_0 とすると

$$\mathbf{u}_0 = 0 \quad (2.3.5)$$

となるので、 \mathbf{u} は基本場からのずれを \mathbf{u}' として

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' \quad (2.3.6)$$

とできる。

次に温度の基本場を T_0 , そこからのずれを T' とすると

$$T = T_0 + T' \quad (2.3.7)$$

とできる。また (2.3.3) より

$$\kappa \frac{d^2 T_0}{dz^2} = 0 \quad (2.3.8)$$

である。塩分についても同様に基本場を S とそれからのずれを S' とすると

$$S = S_0 + S'. \quad (2.3.9)$$

また (2.3.4) より

$$\kappa_S \frac{d^2 S_0}{dz^2} = 0 \quad (2.3.10)$$

である。

基本場からのずれが従う方程式系は成分表示すると (2.3.1), (2.3.2) より

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \quad (2.3.11)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{\partial u'}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \nabla^2 u', \quad (2.3.12)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + u' \frac{\partial w'}{\partial x} + w' \frac{\partial w'}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \nabla^2 w' - \frac{\rho'}{\rho_0} g. \quad (2.3.13)$$

z 方向の運動方程式の右辺最終項の変形を考える. ここであらためて状態方程式 (2.2.3) を

$$p = \rho(p, T, S) \quad (2.3.14)$$

と定義すると ρ は p, T と S の関数であるので

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{T,S} dp + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p,S} dT + \left(\frac{\partial \rho}{\partial S} \right)_{T,p} dS \quad (2.3.15)$$

となる. ここで体積の熱膨張率^{*2}を α とすると

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{p,S} = \rho \left(\frac{\partial}{\partial T} \frac{1}{\rho} \right)_{p,S} \\ &= \rho \left(-\frac{1}{\rho^2} \right) \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p,S} \\ &= -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p,S} \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

したがって

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p,S} = -\alpha \rho \quad (2.3.17)$$

と書けるので, (2.3.15) は

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{T,S} dp - \alpha \rho dT + \left(\frac{\partial \rho}{\partial S} \right)_{p,T} ds \quad (2.3.18)$$

となる. (2.3.18) の右辺一項目について考える. ここで音速を c , エントロピーを Θ とすると

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\Theta}} \quad (2.3.19)$$

^{*2}温度がセ氏 1 ° 上がったときの体積の変化量と元の体積の比

という関係があることに注意する.

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T &= \frac{\partial(\rho, T)}{\partial(p, T)} \frac{\partial(\rho, \Theta)}{\partial(p, \Theta)} \frac{\partial(p, \Theta)}{\partial(\rho, \Theta)} \\
 &= \frac{\partial(\rho, \Theta)}{\partial(p, \Theta)} \frac{\partial(p, \Theta)}{\partial(p, T)} \frac{\partial(\rho, T)}{\partial(\rho, \Theta)} \\
 &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_\Theta \left(\frac{\partial \Theta}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial \Theta}\right)_\rho \\
 &= \frac{1}{c^2} \frac{C_p}{T} \frac{T}{C_V} \\
 &= \frac{1}{c^2} \frac{C_p}{C_V}
 \end{aligned} \tag{2.3.20}$$

現象の変動する速さが音速よりもはるかに遅いときには音速を無限大とみなせるので

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T = 0 \tag{2.3.21}$$

と近似できる. 同様にして塩分についても, 塩分の塩分収縮率を β とすると

$$\begin{aligned}
 \beta &= -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_{p,T} = -\rho \left(\frac{\partial}{\partial S} \frac{1}{\rho}\right)_{p,T} \\
 &= -\rho \left(-\frac{1}{\rho^2}\right) \left(\frac{\partial \rho}{\partial S}\right)_{p,T} \\
 &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial S}\right)_{p,T}
 \end{aligned} \tag{2.3.22}$$

したがって

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial S}\right)_{p,T} = \beta \rho \tag{2.3.23}$$

$$\rho' = \beta \rho_0 S' \tag{2.3.24}$$

と表現できる.

以上より

$$d\rho = -\alpha \rho dT + \beta \rho dS \tag{2.3.25}$$

を得る. 密度変化の小さい状況では上式は

$$\rho' = \rho_0(-\alpha T' + \beta S') \tag{2.3.26}$$

と表される.

これより (2.3.12), (2.3.13) は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u, \quad (2.3.27)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w + g(\alpha T - \beta S), \quad (2.3.28)$$

と変形された. ここで見やすさのために未知変数の ' はすべて省略した.

(2.3.27), (2.3.28) 内の p をこれらの式から消去しておく. (2.3.27) を z で偏微分したものと (2.3.28) を x で偏微分したものととの差をとる. まず (2.3.27) を z で偏微分したものは

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial z} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} + w \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} + \nu \nabla^2 \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.3.29)$$

となり, 次に (2.3.28) を x で偏微分したものは

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + u \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} + \nu \nabla^2 \frac{\partial w}{\partial x} \\ &+ g \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x} - \beta \frac{\partial S}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.3.30)$$

となる. (2.3.29) と (2.3.30) との差をとることにより

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + w \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ = \nu \nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - g \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x} - \beta \frac{\partial S}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.3.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + w \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ = \nu \nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - g \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x} - \beta \frac{\partial S}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

を得る. 連続の式 (2.3.11) を代入することにより, 左辺最終項は消えて

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + w \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ = \nu \nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - g \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x} - \beta \frac{\partial S}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

となる. さらにここで渦度の y 成分 ζ ,

$$\zeta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.3.33)$$

を導入することにより, ナビエ - ストークス方程式は

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \nu \nabla^2 \zeta - g \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x} - \beta \frac{\partial S}{\partial x} \right) \quad (2.3.34)$$

と書ける.

温度に関する拡散の式 (2.3.3) は (2.3.7), (2.3.8) を代入することによって

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (T_0 + T') + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(T_0 + T') &= \kappa \nabla^2 (T_0 + T'), \\ \frac{\partial T'}{\partial t} + \left(u \frac{\partial T_0}{\partial x} + w \frac{\partial T_0}{\partial z} \right) + \left(u \frac{\partial T'}{\partial x} + w \frac{\partial T'}{\partial z} \right) &= \kappa \frac{d^2 T_0}{dz^2} + \kappa \nabla^2 T', \\ \frac{\partial T'}{\partial t} + u \frac{\partial T'}{\partial x} + w \frac{\partial T'}{\partial z} + w \frac{\partial T_0}{\partial z} &= \kappa \nabla^2 T' \end{aligned} \quad (2.3.35)$$

とできる. 塩分に関する拡散の式 (2.3.4) も同様にして (2.3.9), (2.3.10) を代入することにより

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (S_0 + S') + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(S_0 + S') &= \kappa_S \nabla^2 (S_0 + S'), \\ \frac{\partial S'}{\partial t} + \left(u \frac{\partial S_0}{\partial x} + w \frac{\partial S_0}{\partial z} \right) + \left(u \frac{\partial S'}{\partial x} + w \frac{\partial S'}{\partial z} \right) &= \kappa_S \frac{d^2 S_0}{dz^2} + \kappa_S \nabla^2 S', \\ \frac{\partial S'}{\partial t} + u \frac{\partial S'}{\partial x} + w \frac{\partial S'}{\partial z} + w \frac{\partial S_0}{\partial z} &= \kappa_S \nabla^2 S' \end{aligned} \quad (2.3.36)$$

と変形できる. 温度の基本場 T_0 の上から下に向かう温度勾配を $\frac{\Delta T}{d}$ とすると

$$\frac{dT_0}{dz} = -\frac{\Delta T}{d} \quad (2.3.37)$$

と置き換えることができる. 同様に, 塩分の基本場 S_0 も上から下に向かう方向の塩分勾配を $\frac{\Delta S}{d}$ とすると

$$\frac{dS_0}{dz} = -\frac{\Delta S}{d} \quad (2.3.38)$$

とおく. ゆえに (2.3.35), (2.3.36) は

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\Delta T}{d} w = \kappa \nabla^2 T, \quad (2.3.39)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + w \frac{\partial S}{\partial z} - \frac{\Delta S}{d} w = \kappa_S \nabla^2 S \quad (2.3.40)$$

となる. ここで見やすさのために未知変数の ' は全て省略した.

ここまですをまとめると

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.3.41)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \nu \nabla^2 \zeta - g \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x} - \beta \frac{\partial S}{\partial x} \right), \quad (2.3.42)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\Delta T}{d} w = \kappa \nabla^2 T, \quad (2.3.43)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + w \frac{\partial S}{\partial z} - \frac{\Delta S}{d} w = \kappa_S \nabla^2 S \quad (2.3.44)$$

となる. 第 1 式は連続の式, 第 2 式は渦度方程式, 第 3 式は温度に関する拡散の式, 第 4 式は塩分に関する拡散の式となっている.

連続の式 (2.3.41) より

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2.3.45)$$

を満たす流線関数 Ψ を定義する^{*3}. ここで渦度の y 成分と流線関数の関係を求めると

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \nabla^2 \Psi \end{aligned} \quad (2.3.46)$$

となり, つまり

$$\zeta = \nabla^2 \Psi \quad (2.3.47)$$

である.

^{*3}定義した流線関数を連続の式 (2.3.41) に代入することにより確認する.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} = 0$$

これより定義した流線関数は連続の式 (2.3.41) を満たしていると確認した.

これらを用いて基礎方程式を表すと

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right) \nabla^2 \Psi = \nu \nabla^2 \cdot \nabla^2 \Psi - g \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x} - \beta \frac{\partial S}{\partial x} \right), \quad (2.3.48)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\Delta T}{d} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \kappa \nabla^2 T, \quad (2.3.49)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial z} + \frac{\Delta S}{d} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \kappa_S \nabla^2 S, \quad (2.3.50)$$

となり、変数は Ψ, T, S の 3 つであり、方程式も 3 つあるので方程式系は閉じていて解を一意に求めることができる。

(2.3.48)~(2.3.50) を無次元化する。無次元変数を次のように導入する。無次元化した後の数値を * 付きで表現する。

$$\begin{aligned} x &= dx^* && x \text{ 方向の距離,} \\ z &= dz^* && z \text{ 方向の距離,} \\ \mathbf{v} &= \frac{\kappa}{d} \mathbf{v}^* && \text{速度ベクトル,} \\ t &= \frac{d^2}{\kappa} t^* && \text{時間,} \\ \nabla &= \frac{1}{d} \nabla^*, \\ \Psi &= \kappa \Psi^* && \text{流線関数,} \\ \zeta &= \frac{\kappa}{d^2} \zeta^* && \text{渦度,} \\ T &= \Delta T T^* && \text{温度,} \\ S &= \Delta S S^* && \text{塩分} \end{aligned}$$

これらを用いて基礎方程式を無次元化する。

渦度方程式 (2.3.48) は以下の様に無次元化される。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\kappa^2}{d^4} \frac{\partial}{\partial t^*} + \frac{\kappa^2}{d^4} \frac{\partial \Psi^*}{\partial z^*} \frac{\partial}{\partial x^*} - \frac{\kappa^2}{d^4} \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \nabla^{*2} \Psi^* \\ &= - \frac{\kappa \nu}{d^4} \nabla^{*2} \cdot \nabla^{*2} \Psi^* - g \left(\frac{\alpha \Delta T}{d} \frac{\partial T^*}{\partial x^*} - \frac{\beta \Delta S}{d} \frac{\partial S^*}{\partial x^*} \right) \\ & \left(\frac{\partial}{\partial t^*} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial z^*} \frac{\partial}{\partial x^*} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \nabla^{*2} \Psi^* \\ &= \frac{\nu}{\kappa} \nabla^{*2} \cdot \nabla^{*2} \Psi^* - \frac{\alpha g \Delta T d^3}{\kappa^2} \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + \frac{\beta g \Delta S d^3}{\kappa^2} \frac{\partial S^*}{\partial x^*}. \end{aligned} \quad (2.3.51)$$

ここで温度に関する Rayleigh 数を Ra , 塩分に関する Rayleigh 数を Rs , Prandtl

数を Pr とする.

$$Ra = \frac{\alpha g \Delta T d^3}{\kappa \nu}, \quad (2.3.52)$$

$$Rs = \frac{\beta g \Delta S d^3}{\kappa \nu}, \quad (2.3.53)$$

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}. \quad (2.3.54)$$

よって (2.3.51) は

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t^*} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial z^*} \frac{\partial}{\partial x^*} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \nabla^{*2} \Psi^* \\ & = Pr \nabla^{*2} \cdot \nabla^{*2} \Psi^* - Pr Ra \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + Pr Rs \frac{\partial S^*}{\partial x^*} \end{aligned} \quad (2.3.55)$$

となる.

温度に関する拡散方程式 (2.3.49) は以下のように無次元化される.

$$\begin{aligned} \Delta T \frac{\kappa}{d^2} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \Delta T \frac{\kappa}{d^2} \frac{\partial \Psi^*}{\partial z^*} \frac{\partial T^*}{\partial x^*} - \Delta T \frac{\kappa}{d^2} \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial T^*}{\partial z^*} + \frac{\kappa \Delta T}{d} \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} &= \Delta T \frac{\kappa}{d^2} \nabla^{*2} T^* \\ \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial z^*} \frac{\partial T^*}{\partial x^*} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial T^*}{\partial z^*} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} &= \nabla^{*2} T^*. \end{aligned} \quad (2.3.56)$$

塩分に関する拡散方程式 (2.3.50) は以下のように無次元化される.

$$\begin{aligned} \Delta S \frac{\kappa}{d^2} \frac{\partial S^*}{\partial t^*} + \Delta S \frac{\kappa}{d^2} \frac{\partial \Psi^*}{\partial z^*} \frac{\partial S^*}{\partial x^*} - \Delta S \frac{\kappa}{d^2} \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial S^*}{\partial z^*} + \frac{\kappa \Delta S}{d} \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} &= \Delta S \frac{\kappa_S}{d^2} \nabla^{*2} S^* \\ \frac{\partial S^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial z^*} \frac{\partial S^*}{\partial x^*} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial S^*}{\partial z^*} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} &= \frac{\kappa_S}{\kappa} \nabla^{*2} S^*. \end{aligned} \quad (2.3.57)$$

ここで拡散係数の比を τ を

$$\tau = \frac{\kappa_S}{\kappa} \quad (2.3.58)$$

とすると

$$\frac{\partial S^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial z^*} \frac{\partial S^*}{\partial x^*} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial S^*}{\partial z^*} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial S_0}{\partial z} = \tau \nabla^{*2} S^* \quad (2.3.59)$$

と変形される.

流線関数と渦度の y 成分との関係 (2.3.47) に関しても無次元化する.

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{d^2} \zeta^* &= \frac{\kappa}{d^2} \nabla^{*2} \Psi \\ \zeta &= \nabla^2 \Psi. \end{aligned} \quad (2.3.60)$$

ここまでの結果をまとめる:

渦度方程式:

$$\left\{ \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right) - \nabla^2 \right\} \nabla^2 \Psi = -Ra \frac{\partial T}{\partial x} + Rs \frac{\partial S}{\partial x}. \quad (2.3.61)$$

温度に関する拡散方程式:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) T + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (2.3.62)$$

塩分に関する拡散方程式:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \tau \nabla^2 \right) S + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial z} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (2.3.63)$$

流線関数と渦度の y 成分との関係:

$$\zeta = \nabla^2 \Psi. \quad (2.3.64)$$

ここで式を見やすくするために * を省略した. 今後の式に関しても * を省略する.

第 3 章 線形安定性解析

ここでは前の章で導出した二重拡散対流に関する支配方程式系を線形化し、その後 Ra , Rs の 2 つのパラメータに依存する流体運動の成長率に関する式を導出する。次に、対流の発生する臨界的な Ra や Rs を調べ、さらに対流が発生する場合にはどのような挙動を示すのかを考察する。

3.1 定式化

(2.3.61), (2.3.62), (2.3.63) の非線形項を除き、式を線形化すると

$$\left(\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right) \nabla^2 \Psi = -Ra \frac{\partial T}{\partial x} + Rs \frac{\partial S}{\partial x}, \quad (3.1.1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right) T = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (3.1.2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \tau \nabla^2\right) S = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (3.1.3)$$

となる。これが解くべき方程式である。

(3.1.1)~(3.1.3) を Ψ についての方程式にするために、(3.1.1) に $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right)$ と $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \tau \nabla^2\right)$ を演算し、その後に (3.1.2) と (3.1.3) を代入することによって T , S を消去すると

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \tau \nabla^2\right) \nabla^2 \Psi \\ & = \left\{ Ra \left(\frac{\partial}{\partial t} - \tau \nabla^2\right) - Rs \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right) \right\} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

となる。

境界条件は上下の境界 ($z = 0, 1$) で温度, 塩分は一定であるとする.

$$T = S = 0 \quad z = 0, 1 \quad (3.1.5)$$

この二重拡散対流では粘性を持った流体を考えていて, 粘性を持った流体においては物体表面上での物体に対する流体の相対速度は 0 となる. 今, 上下の境界は固定壁と考えているので, 境界表面上での流体の水平速度は

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0 \quad z = 0, 1 \quad (3.1.6)$$

となる. また固定壁を貫く流れはない. よって境界表面上での鉛直速度は

$$w = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \quad z = 0, 1 \quad (3.1.7)$$

とできる. ゆえに上下の境界では

$$\Psi = \text{定数} \quad z = 0, 1 \quad (3.1.8)$$

を満たす必要があり, ここでは

$$\Psi = 0 \quad z = 0, 1 \quad (3.1.9)$$

と境界条件を定めることとする. このように考えることにより, 解となる未知変数は

$$\Psi(x, z, t) = e^{\sigma t} \sin \pi a x \sin \pi n z, \quad (3.1.10)$$

$$T(x, z, t) = e^{\sigma t} \cos \pi a x \sin \pi n z, \quad (3.1.11)$$

$$S(x, z, t) = e^{\sigma t} \cos \pi a x \sin \pi n z, \quad (3.1.12)$$

と表現される. ここで σ は複素数, a は実数, n は整数である.

(3.1.4) に (3.1.10), (3.1.11), (3.1.12) を代入する. 左辺に代入することによって

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \tau \nabla^2 \right) \nabla^2 \Psi \\ &= -k^2 \left\{ \frac{\sigma^3}{Pr} + \left(1 + \frac{1+\tau}{Pr} \right) k^2 \sigma^2 + \left(1 + \tau + \frac{\tau}{Pr} \right) k^4 \sigma + \tau k^6 \right\} e^{\sigma t} \sin \pi a x \sin \pi n z. \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

また右辺に代入することによって

$$\begin{aligned} & \left\{ Ra \left(\frac{\partial}{\partial t} - \tau \nabla^2 \right) - Rs \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \right\} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \\ &= \left\{ -Ra \pi^2 a^2 (\sigma + \tau k^2) + Rs \pi^2 a^2 (\sigma + k^2) \right\} e^{\sigma t} \sin \pi a x \sin \pi n z. \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

(3.1.13), (3.1.14) より (3.1.4) は

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^3}{Pr} + \left(1 + \frac{1+\tau}{Pr}\right) k^2 \sigma^2 + \left\{ \left(\frac{\tau}{Pr} + \tau + 1\right) k^4 - (Ra - Rs) \frac{\pi^2 a^2}{k^2} \right\} \sigma \\ + \tau k^6 + (Rs - \tau Ra) \pi^2 a^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

となる分散関係式が得られる. 上では全波数として

$$k^2 = \pi^2 (a^2 + n^2) \quad (3.1.16)$$

と定義した. ここで

$$\sigma = k^2 q \quad (3.1.17)$$

とおくことにより (3.1.15) は

$$\begin{aligned} \frac{k^6 q^3}{Pr} + \left(1 + \frac{1+\tau}{Pr}\right) k^6 q^2 + \left\{ \left(\frac{\tau}{Pr} + \tau + 1\right) k^4 - (Ra - Rs) \frac{\pi^2 a^2}{k^2} \right\} k^2 q \\ + \tau k^6 + (Rs - \tau Ra) \pi^2 a^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

となるので, 両辺を k^6 で割り, さらに Pr をかけて整理すると

$$\begin{aligned} q^3 + (Pr + \tau + 1) q^2 + \left\{ (Pr + Pr\tau + \tau) - Pr(Ra - Rs) \frac{\pi^2 a^2}{k^6} \right\} q \\ + Pr\tau + Pr(Rs - \tau Ra) \frac{\pi^2 a^2}{k^6} = 0 \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

を得る. Ra, Rs を新たに

$$Ra' = \frac{\pi^2 a^2}{k^6} Ra, \quad (3.1.20)$$

$$Rs' = \frac{\pi^2 a^2}{k^6} Rs \quad (3.1.21)$$

とすると (3.1.19) は

$$\begin{aligned} q^3 + (Pr + \tau + 1) q^2 + \{(Pr + Pr\tau + \tau) - Pr(Ra' - Rs')\} q \\ + Pr\tau + Pr(Rs' - \tau Ra') = 0 \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

となる. これは Ra', Rs' の 2 つのパラメータが与えられたとき q を求める 3 次方程式である. この式に関して考察をしていくことにより, Ra', Rs' に対する対流運動の依存性を調べることができる.

3.2 考察

(3.1.22) において, Ra' , Rs' の 2 つのパラメータに対して解 q がどのような値をとるかを考察することにより, 解 (3.1.10)~(3.1.12) がどのような挙動を示すのかを分類する. この結果は Ra' , Rs' に依存するので, $Ra' - Rs'$ 平面を考えることにより表現できる. 分類する手順としては, まず対流が発生する臨界的な Ra' , Rs' を調べ, $Ra' - Rs'$ 平面上を対流が発生しない領域 (以下, 安定領域と名付ける.) と対流が発生する領域 (以下, 不安定領域と名付ける.) に分ける. その後, 不安定領域を流体の挙動によって分ける. 以上のようにして q の Ra' , Rs' 依存性を示したのが下図 3.2.1 である.

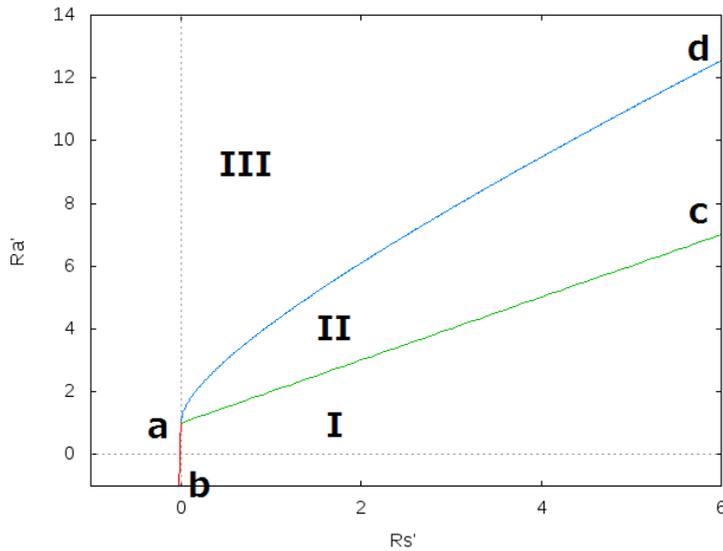


図 3.2.1: Ra' , Rs' 依存性

それぞれの領域で解 (3.1.10)~(3.1.12) がどのような挙動を示すのかを説明する.

- 領域 I: 安定領域. (3.1.22) の解は実部の符号が負になる領域. すなわちこの領域では擾乱は成長せず, 安定である
- 領域 II: 不安定領域. (3.1.22) の解には実部の符号が正となる解が少なくとも 1 つは存在する領域. さらに解は実数解 1 つと複素共役な虚数解が 1 組となる. すなわちこの領域では擾乱は振動しながら指数関数的に増幅していく.
- 領域 III: 不安定領域. (3.1.22) の解には実部の符号が正となる解が少なくとも 1 つは存在する領域. さらに解は実数解 3 つとなる. すなわちこの領域では擾乱は指数関数的に増幅していく

以下, どのようにして図 (3.2.1) のように領域が分けられたかを述べる. (3.1.22) 式の左辺を $f(q)$ とする. つまり

$$f(q) = q^3 + (Pr + \tau + 1)q^2 + \{(Pr + Pr\tau + \tau) - Pr(Ra' - Rs')\}q + Pr\tau + Pr(Rs' - \tau Ra') \quad (3.2.1)$$

と定義する. ここで $f(q)$ は q^3 の項の符号が正である 3 次方程式であるので, グラフの概形は下の図の様になる.

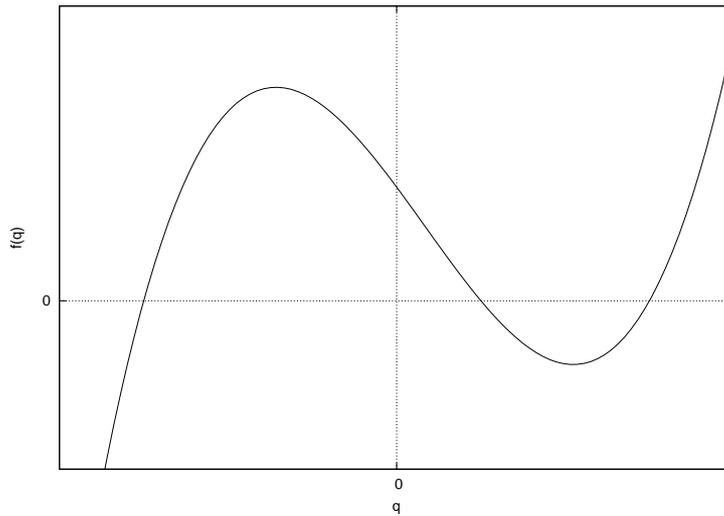


図 3.2.2: (3.2.1) の概形

解の分類としては, まず解が正なのか負なのかを調べる. その後に解が正である領域, つまり不安定領域において解は実数解が 3 つとなるのか, 実数解が 1 つと複素共役解が 1 組となるのかを分ける.

まず, $Ra' - Rs'$ 平面において解の実部が正になる領域, 負になる領域を調べる. これを知ることにより, 前の節で設定した解 (3.1.10)~(3.1.12) が安定な解なのか, 不安定な解なのかを知ることができる. ここでは全ての解の実部が負になる領域と, 少なくとも 1 つは実部が正となる解が存在する領域の境目, つまり安定領域と不安定領域の境目を求める. 図 (3.2.2) において, $q = 0$ においてのグラフの値 (切片) が 0, 傾きが 0, さらに傾きの変化率が正である状況. これが安定領域と不安定領域の境目である. つまり

$$f(0) = 0, \quad (3.2.2)$$

$$f'(0) = 0, \quad (3.2.3)$$

$$f''(0) \geq 0 \quad (3.2.4)$$

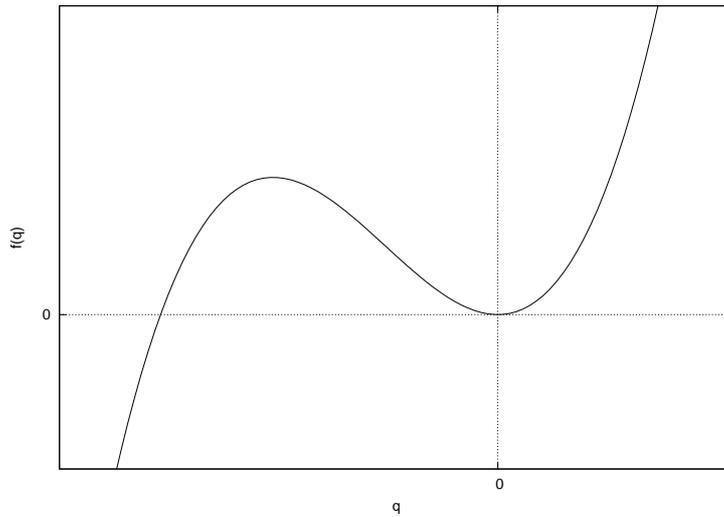


図 3.2.3: 解の実部が正になるか負になるかの境目

の条件が全て満たされる Ra' , Rs' を満たす場所が安定領域と不安定領域の境目である. ここで

$$Pr = 10.0, \tag{3.2.5}$$

$$\tau = 0.01 \tag{3.2.6}$$

と指定する. よって具体的には (3.2.2) より

$$\begin{aligned} Pr\tau + Pr(Rs' - \tau Ra') &= 0 \\ Ra' &= \frac{1}{\tau}Rs' + 1 \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

となる. これが示すのは図 (3.2.1) 中の直線 ab であり, この直線以上は不安定な領域となる可能性があり, 以下は安定な領域となる可能性がある. 次に (3.2.3) より

$$\begin{aligned} Pr + Pr\tau + \tau - Pr(Ra' - Rs') &\geq 0 \\ Ra' &\leq Rs + 1 + \tau + \frac{\tau}{Pr} \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

となる. これが示すのは図 (3.2.1) 中の直線 ac である. この直線以上は不安定な領域となる可能性があり, 以下は安定な領域となる可能性がある. さらに (3.2.4) より

$$2(Pr + \tau + 1) \geq 0. \tag{3.2.9}$$

これは明らかに成り立っている. 上で述べたように, 求められる全ての解の実部が負になる条件は (3.2.2) かつ (3.2.3) かつ (3.2.4) であるので, 求める条件は

$$\begin{aligned} Ra' &\leq \frac{1}{\tau}Rs' + 1 \\ Ra' &\leq Rs + 1 + \tau + \frac{\tau}{Pr} \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

である. これが示す領域を図 (3.2.1) で領域 I と示した. ここでは全ての q の実部は負となり, すなわち 前の節で示した解 (3.1.10)~(3.1.12) は成長せず, 解は安定となる. 逆に考えると, この領域 I 以外の領域では, 実部が正である解が少なくとも 1 つは存在し, 解は不安定になり, 擾乱は成長すると考えられる.

次に, 上で求めた安定領域以外の領域, すなわち不安定領域における解 q の挙動を調べる. これは解が 3 つの実数解になるのか, 1 つの実数解と 2 つの虚数解 (複素共役解) になるのかの境界を考える. これを調べる理由としては, 解 q に虚数解が含まれるか否かにより, 解の挙動が変わってくるからである. この境目は $f(q)$ が図 (3.2.4) のようになっている状態が境目である.

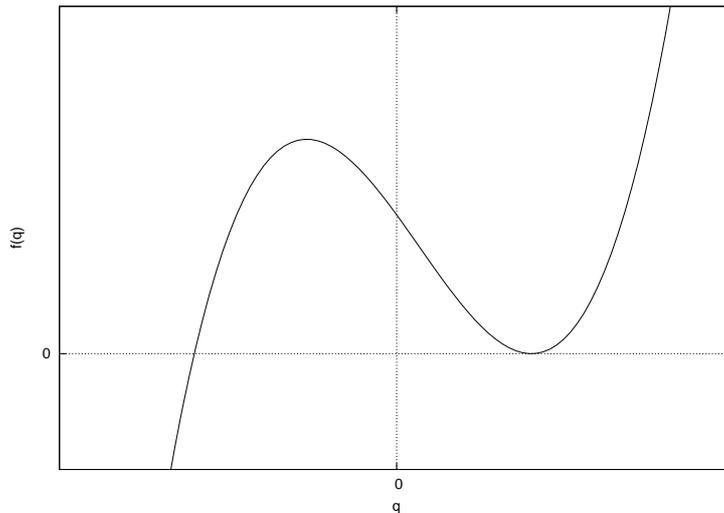


図 3.2.4: 解が 3 つの実数解になるのか, 1 つの実数解と 2 つの虚数解 (共役複素解) になるのかの境界を表す条件の $f(q)$

言い換えれば

$$f(q) = 0, \tag{3.2.11}$$

$$f'(q) = 0 \tag{3.2.12}$$

を満たす q が存在するような (Ra', Rs') の関係がその境目である. (3.2.11) より

$$q^3 + (Pr + \tau + 1)q^2 + \{Pr + Pr\tau + \tau - Pr(Ra' - Rs')\}q + Pr\tau + Pr(Rs' - \tau Ra') = 0. \quad (3.2.13)$$

また (3.2.12) より

$$3q^2 + 2(Pr + \tau + 1)q + Pr + Pr\tau + \tau - Pr(Ra' - Rs') = 0. \quad (3.2.14)$$

(3.2.14) に q をかけたものから (3.2.13) を引くことによって

$$2q^3 + (Pr + \tau + 1)q^2 - Pr(\tau + Rs' - \tau Ra') = 0 \quad (3.2.15)$$

が得られる. ここで (3.2.14), (3.2.15) より

$$q^2 + \frac{2}{3}(Pr + \tau + 1)q + \frac{1}{3}\{Pr + Pr\tau + \tau - Pr(Ra' - Rs')\} = 0, \quad (3.2.16)$$

$$q^3 + \frac{1}{2}(Pr + \tau + 1)q^2 + \frac{1}{2}\{-Pr\tau - Pr(Rs' - \tau Ra')\} = 0 \quad (3.2.17)$$

となり,

$$\begin{aligned} a &= \frac{2}{3}(Pr + \tau + 1), \\ b &= \frac{1}{3}\{Pr + Pr\tau + \tau - Pr(Ra' - Rs')\}, \\ c &= \frac{1}{2}(Pr + \tau + 1), \\ d &= \frac{1}{2}\{-Pr\tau - Pr(Rs' - \tau Ra')\}, \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

と置くことにより

$$q^2 + aq + b = 0, \quad (3.2.19)$$

$$q^3 + cq^2 + d = 0 \quad (3.2.20)$$

と書く. (3.2.20) を (3.2.19) を因数に含むように変形すると

$$\begin{aligned} & q^3 + cq^2 + d \\ &= (q^2 + aq + b)\{q + (c - a)\} - \{b + a(c - a)\}q + d - b(c - a) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

となることから

$$-\{b + a(c - a)\}q + \{d - b(c - a)\} = 0 \quad (3.2.22)$$

の関係が得られる. (3.2.19), (3.2.22) から q を消去することによって

$$b^3 - \frac{3}{16}a^2b^2 + \frac{3}{2}abd + (d^2 - \frac{1}{4}a^3d) = 0 \quad (3.2.23)$$

となる*1. (3.2.23) に再び (3.2.18) で置いた a, b, c, d , 具体的な Pr, τ を代入することにより, Ra' と Rs' の関係式

$$\begin{aligned} f(Ra'Rs') &= -37.037Ra'^3 + 37.037Rs'^3 + 111.111Ra'^2Rs' - 111.111Ra'Rs'^2 \\ &\quad - 1.740Ra'^2 - 158.40Rs'^2 + 184.65Ra'Rs' \\ &\quad + 112.124Ra' + 194.073Rs' - 73.361 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

が得られる. これを満たす Ra, Rs の式が, 解が 3 つの実数解になるのか 1 つの実数解と 2 つの虚数解 (複素共役解) になるのかの境目を表す. Rs' を固定し, ニュートン法を用いて Ra' を求めることにより, 求めたい境目の曲線を示す. ただここでは正の q が存在する場合, すなわち与えた擾乱が成長する場合の Ra', Rs' を求めている. その範囲*2における Ra' と Rs' を $Ra' - Rs'$ 平面にプロットすることによって, 図 3.2.1 で示すところの曲線 ad が得られる. 領域 II では (3.1.22) の解は実数解が 1 つと虚数解が 2 つ存在し, すなわち解は振動解となる. 領域 III では (3.1.22) の解は実数解 3 つ存在し, すなわち解は振動しない. さらに前で議論したように, これらの領域では実部が正の q が少なくとも 1 つは存在することがわかっているので, 領域 II では擾乱が振動しながら指数関数的に増幅する流体運動が生じ, 領域 III では, 擾乱が単調に指数関数的に増幅していく流体運動が生じることが示される. .

*1この導出に関しては付録 B 参照.

*2付録 C 参照

第 4 章 数値計算

この章では 2 章で導出した二重拡散対流の支配方程式系を数値的に解くことを考える。そして第 3 章で議論された線形安定性解析との比較により、線形安定性解析の有効範囲について議論する。

4.1 スペクトル法の概略

一般的な数値計算を行うにあたって代表的な離散化法は差分法による離散化、関数展開による離散化の 2 つがある。本研究の数値計算においては関数展開による離散化を用いてスペクトル法を用いる。

差分法では実空間に $n-1$ 個の等間隔に置かれた点 x_j ($j = 1, 2, \dots, n-1$) を導入して空間を有限個に離散化するが、スペクトル法では速度 $u(x, t)$ を $n-1$ 個の独立な関数 ϕ_k ($k = 1, 2, \dots, n-1$) を導入して

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k(t) \phi_k(x) \quad (4.1.1)$$

と離散化することを考える。展開関数 $\phi_k(x)$ は境界条件を満たすように自分で選択しておくものとする。展開関数 $a_k(t)$ を求めるには選定法と重み付き残差法があるが、ここでは重み付き残差法を用いることとする。

重み付き残差法の理解のために、直感的に理解しやすい具体的な問題の例として

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -c \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \text{初期条件} : u(x, 0) &= f(x), \\ \text{境界条件} : u(x, t) &= u(x + 2\pi, t) \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

という偏微分方程式を重み付き残差法で解くことを考えていく。(4.1.2) の解は解

析的に解くことができ、解は

$$u(x, t) = f(x - ct) \quad (4.1.3)$$

となり、1次元移流方程式と呼ばれる。

(4.1.2) の残差を $R(x, t)$ として

$$R(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.1.4)$$

のように定める。ここで $n - 1$ 個の独立な重み関数

$$W_{k'}(x) \quad (k' = 0, 1, 2, \dots, n - 1) \quad (4.1.5)$$

を考え、残差 $R(x, t)$ に重み関数をかけて、 x に関して全領域にわたり積分したものが 0 になることを求める。つまり

$$\int_0^1 W_{k'} R(x, t) dx = 0 \quad (k' = 0, 1, 2, \dots, n - 1) \quad (4.1.6)$$

となることを求める。(4.1.4) に適用させると

$$\int_0^1 W_{k'} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = 0 \quad (4.1.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \int_0^1 W_{k'} dx = -c \int_0^1 W_{k'} \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (4.1.8)$$

また (4.1.1) のように $u(x, t)$ は展開できるので

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{da_k(t)}{dt} \int_0^1 \phi_k(x) W_{k'} dx = -c \sum_{k=1}^{n-1} a_k(t) \int_0^1 \frac{d\phi_k(x)}{dx} W_{k'} dx \quad (4.1.9)$$

となる。この式において境界条件を満たすような展開関数 $\phi_k(x)$ 、また重み関数 $W_{k'}$ を導入することによって k によって展開された速度 $u_k(t)$ の時間発展に関する式を得ることができ、時間発展することができる。この方法は偏微分方程式の残差に重み関数をかけたものが 0 となるように求めることから、重み付き残差法と呼ばれる。

重み付き残差法において、重み関数は通常 $\phi_k(x)$ と同じ系列にとったものが使われる。このように重み関数を定めたものをガラーキンス法と呼ぶ。さらに展開関数 $\phi_k(x)$ を境界条件を満たすような滑らかな直交関数形を用いたものをガラーキンスペクトル法と呼ぶ。このガラーキンスペクトル法は単にスペクトル法とも呼ばれ、展開関数に滑らかな関数形を用いることにより、差分法のように差分近似に伴う誤差が生じないなど (詳しく書く?) の差分法に比べての長所がある。

(4.1.9) において解を得るためには展開関数を境界条件に合うように選択する必要があるが、ここでは周期境界条件を考慮してフーリエ級数を用いることとする。 $\phi_k(x)$ を

$$\phi_k(x) = e^{ikx} \quad (4.1.10)$$

と選択し、 $u(x, t)$ が

$$u(x, t) = \sum_{k=-n}^n \hat{u}_k(t) e^{ikx} \quad (4.1.11)$$

と展開できるものとする。ここで n は切断波数と呼ばれ数値解の解像度を定める定数である。

$\hat{u}_k(x)$ に対する常微分方程式を導くために (4.1.11) を (4.1.4) に代入すると残差 R は

$$R(x, t) = \sum_{k=-n}^n \frac{d\hat{u}_k(t)}{dt} e^{ikx} + ikc \sum_{k=-n}^n \hat{u}_k(t) e^{ikx} \quad (4.1.12)$$

となる。この両辺に重み関数を、展開関数と同じ系列にとったもの (ここでは重み関数を $W_{k'} = e^{-ik'x}$ とする) をかけて 0 から 2π について x 方向に積分すると

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} W_{k'} R(x, t) dx &= \sum_{k=-n}^n \frac{d\hat{u}_k(t)}{dt} \int_0^{2\pi} e^{ikx} W_{k'} dx + ikc \sum_{k=-n}^n \hat{u}_k(t) \int_0^{2\pi} e^{ikx} W_{k'} dx \\ &= 2\pi \left\{ \sum_{k=-n}^n \frac{d\hat{u}_k(t)}{dt} + ikc \sum_{k=-n}^n \hat{u}_k(t) \right\} \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

ここで三角関数の直交性を用いると

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx} e^{-ik'x} dx = \delta_{k,k'} \quad (4.1.14)$$

となり、これを用いた。先に偏微分方程式の残差に重み関数をかけたものが 0 となるように求めることを課したので (4.1.13) の右辺は 0 となり、結果的に常微分方程式

$$\frac{d\hat{u}_k(t)}{dt} + ikc\hat{u}_k(t) = 0 \quad (k = -n, \dots, n) \quad (4.1.15)$$

が得られる。

$\hat{u}_k(t)$ の初期条件 $\hat{u}_k(0)$ は与えられた初期条件をフーリエ変換することにより

$$\hat{u}_k(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{ikx} dx \quad (k = -n, \dots, n) \quad (4.1.16)$$

と得られる.

これにより (4.1.15) のように得られた常微分方程式の解は解析的に得られ

$$\hat{u}_k(t) = \hat{u}_k(0)e^{-ikct} \quad (4.1.17)$$

となる. これを (4.1.11) に代入することによって偏微分方程式のスペクトル法による解は

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=-n}^n \hat{u}_k(t)e^{ikx} \\ &= \sum_{k=-n}^n \hat{u}_k(0)e^{-ikct}e^{ikx} \\ &= \sum_{k=-n}^n \hat{u}_k(0)e^{ik(x-ct)} \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

となる. この解の各モードの x, t に対する依存性はすべて $(x - ct)$ の形になっている. ゆえに各モードが位相速度 c で x の正方向に動くことがわかる. この性質は解析解と同じ性質を維持している.

4.2 切断スペクトル方程式の導出

この節では前節で述べた原理に従って (2.3.61)~(2.3.63) に対する切断スペクトル方程式を求める. 計算領域は x 方向の長さ L_x , z 方向の長さ L_z とした 2 次元領域とする. スペクトル化する際の展開関数としては境界条件を考慮して三角関数を選択し, 切断波数は x 方向に K , y 方向に M としておく. ζ, Ψ, T, S の切断級数

はそれぞれ

$$\zeta(x, z, t) = \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M \hat{\zeta}_{k,m}(t) e^{i2\pi\left(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z\right)}, \quad (4.2.1)$$

$$\Psi(x, z, t) = \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M \hat{\Psi}_{k,m}(t) e^{i2\pi\left(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z\right)}, \quad (4.2.2)$$

$$T(x, z, t) = \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M \hat{T}_{k,m}(t) e^{i2\pi\left(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z\right)}, \quad (4.2.3)$$

$$S(x, z, t) = \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M \hat{S}_{k,m}(t) e^{i2\pi\left(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z\right)} \quad (4.2.4)$$

で表す. (4.2.1)~(4.2.4) の展開関数はそれぞれ

$$\hat{\zeta}_{k,m} = \frac{1}{L_x L_z} \int_0^{L_z} \int_0^{L_x} \zeta_{x,z,t} e^{-i2\pi\left(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z\right)} dx dy, \quad (4.2.5)$$

$$\hat{\Psi}_{k,m} = \frac{1}{L_x L_z} \int_0^{L_z} \int_0^{L_x} \Psi_{x,z,t} e^{-i2\pi\left(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z\right)} dx dy, \quad (4.2.6)$$

$$\hat{T}_{k,m} = \frac{1}{L_x L_z} \int_0^{L_z} \int_0^{L_x} T_{x,z,t} e^{-i2\pi\left(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z\right)} dx dy, \quad (4.2.7)$$

$$\hat{S}_{k,m} = \frac{1}{L_x L_z} \int_0^{L_z} \int_0^{L_x} S_{x,z,t} e^{-i2\pi\left(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z\right)} dx dy \quad (4.2.8)$$

と書ける.

渦度方程式 (2.3.61) を切断スペクトル方程式に変形する. (2.3.61) を ζ の時間発展式として見るために

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -Pr J(\zeta, \Psi) + Pr \nabla^2 \zeta - Pr Ra \frac{\partial T}{\partial x} + Pr Rs \frac{\partial S}{\partial x} \quad (4.2.9)$$

と変形する. ここで

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial z} = J(\zeta, \Psi)$$

と非線形項をヤコビアンを用いて書き直した. 切断級数 (4.2.1) 式を用いて表す. 左辺は

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M \frac{\partial \hat{\zeta}_{k,m}(t)}{\partial t} e^{i2\pi\left(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z\right)}. \quad (4.2.10)$$

右辺第一項目^{*1}は

$$PrJ(\zeta, \Psi) = \sum_{k=-(2K-1)}^{2K-1} \sum_{m=-(2M-1)}^{2M-1} Pr \frac{4\pi^2}{L_x L_z} (k_2 m_1 - k_1 m_2) \hat{\zeta}_{k_1, m_1}(t) \hat{\Psi}_{k_2, m_2}(t) e^{i2\pi \left(\frac{k_1+k_2}{L_x} x + \frac{m_1+m_2}{L_z} z \right)}. \quad (4.2.11)$$

右辺第二項目は

$$Pr\nabla^2 \zeta = - \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M 4\pi^2 Pr \left(\frac{k^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_z^2} \right) \hat{\zeta}_{k,m}(t) e^{i2\pi \left(\frac{k}{L_x} x + \frac{m}{L_z} z \right)}. \quad (4.2.12)$$

右辺第三項は

$$-PrRa \frac{\partial T}{\partial x} = - \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M ikPrRa \frac{2\pi}{L_x} \hat{T}_{k,m}(t) e^{i2\pi \left(\frac{k}{L_x} x + \frac{m}{L_z} z \right)}. \quad (4.2.13)$$

右辺第四項目は

$$PrRs \frac{\partial S}{\partial x} = \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M ikPrRs \frac{2\pi}{L_x} \hat{S}_{k,m}(t) e^{i2\pi \left(\frac{k}{L_x} x + \frac{m}{L_z} z \right)}. \quad (4.2.14)$$

以上のようになるので (2.3.61) を変形させた結果は

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M \frac{\partial \hat{\zeta}_{k,m}(t)}{\partial t} e^{i2\pi \left(\frac{k}{L_x} x + \frac{m}{L_z} z \right)} \\ &= - \sum_{k=-(2K-1)}^{2K-1} \sum_{m=-(2M-1)}^{2M-1} Pr \frac{4\pi^2}{L_x L_z} (k_2 m_1 - k_1 m_2) \hat{\zeta}_{k_1, m_1}(t) \hat{\Psi}_{k_2, m_2}(t) e^{i2\pi \left(\frac{k_1+k_2}{L_x} x + \frac{m_1+m_2}{L_z} z \right)} \\ & \quad - \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M 4\pi^2 Pr \left(\frac{k^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_z^2} \right) \hat{\zeta}_{k,m}(t) e^{i2\pi \left(\frac{k}{L_x} x + \frac{m}{L_z} z \right)} \\ & \quad - \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M ikPrRa \frac{2\pi}{L_x} \hat{T}_{k,m}(t) e^{i2\pi \left(\frac{k}{L_x} x + \frac{m}{L_z} z \right)} \\ & \quad + \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M ikPrRs \frac{2\pi}{L_x} \hat{S}_{k,m}(t) e^{i2\pi \left(\frac{k}{L_x} x + \frac{m}{L_z} z \right)} \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

となり, (4.2.9) は切断級数で表される.

^{*1}このヤコビアンの変形に関しては付録を参照.

温度に関する拡散方程式 (2.3.62) を切断スペクトル方程式に変形する. (2.3.62) を T の時間発展式として見るために

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -J(T, \Psi) + \nabla^2 T - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (4.2.16)$$

と変形する. ここで前と同様に

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} = J(T, \Psi)$$

と非線形項をヤコビアンを用いて書き直した. 切断級数 (4.2.3) 式を用いて表す. 左辺は

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M \frac{\partial \hat{T}_{k,m}(t)}{\partial t} e^{i2\pi(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z)}. \quad (4.2.17)$$

右辺第一項目は

$$J(T, \Psi) = \sum_{k=-(2K-1)}^{2K-1} \sum_{m=-(2M-1)}^{2M-1} \frac{4\pi^2}{L_x L_z} (k_2 m_1 - k_1 m_2) \hat{T}_{k_1, m_1}(t) \hat{\Psi}_{k_2, m_2}(t) e^{i2\pi(\frac{k_1+k_2}{L_x}x + \frac{m_1+m_2}{L_z}z)} \quad (4.2.18)$$

右辺第二項目は

$$\nabla^2 T = - \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M 4\pi^2 \left(\frac{k^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_z^2} \right) \hat{T}_{k,m}(t) e^{i2\pi(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z)}. \quad (4.2.19)$$

右辺第三項は

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial x} = - \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M ik \frac{2\pi}{L_x} \hat{\Psi}_{k,m}(t) e^{i2\pi(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z)}. \quad (4.2.20)$$

以上のようになるので (2.3.62) を変形させた結果は

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M \frac{\partial \hat{T}_{k,m}(t)}{\partial t} e^{i2\pi(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z)} \\ &= - \sum_{k=-(2K-1)}^{2K-1} \sum_{m=-(2M-1)}^{2M-1} \frac{4\pi^2}{L_x L_z} (k_2 m_1 - k_1 m_2) \hat{T}_{k_1, m_1}(t) \hat{\Psi}_{k_2, m_2}(t) e^{i2\pi(\frac{k_1+k_2}{L_x}x + \frac{m_1+m_2}{L_z}z)} \\ & \quad - \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M 4\pi^2 \left(\frac{k^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_z^2} \right) \hat{T}_{k,m}(t) e^{i2\pi(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z)} \\ & \quad - \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M ik \frac{2\pi}{L_x} \hat{\Psi}_{k,m}(t) e^{i2\pi(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z)} \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

となり, (4.2.16) は切断級数で表される.

塩分に関する拡散方程式 (2.3.63) を切断スペクトル方程式に変形する.
(2.3.63) を S の時間発展式として見るために

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -J(S, \Psi) + \tau \nabla^2 S - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (4.2.22)$$

と変形する. ここで前と同様に

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial z} = J(S, \Psi)$$

と非線形項をヤコビアンを用いて書き直した. 切断級数 (4.2.4) 式を用いて表す.
左辺は

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M \frac{\partial \hat{S}_{k,m}(t)}{\partial t} e^{i2\pi(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z)}. \quad (4.2.23)$$

右辺第一項目は

$$J(S, \Psi) = \sum_{k=-(2K-1)}^{2K-1} \sum_{m=-(2M-1)}^{2M-1} \frac{4\pi^2}{L_x L_z} (k_2 m_1 - k_1 m_2) \hat{S}_{k_1, m_1}(t) \hat{\Psi}_{k_2, m_2}(t) e^{i2\pi(\frac{k_1+k_2}{L_x}x + \frac{m_1+m_2}{L_z}z)} \quad (4.2.24)$$

右辺第二項目は

$$\tau \nabla^2 S = - \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M 4\pi^2 \tau \left(\frac{k^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_z^2} \right) \hat{S}_{k,m}(t) e^{i2\pi(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z)}. \quad (4.2.25)$$

右辺第三項は

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial x} = - \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M ik \frac{2\pi}{L_x} \hat{\Psi}_{k,m}(t) e^{i2\pi(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z)}. \quad (4.2.26)$$

以上のようになるので (2.3.63) を変形させた結果は

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M \frac{\partial \hat{S}_{k,m}(t)}{\partial t} e^{i2\pi\left(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z\right)} \\
 = & - \sum_{k=-(2K-1)}^{2K-1} \sum_{m=-(2M-1)}^{2M-1} \frac{4\pi^2}{L_x L_z} (k_2 m_1 - k_1 m_2) \\
 & \hat{S}_{k_1, m_1}(t) \hat{\Psi}_{k_2, m_2}(t) e^{i2\pi\left(\frac{k_1+k_2}{L_x}x + \frac{m_1+m_2}{L_z}z\right)} \quad (4.2.27) \\
 & - \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M 4\pi^2 \tau \left(\frac{k^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_z^2} \right) \hat{S}_{k,m}(t) e^{i2\pi\left(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z\right)} \\
 & - \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M ik \frac{2\pi}{L_x} \hat{\Psi}_{k,m}(t) e^{i2\pi\left(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z\right)}
 \end{aligned}$$

となり, (4.2.16) は切断波数で表される.

この際の残差をそれぞれ $R(\zeta, \Psi)$, $R(T, \Psi)$, $R(S, \Psi)$ とする. $R(\zeta, \Psi)$ は (4.2.15), (D.9) を合わせて考えることにより

$$\begin{aligned}
 R(\zeta, \Psi) = & \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M \frac{\partial \hat{\zeta}_{k,m}(t)}{\partial t} e^{i2\pi\left(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z\right)} \\
 & + \sum_{k=-(2K-1)}^{2K-1} \sum_{m=-(2M-1)}^{2M-1} \frac{4\pi^2}{L_x L_z} (k_2 m_1 - k_1 m_2) \\
 & \hat{\zeta}_{k_1, m_1}(t) \hat{\Psi}_{k_2, m_2}(t) e^{i2\pi\left(\frac{k_1+k_2}{L_x}x + \frac{m_1+m_2}{L_z}z\right)} \\
 & + \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M 4\pi^2 Pr \left(\frac{k^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_z^2} \right) \hat{\zeta}_{k,m}(t) e^{i2\pi\left(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z\right)} \quad (4.2.28) \\
 & + \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M ik Pr Ra \frac{2\pi}{L_x} \hat{T}_{k,m}(t) e^{i2\pi\left(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z\right)} \\
 & - \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M ik Pr Rs \frac{2\pi}{L_x} \hat{S}_{k,m}(t) e^{i2\pi\left(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z\right)}.
 \end{aligned}$$

$R(T, \Psi)$ は (4.2.21), (D.10) を合わせて考えることにより

$$\begin{aligned}
 R(T, \Psi) &= \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M \frac{\partial \hat{T}_{k,m}(t)}{\partial t} e^{i2\pi(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z)} \\
 &+ \sum_{k=-(2K-1)}^{2K-1} \sum_{m=-(2M-1)}^{2M-1} \frac{4\pi^2}{L_x L_z} (k_2 m_1 - k_1 m_2) \\
 &\quad \hat{T}_{k_1, m_1}(t) \hat{\Psi}_{k_2, m_2}(t) e^{i2\pi(\frac{k_1+k_2}{L_x}x + \frac{m_1+m_2}{L_z}z)} \\
 &+ \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M 4\pi^2 \left(\frac{k^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_z^2} \right) \hat{T}_{k,m}(t) e^{i2\pi(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z)} \\
 &+ \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M ik \frac{2\pi}{L_x} \hat{\Psi}_{k,m}(t) e^{i2\pi(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z)}.
 \end{aligned} \tag{4.2.29}$$

$R(S, \Psi)$ は (4.2.27), (D.11) を合わせて考えることにより

$$\begin{aligned}
 R(S, \Psi) &= \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M \frac{\partial \hat{S}_{k,m}(t)}{\partial t} e^{i2\pi(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z)} \\
 &+ \sum_{k=-(2K-1)}^{2K-1} \sum_{m=-(2M-1)}^{2M-1} \frac{4\pi^2}{L_x L_z} (k_2 m_1 - k_1 m_2) \\
 &\quad \hat{S}_{k_1, m_1}(t) \hat{\Psi}_{k_2, m_2}(t) e^{i2\pi(\frac{k_1+k_2}{L_x}x + \frac{m_1+m_2}{L_z}z)} \\
 &+ \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M 4\pi^2 \tau \left(\frac{k^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_z^2} \right) \hat{S}_{k,m}(t) e^{i2\pi(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z)} \\
 &+ \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M ik \frac{2\pi}{L_x} \hat{\Psi}_{k,m}(t) e^{i2\pi(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z)}.
 \end{aligned} \tag{4.2.30}$$

この残差に重み関数 $e^{-i2\pi(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z)}$ をかけて全領域において積分したものを 0 とすることを課す. つまり

$$\int_0^{L_y} \int_0^{L_x} R e^{-i2\pi(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z)} dx dy = 0 \tag{4.2.31}$$

のようにすると, それぞれ (4.2.28)~(4.2.30) の式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\zeta}_{k,m}(t)}{\partial t} + \frac{4\pi^2}{L_x L_z} (k_2 m_1 - k_1 m_2) \hat{\zeta}_{k_1, m_1}(t) \hat{\Psi}_{k_2, m_2}(t) \\ + 4\pi^2 Pr \left(\frac{k^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_z^2} \right) \hat{\zeta}_{k,m}(t) + ik Pr Ra \frac{2\pi}{L_x} \hat{T}_{k,m}(t) - ik Pr Rs \frac{2\pi}{L_x} \hat{S}_{k,m}(t) = 0, \end{aligned} \quad (4.2.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{T}_{k,m}(t)}{\partial t} + \frac{4\pi^2}{L_x L_z} (k_2 m_1 - k_1 m_2) \hat{T}_{k_1, m_1}(t) \hat{\Psi}_{k_2, m_2}(t) \\ + 4\pi^2 \left(\frac{k^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_z^2} \right) \hat{T}_{k,m}(t) + ik \frac{2\pi}{L_x} \hat{\Psi}_{k,m}(t) = 0, \end{aligned} \quad (4.2.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{S}_{k,m}(t)}{\partial t} + \frac{4\pi^2}{L_x L_z} (k_2 m_1 - k_1 m_2) \hat{S}_{k_1, m_1}(t) \hat{\Psi}_{k_2, m_2}(t) \\ + 4\pi^2 \tau \left(\frac{k^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_z^2} \right) \hat{S}_{k,m}(t) + ik \frac{2\pi}{L_x} \hat{\Psi}_{k,m}(t) = 0 \end{aligned} \quad (4.2.34)$$

となる.

なお上の変換の際には三角関数の直交性

$$\frac{1}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} J(x, y, t) e^{i2\pi \left(\frac{k}{L_x} x + \frac{m}{L_z} z \right)} e^{-i2\pi \left(\frac{k'}{L_x} x + \frac{m'}{L_z} z \right)} dx dy = \delta_{k,k'} \cdot \delta_{m,m'} \quad (4.2.35)$$

を用いた.

(4.2.32)~(4.2.34) の切断スペクトル各式に $e^{i2\pi \left(\frac{k}{L_x} x + \frac{m}{L_z} z \right)}$ をかけて, それぞれ k, m に関して和をとる.

(4.2.32):

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M \frac{\partial \hat{\zeta}_{k,m}(t)}{\partial t} e^{i2\pi(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z)} \\
 & + \sum_{k=-(2K-1)}^{2K-1} \sum_{m=-(2M-1)}^{2M-1} \frac{4\pi^2}{L_x L_z} (k_2 m_1 - k_1 m_2) \hat{\zeta}_{k_1, m_1}(t) \hat{\Psi}_{k_2, m_2}(t) e^{i2\pi(\frac{k_1+k_2}{L_x}x + \frac{m_1+m_2}{L_z}z)} \\
 & + \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M 4\pi^2 Pr \left(\frac{k^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_z^2} \right) \hat{\zeta}_{k,m}(t) e^{i2\pi(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z)} \\
 & + \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M ik Pr Ra \frac{2\pi}{L_x} \hat{T}_{k,m}(t) e^{i2\pi(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z)} \\
 & - \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M ik Pr Rs \frac{2\pi}{L_x} \hat{S}_{k,m}(t) e^{i2\pi(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z)} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.2.36}$$

(4.2.33):

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M \frac{\partial \hat{T}_{k,m}(t)}{\partial t} e^{i2\pi(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z)} \\
 & + \sum_{k=-(2K-1)}^{2K-1} \sum_{m=-(2M-1)}^{2M-1} \frac{4\pi^2}{L_x L_z} (k_2 m_1 - k_1 m_2) \hat{T}_{k_1, m_1}(t) \hat{\Psi}_{k_2, m_2}(t) e^{i2\pi(\frac{k_1+k_2}{L_x}x + \frac{m_1+m_2}{L_z}z)} \\
 & + \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M 4\pi^2 \left(\frac{k^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_z^2} \right) \hat{T}_{k,m}(t) e^{i2\pi(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z)} \\
 & + \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M ik \frac{2\pi}{L_x} \hat{\Psi}_{k,m}(t) e^{i2\pi(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z)} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.2.37}$$

(4.2.34):

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M \frac{\partial \hat{S}_{k,m}(t)}{\partial t} e^{i2\pi\left(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z\right)} \\
 & + \sum_{k=-(2K-1)}^{2K-1} \sum_{m=-(2M-1)}^{2M-1} \frac{4\pi^2}{L_x L_z} (k_2 m_1 - k_1 m_2) \hat{S}_{k_1, m_1}(t) \hat{\Psi}_{k_2, m_2}(t) e^{i2\pi\left(\frac{k_1+k_2}{L_x}x + \frac{m_1+m_2}{L_z}z\right)} \\
 & + \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M 4\pi^2 \tau \left(\frac{k^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_z^2} \right) \hat{S}_{k,m}(t) e^{i2\pi\left(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z\right)} \\
 & + \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M ik \frac{2\pi}{L_x} \hat{\Psi}_{k,m}(t) e^{i2\pi\left(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z\right)} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.2.38}$$

よってスペクトル法による値は
渦度:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \zeta}{\partial t} \\
 = & - \sum_{k=-(2K-1)}^{2K-1} \sum_{m=-(2M-1)}^{2M-1} \frac{4\pi^2}{L_x L_z} (k_2 m_1 - k_1 m_2) \hat{\zeta}_{k_1, m_1}(t) \hat{\Psi}_{k_2, m_2}(t) e^{i2\pi\left(\frac{k_1+k_2}{L_x}x + \frac{m_1+m_2}{L_z}z\right)} \\
 & - \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M 4\pi^2 Pr \left(\frac{k^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_z^2} \right) \hat{\zeta}_{k,m}(t) e^{i2\pi\left(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z\right)} \\
 & - \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M ik Pr Ra \frac{2\pi}{L_x} \hat{T}_{k,m}(t) e^{i2\pi\left(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z\right)} \\
 & + \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M ik Pr Rs \frac{2\pi}{L_x} \hat{S}_{k,m}(t) e^{i2\pi\left(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z\right)}
 \end{aligned} \tag{4.2.39}$$

温度:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial T}{\partial t} \\
 = & - \sum_{k=-(2K-1)}^{2K-1} \sum_{m=-(2M-1)}^{2M-1} \frac{4\pi^2}{L_x L_z} (k_2 m_1 - k_1 m_2) \hat{T}_{k_1, m_1}(t) \hat{\Psi}_{k_2, m_2}(t) e^{i2\pi \left(\frac{k_1+k_2}{L_x} x + \frac{m_1+m_2}{L_z} z \right)} \\
 & - \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M 4\pi^2 \left(\frac{k^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_z^2} \right) \hat{T}_{k, m}(t) e^{i2\pi \left(\frac{k}{L_x} x + \frac{m}{L_z} z \right)} \\
 & - \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M ik \frac{2\pi}{L_x} \hat{\Psi}_{k, m}(t) e^{i2\pi \left(\frac{k}{L_x} x + \frac{m}{L_z} z \right)}
 \end{aligned} \tag{4.2.40}$$

塩分:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial S}{\partial t} \\
 = & - \sum_{k=-(2K-1)}^{2K-1} \sum_{m=-(2M-1)}^{2M-1} \frac{4\pi^2}{L_x L_z} (k_2 m_1 - k_1 m_2) \hat{T}_{k_1, m_1}(t) \hat{\Psi}_{k_2, m_2}(t) e^{i2\pi \left(\frac{k_1+k_2}{L_x} x + \frac{m_1+m_2}{L_z} z \right)} \\
 & - \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M 4\pi^2 \tau \left(\frac{k^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_z^2} \right) \hat{S}_{k, m}(t) e^{i2\pi \left(\frac{k}{L_x} x + \frac{m}{L_z} z \right)} \\
 & - \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M ik \frac{2\pi}{L_x} \hat{\Psi}_{k, m}(t) e^{i2\pi \left(\frac{k}{L_x} x + \frac{m}{L_z} z \right)}
 \end{aligned} \tag{4.2.41}$$

以上の時間発展式を用いて計算される。

4.3 変換法

スペクトル法で得られた常微分方程式 (4.2.39)~(4.2.41) を実際に数値計算する際に必要な計算量を見積もると、各式の非線形項に必要な計算量は各 k, m に対して $4K - 1$ 個, $4M - 1$ 個ずつの総和が必要になるので、計算量のオーダーに注目すると合計 $(4K - 1) * (4M - 1)$ のオーダーの計算が必要となる。一方、差分法で非線形項を数値計算する際に必要な計算量 (ここでは切断波数を、格子点法で解いた場合の格子点数とする) は、全体で $(2K + 1) * (2M + 1)$ のオーダーで済んでいる。すなわち、このままスペクトル法で常微分方程式 (4.2.39)~(4.2.41) を解いてしまうと、スペクトル法は格子点法に比べて計算コストが非常に高いので、実際に数値

計算するには向かないのではないかという危惧が出てくる*2. しかし以下に示す変換法が開発され、これによりスペクトル法に必要な計算コストを減らすことが可能となった. 実際に常微分方程式 (4.2.39)~(4.2.41) に含まれる非線形項を数値計算するときの方法について以下で示す.

(4.2.39)~(4.2.41) の式, それぞれの右辺第一項目を (波数空間上) $\hat{J}_{k,m}(\zeta, \Psi)$, $\hat{J}_{k,m}(T, \Psi)$, $\hat{J}_{k,m}(S, \Psi)$ を評価する方法として変換法を用いて. これは $\hat{J}_{k,m}(\zeta, \Psi)$ を例にとると

$$\frac{\partial \zeta(x_i, y_j, t)}{\partial x} = \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M ik \frac{2\pi}{L_x} \hat{\zeta}_{k,m}(t) e^{i2\pi(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z)}, \quad (4.3.1)$$

$$\frac{\partial \Psi(x_i, y_j, t)}{\partial z} = \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M im \frac{2\pi}{L_z} \hat{\Psi}_{k,m}(t) e^{i2\pi(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z)}, \quad (4.3.2)$$

$$\frac{\partial \zeta(x_i, y_j, t)}{\partial z} = \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M im \frac{2\pi}{L_z} \hat{\zeta}_{k,m}(t) e^{i2\pi(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z)}, \quad (4.3.3)$$

$$\frac{\partial \Psi(x_i, y_j, t)}{\partial x} = \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M ik \frac{2\pi}{L_x} \hat{\Psi}_{k,m}(t) e^{i2\pi(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z)} \quad (4.3.4)$$

のフーリエ逆変換を用いて, 渦度と流線関数のフーリエ係数 $\hat{\zeta}_{k,m}(t)$, $\hat{\Psi}_{k,m}(t)$ から, それぞれの項の格子点値を求め, それらの格子点値を用いて

$$J(\zeta, \Psi) = \frac{\partial \zeta(x_i, y_j, t)}{\partial x} \frac{\partial \Psi(x_i, y_j, t)}{\partial z} - \frac{\partial \zeta(x_i, y_j, t)}{\partial z} \frac{\partial \Psi(x_i, y_j, t)}{\partial x} \quad (4.3.5)$$

のようにヤコビアンを格子点値を求める. その後にヤコビアンの格子点値 (4.3.5) をフーリエ変換することによって, 波数空間上のフーリエ係数 $\hat{J}_{k,m}(\zeta, \Psi)$ を求める方法である. 同様に $\hat{J}_{k,m}(T, \Psi)$, $\hat{J}_{k,m}(S, \Psi)$ も変換法を用いて求められる. この変換法を実際に数値計算を行う際に用いることにより, 必要な計算量のオーダーを $(2K + 1) * (2M + 1)$ に抑えている.

4.4 計算設定

前節では二重拡散対流の数値計算をスペクトル法で行うための切断スペクトル方程式の導出を行った. 次節では地球流体電脳倶楽部が開発した SPMODEL を用いたスペクトル法による数値計算を行うが, この節では方程式系を解くために次節で行う数値計算の設定と条件を述べる.

*2実際, 1970 年以前は数値計算でスペクトル法が使われることは稀であった.

設定

水平鉛直 2 次元領域を考える. 鉛直方向を z ($0 \sim 1$) 方向, 水平方向を x ($0 \sim 2$) 方向とする.

- 格子点設定は z 方向に 32, x 方向に 64 とした
- 切断波数設定は z 方向は 21, x 方向は 21 とした
- 時間差分間隔は $\Delta t = 10^{-5}, 10^{-7}$ の 2 通りを使い分けた.
- 時間差分の方法はオイラー法とした
- プラントル数 Pr は 10.0, 拡散係数比 τ は 0.01 とした
- レイリー数 Ra' , Rs' は様々な数で計算していくのでここで明記しない

条件

次に述べる境界条件と初期条件は第 3 章で行った安定性解析で用いた条件と同じものを適用させる.

鉛直方向に関しては境界条件として上下の境界では温度, 塩分は

$$T = S = 0 \quad z = 0, 1 \quad (4.4.1)$$

で固定する. 渦度 ζ , 流線関数 Ψ に関しては第 3 章で述べたように

$$\Psi = \zeta = 0 \quad z = 0, 1 \quad (4.4.2)$$

の条件を与える. x 方向に関しては周期境界条件を与える.

初期条件は安定性解析で用いた解の $t = 0$ の状態を今回の数値計算の初期条件とする.

$$\Psi(x, z, 0) = \sin \pi ax \sin \pi nz, \quad (4.4.3)$$

$$\zeta(x, z, 0) = \nabla^2 \Psi = -\pi^2 (a^2 + n^2) \sin \pi ax \sin \pi nz, \quad (4.4.4)$$

$$T(x, z, 0) = \cos \pi ax \sin \pi nz, \quad (4.4.5)$$

$$S(x, z, 0) = \cos \pi ax \sin \pi nz \quad (4.4.6)$$

4.5 エネルギー方程式の導出

この章においては支配方程式系を数値計算した結果を線形安定性解析と比較する。それにより、線形安定性解析の有効範囲を考察する。比較する指標としては、運動エネルギーと有効ポテンシャルエネルギー領域全体で積分した数値の時間発展を用いる。この節では指標として用いるエネルギー方程式を (2.3.27), (2.3.28), (2.3.39), (2.3.40) より導出する。まずそれぞれの式を無次元化する。無次元化パラメータは第 2 章で用いたものと同じものを用いる。先に示していなかった圧力 p に関する無次元化変数のみを以下に示す。

$$p = \rho_0 \frac{\kappa^2}{d^2} p^*$$

以上を用いて式を無次元化していく。無次元化した後の数値を * 付きで表現している。

(2.3.27) を無次元化する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \\ \frac{\kappa^2}{d^3} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\kappa^2}{d^3} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\kappa^2}{d^3} w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} &= -\frac{\kappa^2}{d^3} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\kappa}{d^3} \nu \nabla^{*2} u^* \\ \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} &= -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\nu}{\kappa} \nabla^{*2} u^*. \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

同様に (2.3.28) も無次元化する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w + g(\alpha T - \beta S) \\ \frac{\kappa^2}{d^3} \frac{\partial w^*}{\partial t^*} + \frac{\kappa^2}{d^3} u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + \frac{\kappa^2}{d^3} w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} &= -\frac{\kappa^2}{d^3} \frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \frac{\kappa}{d^3} \nu \nabla^{*2} w^* + g(\alpha \Delta T T^* - \beta \Delta S S^*) \\ \frac{\partial w^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} &= -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \frac{\nu}{\kappa} \nabla^{*2} w^* + \frac{g\alpha \Delta T d^3}{\kappa^2} T^* - \frac{g\beta \Delta S d^3}{\kappa^2} S^*. \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

ここで (2.3.52), (2.3.53) で定義した無次元パラメータ Ra , Rs を用いて書き直すと

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + Pr \nabla^{*2} u^*, \quad (4.5.3)$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} + Pr \nabla^{*2} w^* + Pr Ra T^* - Pr Rs S^* \quad (4.5.4)$$

と無次元化できる。

次に (2.3.39) を無次元化する. これは

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T \kappa}{d^2} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{\Delta T \kappa}{d^2} u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + \frac{\Delta T \kappa}{d^2} w^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} + \frac{\kappa \Delta T}{d} \frac{\Delta T}{d} w^* &= \frac{\Delta T}{d^2} \kappa \nabla^{*2} T^* \\ \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + w^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} + w^* &= \kappa \nabla^{*2} T^* \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

のように無次元化できる. (2.3.40) を無次元化する. これは

$$\begin{aligned} \frac{\Delta S \kappa}{d^2} \frac{\partial S^*}{\partial t^*} + \frac{\Delta S \kappa}{d^2} u^* \frac{\partial S^*}{\partial x^*} + \frac{\Delta S \kappa}{d^2} w^* \frac{\partial S^*}{\partial z^*} + \frac{\kappa \Delta S}{d} \frac{\Delta S}{d} w^* &= \frac{\Delta S}{d^2} \kappa_S \nabla^{*2} S^* \\ \frac{\partial S^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial S^*}{\partial x^*} + w^* \frac{\partial S^*}{\partial z^*} + w^* &= \frac{\kappa_S}{\kappa} \nabla^{*2} S^* \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

のように無次元化できる. 上の計算では (2.3.58) で定義した無次元パラメータ τ を用いた. 以上の結果を以下にまとめると

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + Pr \nabla^2 u, \quad (4.5.7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + Pr \nabla^2 w + Pr Ra T - Pr Rs S, \quad (4.5.8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} + w = \nabla^2 T, \quad (4.5.9)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + w \frac{\partial S}{\partial z} + w = \tau \nabla^2 S \quad (4.5.10)$$

これらの式から, 無次元化されたエネルギー方程式を導出する. (4.5.7) に u をかけることにより

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial t} + u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + uw \frac{\partial u}{\partial z} &= -u \frac{\partial p}{\partial x} + u Pr \nabla^2 u \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) + w \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) &= -\frac{\partial}{\partial x} (pu) + p \frac{\partial u}{\partial x} + u Pr \nabla^2 u \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u^2 u \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} u^2 w \right) - \frac{1}{2} u^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial}{\partial x} (pu) + p \frac{\partial u}{\partial x} + u Pr \nabla^2 u \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) + \nabla \cdot \left\{ \left(\frac{1}{2} u^2 \right) \mathbf{u} \right\} &= -\frac{\partial}{\partial x} (pu) + p \frac{\partial u}{\partial x} + u Pr \nabla^2 u \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

となる. (4.5.8) に w をかけることにより

$$\begin{aligned}
 w \frac{\partial w}{\partial t} + wu \frac{\partial w}{\partial x} + w^2 \frac{\partial w}{\partial z} &= -w \frac{\partial p}{\partial z} + wPr\nabla^2 w + wPrRaT - wPrRsS \\
 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} w^2 \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} w^2 \right) + w \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} w^2 \right) \\
 &= -\frac{\partial}{\partial z} (pw) + p \frac{\partial w}{\partial z} + wPr\nabla^2 w + wPrRaT - wPrRsS \\
 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} w^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} w^2 u \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} w^2 w \right) - \frac{1}{2} w^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
 &= -\frac{\partial}{\partial z} (pw) + p \frac{\partial w}{\partial z} + wPr\nabla^2 w + wPrRaT - wPrRsS \\
 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} w^2 \right) + \nabla \cdot \left\{ \left(\frac{1}{2} w^2 \right) \mathbf{u} \right\} \\
 &= -\frac{\partial}{\partial z} (pw) + p \frac{\partial w}{\partial z} + wPr\nabla^2 w + wPrRaT - wPrRsS
 \end{aligned} \tag{4.5.12}$$

となる. (4.5.11), (4.5.12) を足し合わせることにより

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} w^2 \right) + \nabla \cdot \left\{ \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} w^2 \right) \mathbf{u} \right\} &= -\nabla \cdot (p\mathbf{u}) + p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
 &\quad + uPr\nabla^2 u + wPr\nabla^2 w + wPrRaT - wPrRsS \\
 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} w^2 \right) + \nabla \cdot \left\{ \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} w^2 + p \right) \mathbf{u} \right\} \\
 &= uPr\nabla^2 u + wPr\nabla^2 w + wPrRaT - wPrRsS
 \end{aligned} \tag{4.5.13}$$

と式が得られる. 次に (4.5.9) に T をかけることにより

$$\begin{aligned}
 T \frac{\partial T}{\partial t} + uT \frac{\partial T}{\partial x} + wT \frac{\partial T}{\partial z} + wT &= T\nabla^2 T \\
 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} T^2 \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} T^2 \right) + w \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} T^2 \right) + wT &= T\nabla^2 T \\
 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} T^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} T^2 u \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} T^2 w \right) - \frac{1}{2} T^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + wT &= T\nabla^2 T \\
 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} T^2 \right) + \nabla \cdot \left\{ \left(\frac{1}{2} T^2 \right) \mathbf{u} \right\} + wT &= T\nabla^2 T.
 \end{aligned} \tag{4.5.14}$$

同様に (4.5.10) に S をかけることにより

$$\begin{aligned}
 S \frac{\partial S}{\partial t} + uS \frac{\partial S}{\partial x} + wS \frac{\partial S}{\partial z} + wS &= \tau S \nabla^2 S \\
 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} S^2 \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} S^2 \right) + w \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} S^2 \right) + wS &= \tau S \nabla^2 S \\
 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} S^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} S^2 u \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} S^2 w \right) - \frac{1}{2} S^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + wS &= \tau S \nabla^2 S \\
 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} S^2 \right) + \nabla \cdot \left\{ \left(\frac{1}{2} S^2 \right) \mathbf{u} \right\} + wS &= \tau S \nabla^2 S.
 \end{aligned} \tag{4.5.15}$$

以上の式変形において (2.3.41) を用いた.

(4.5.13) に (4.5.14), (4.5.15) を代入することにより

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} w^2 + \frac{1}{2} Pr Ra T^2 - \frac{1}{2} Pr Rs S^2 \right) \\
 &+ \nabla \cdot \left\{ \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} w^2 + p + \frac{1}{2} Pr Ra T^2 - \frac{1}{2} Pr Rs S^2 \right) \mathbf{u} \right\} \\
 &= u Pr \nabla^2 u + w Pr \nabla^2 w + Pr Ra T \nabla^2 T - \tau Pr Rs S \nabla^2 S
 \end{aligned} \tag{4.5.16}$$

これを考えている全領域において体積積分することにより

$$\begin{aligned}
 &\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} w^2 + \frac{1}{2} Pr Ra T^2 - \frac{1}{2} Pr Rs S^2 \right) dV \\
 &+ \int_V \nabla \cdot \left\{ \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} w^2 + p + \frac{1}{2} Pr Ra T^2 - \frac{1}{2} Pr Rs S^2 \right) \mathbf{u} \right\} dV \\
 &= \int_V (u Pr \nabla^2 u + w Pr \nabla^2 w + Pr Ra T \nabla^2 T - \tau Pr Rs S \nabla^2 S)
 \end{aligned} \tag{4.5.17}$$

が得られる. 上式の 2 項目 $\nabla \cdot \left\{ \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} w^2 + p + \frac{1}{2} Pr Ra T^2 - \frac{1}{2} Pr Rs S^2 \right) \mathbf{u} \right\}$ は Gauss の発散定理を用いて

$$\begin{aligned}
 &\int_V \nabla \cdot \left\{ \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} w^2 + p + \frac{1}{2} Pr Ra T^2 - \frac{1}{2} Pr Rs S^2 \right) \mathbf{u} \right\} dV \\
 &= \int_S \nabla \cdot \left\{ \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} w^2 + p + \frac{1}{2} Pr Ra T^2 - \frac{1}{2} Pr Rs S^2 \right) \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \right\} dS
 \end{aligned} \tag{4.5.18}$$

となり, ここで前で述べた境界条件と, 圧力 p の境界条件

- $p=0, \quad z=0,1,$

- x 方向に関しては周期境界条件

を考えることでゼロとなる. ゆえに (4.5.17) は

$$\begin{aligned} & \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}w^2 + \frac{1}{2}PrRaT^2 - \frac{1}{2}PrRsS^2 \right) dV \\ &= \int_V (uPr\nabla^2u + wPr\nabla^2w + PrRaT\nabla^2T - \tau PrRsS\nabla^2S) \end{aligned} \quad (4.5.19)$$

となる. (4.5.19) の左辺はブシネスク近似におけるエネルギーを表現している. $\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}w^2$ は擾乱の運動エネルギーであり, $\frac{1}{2}PrRaT^2 - \frac{1}{2}PrRsS^2$ は擾乱の有効ポテンシャルエネルギーである. 右辺は粘性などによる散逸効果を表現している.

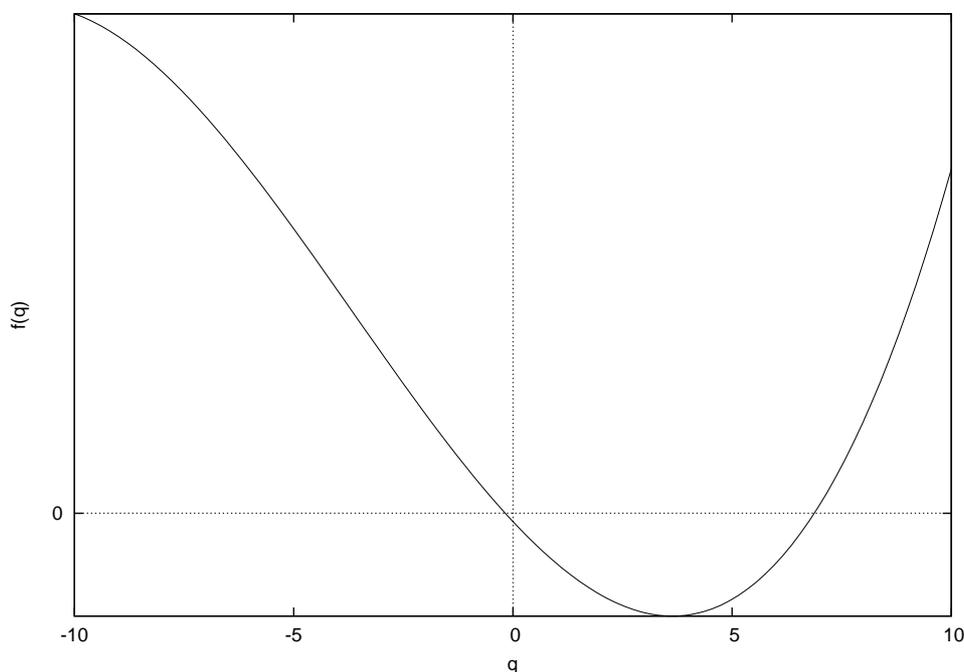
4.6 予備実験

ここでは線形化した方程式系を SPMODEL を用いて数値計算する. これにより前章で行った線形安定性解析が正しく SPMODEL において表現されているかを確かめる. ここで扱う線形化された方程式系は解析的に考察できているのだが, 後の考察において線形化された方程式系を数値的に解く必要が出てくるので, これを行う.

設定

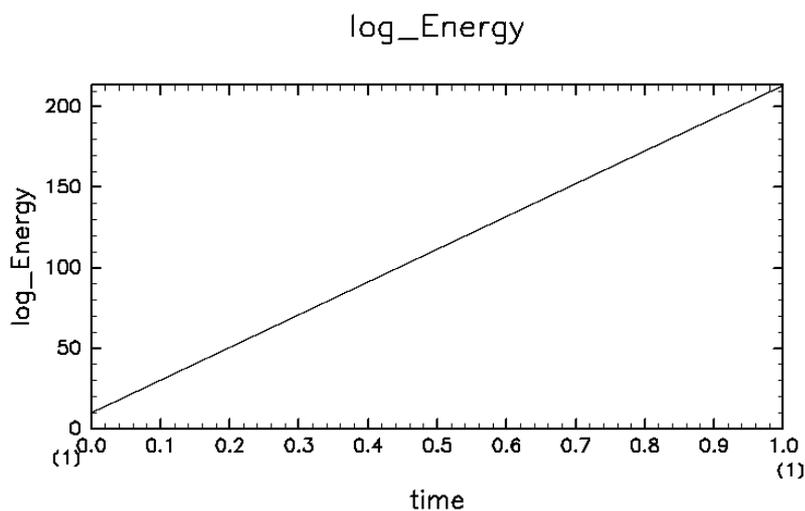
- Ra' , Rs' 以外の設定, 条件は前の 4.3 節にて述べた設定, 条件を用いる
- Ra' , Rs' は $Ra' = 11.0$, $Rs' = -2.0$ とする.

この Ra' , Rs' においては (3.2.1) は下に示すような形をとっている. このグラフ



によると, この設定において (3.1.22) は正の実数解を 1 つ, 負の実数解を 2 つ持つ. 線形安定性解析で導入した擾乱の成長率 σ は q に全波数 k の 2 乗を掛けることによって得られるので, ここでは正の擾乱の成長率に関しては 1 つだけ持つこととなる. 正の成長率によりのみ擾乱は成長する. つまり, この領域での線形安定性解析により得られる σ と数値計算によって示される擾乱の成長率を比較することによって, 前節に行った線形安定性解析が正しく SPMODEL において表現されているかを確認することができる. 擾乱の成長率をどの指標を用いて判断するかであるが, ここでは前節に導出した, 運動エネルギーと有効ポテンシャルエネルギーの和を E として, この時間変化を指標として用いる. 数値計算でも使っている方程式系は同じなので, E の時間変化は SPMODEL を用いた数値計算においても線形安定性解析と同様に指数関数的に増大すると仮定する. よって E の自然対数をとった数値 $\log_e E$, これは E の成長率と考えることができる, を用いることにより, σ と比較することができる.

以下図 (4.6.1), $Ra' = 11.0$, $Rs' = -2.0$ での SPMODEL による数値計算の結果である.



/usr/bin/gpview 2013-02-06

E_linear_growing.nc@log_E

図 4.6.1: $Ra' = 11.0$, $Rs' = -2.0$

次に $Ra' = 11.0$, $Rs' = -2.0$ での線形安定性解析によって得られる σ を考える. これは (3.1.22) に設定した Ra' , Rs' を代入し, ニュートン法を用いることにより q を得る. ここに全波数 k の 2 乗を掛けることによって σ が得られる. 結果, ここでの σ は

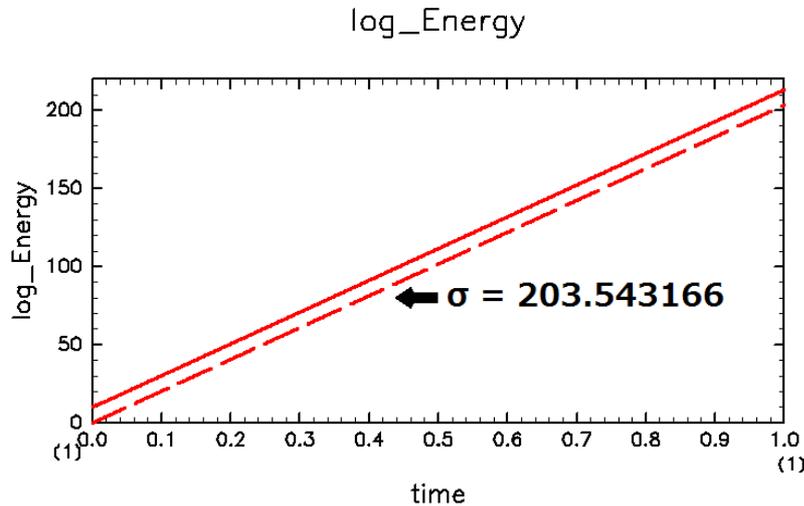
$$\sigma = 101.771583 \quad (4.6.1)$$

と得られた. ここで, (4.5.19) で示されるエネルギー方程式の左辺に示されるように, 速度, 温度, 塩分はそれぞれ共通して $e^{2\sigma}$ で成長していく, ゆえにエネルギーの時間変化に関して自然対数をとったもの $\log_e E$ は

$$2\sigma = 203.543166 \quad (4.6.2)$$

の割合で成長していくはずである.

上で示した図 (4.6.1) に 2σ の割合で増加していく直線を重ねて書いたものを下に示す. 図 (4.6) で示されるように, 線形安定性解析から得られた 2σ (破線) と数値



/usr/bin/gpview 2013-02-27

E_linear_growing.nc@log_E

計算により得られた E の成長率は等しい. これは, 線形化した方程式を SPMODEL を用いて数値計算を行い解を得るということは, 前章で行った線形安定性解析を, 少なくとも $\log_e E$ に関して, 正しく検討していることと同様であると考えられる.

4.7 線形安定性解析解との比較

第 3 章においては方程式系を線形化したものを考えた. つまり (2.3.61)~(2.3.63) の非線形効果が効いてくるまでの時間における流体運動の考察を行った. これは擾乱の振幅が非常に小さい場合の流体運動を考えていることになるが, この議論だけでは実際の流体運動を議論したことにはならない. この章では支配方程式系, つまり (2.3.61)~(2.3.63) を地球流体電脳倶楽部が開発した SPMODEL を用いて数値計算し, 線形安定性解析の結果と比較することにより, 線形安定性解析で得られた解が実際の流体運動を, どの程度の時間において表現できているのか, 言い換えると線形安定性解析の有効範囲を考察する.

設定

- Ra' , Rs' 以外の設定, 条件は前の 4.3 節にて述べた設定, 条件を用いる
- Ra' , Rs' は図 (3.2.1) の領域 I, II, III 内の適当に選んだ Ra' , Rs' をそれぞれ用いる. ここでは

$$\text{設定 1 : } Ra = 2.0, \quad Rs = 4.0 \text{ (領域 I),} \quad (4.7.1)$$

$$\text{設定 2 : } Ra = 8.0, \quad Rs = 4.0 \text{ (領域 II),} \quad (4.7.2)$$

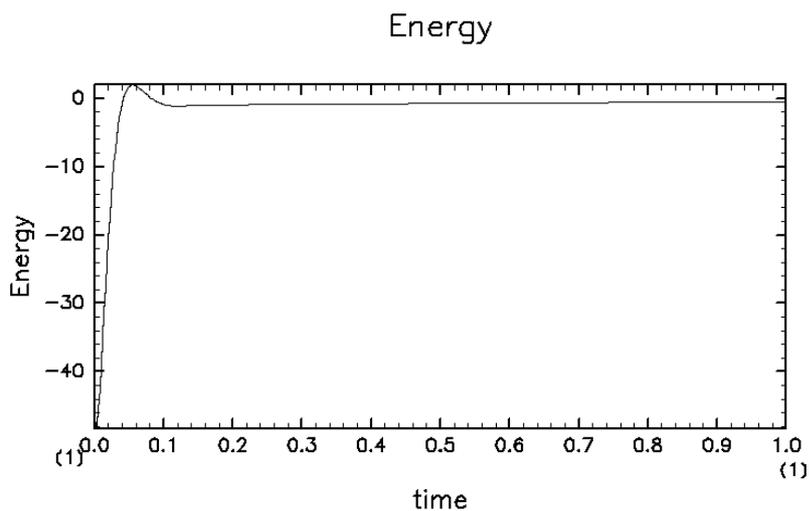
$$\text{設定 3 : } Ra = 10.0, \quad Rs = 4.0 \text{ (領域 III)} \quad (4.7.3)$$

とする.

これらの設定において, 線形安定性解析で得られる擾乱の E の成長率と支配方程式系での数値計算によって示される E の成長率とを比較する. 線形安定性解析において考えられる運動エネルギーの成長率 σ は, それぞれの設定した Ra, Rs を (3.1.22) に代入しそれを解き, q を求めることによって得られる. しかし, これはそれぞれの設定においての (3.1.22) を解析することによってわかったことだが, 設定 1, 設定 2 では複素数の σ を含むことにより, 擾乱の振幅は振動しながら増幅もしくは減衰していく. ゆえに上で述べた設定における擾乱の成長率 σ を解析的に求めるのは非常に困難である. また設定 3 では正の σ が複数存在することにより, それらの相互的な作用により E は成長する. ゆえにこの設定においても, これを解析的に求めるのは非常に困難である. よって以下では, 線形化した方程式系を数値計算した結果を, 線形安定性解析によって得られる擾乱の成長率 σ の代わりとする. 線形化した方程式系を数値計算した σ は, 線形安定性解析で得られる σ と正しいことは 4.5 節で示している. これらを見比べることにより, 線形安定性解析の有効範囲を考える.

設定 I

この設定において、支配方程式系で数値計算することにより求められた E のグラフを以下に載せる. 図 (4.7.2) でわかるように E は $t = 0$ において負であり, 時



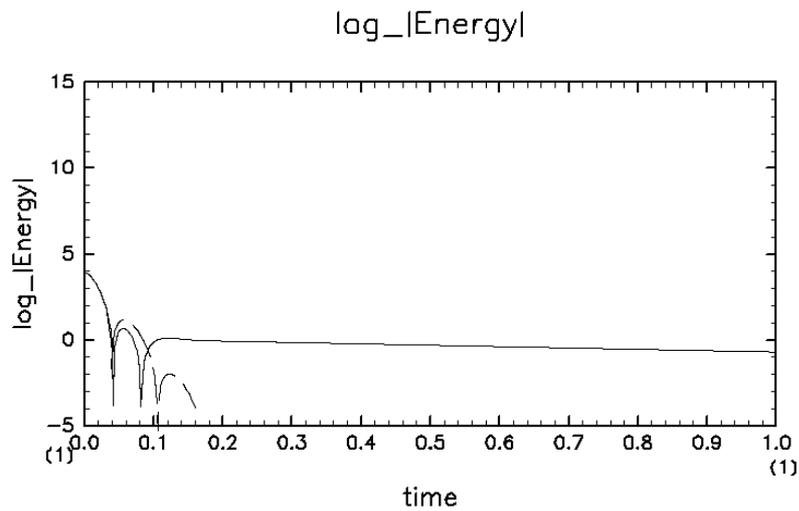
/usr/bin/gpview 2013-02-26

E_stable.nc@E

図 4.7.2: 設定 1 における E

間を経つにつれて $E = 0$ へと収束していく. このままでは $\log_e E$ が定義できない. よってここでは運動エネルギーと有効ポテンシャルエネルギーの和の絶対値 $|E|$ を考える. ゆえに, ここでは $\log_e |E|$ について, 支配方程式を数値計算した結果と線形化した支配方程式系を数値計算した結果とを比較する.

比較した図 (4.7.3) に載せる. このグラフより, 線形安定性解析が支配方程式系



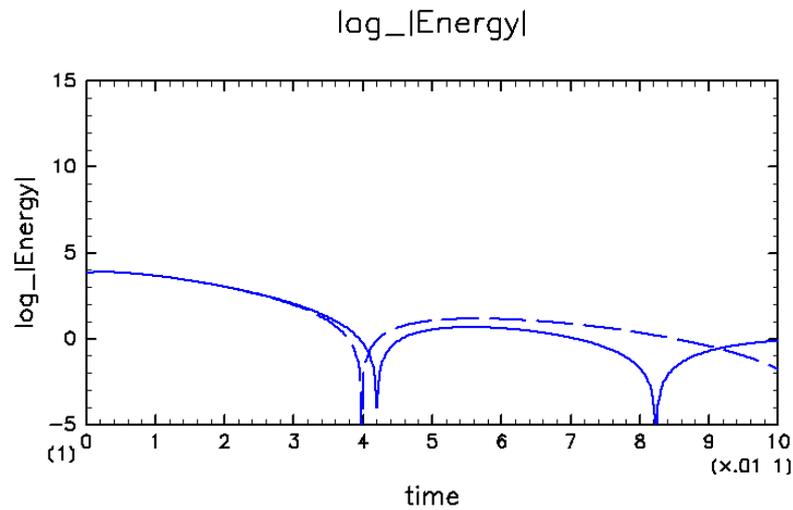
/usr/bin/gnuplot 2013-02-27

E_stable.nc@log_E

図 4.7.3: 設定 1 における $\log_e |E|$, $t = 0.0 \sim 1.0$

で表現される流体運動をよく表現できているのは, 擾乱の成長の初期の段階であるように見える.

次に、擾乱の振幅が非常に小さい時間、ここでは $t = 0.00 \sim 0.10$ までの時間を拡大したグラフを以下に示す。これを見ることにより、設定 1 における線形安定性解



/usr/bin/gpview 2013-02-18

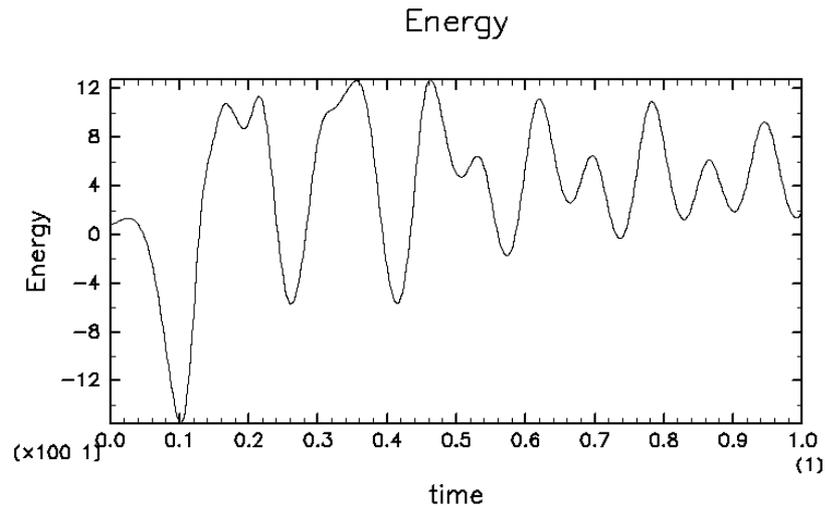
E_stable.nc@log_E

図 4.7.4: 設定 1 における $\log_e |E|$, $t = 0.00 \sim 0.10$

析の有効範囲は $t = 0.00 \sim 0.03$ の非常に初期の段階においてのみであることが示された。

設定 II

この設定において、支配方程式系で数値計算することにより求められた E のグラフを以下に載せる. 図 (4.7.5) でわかるように E は振動しながら増幅していく.



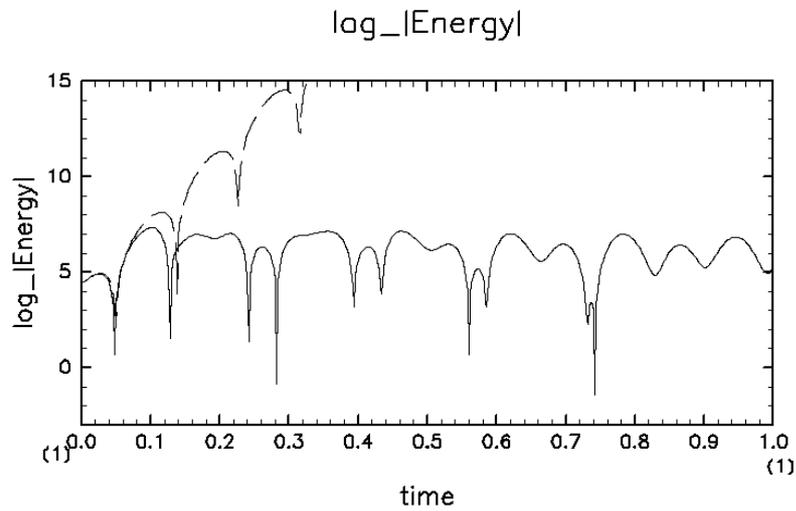
/usr/bin/gpview 2013-02-26

E_oscillation.nc@E

図 4.7.5: 設定 2 における E

単調に増幅していくわけではなく、擾乱が振動しながら増幅していくためにエネルギーは正、負両方の値を取る. このままでは $\log_e E$ が定義できない. よってここでも運動エネルギーと有効ポテンシャルエネルギーの和の絶対値 $|E|$ を考える. ゆえに、ここでは $\log_e |E|$ について、支配方程式を数値計算した結果と線形化した方程式系を数値計算した結果とを比較する.

比較した図を以下に載せる. このグラフより, 線形安定性解析が支配方程式系で



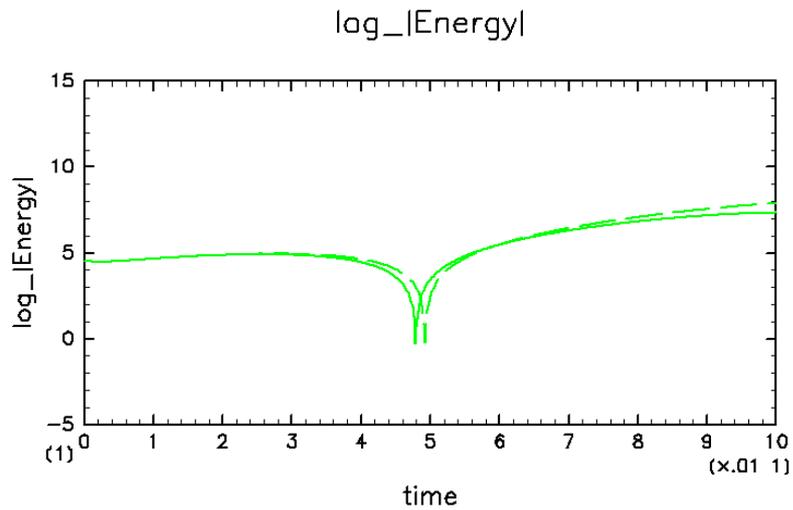
/usr/bin/gpview 2013-02-27

E_oscillation.nc@log_E

図 4.7.6: 設定 2 における $\log_e |E|$, $t = 0.0 \sim 1.0$

表現される流体運動をよく表現できているのは, 擾乱の成長の非常に初期の段階であるように見える.

次に、擾乱の振幅が非常に小さい時間、ここでは $t = 0.00 \sim 0.10$ までの時間を拡大したグラフを以下に示す。これを見ることにより、設定 2 における線形安定性解



/usr/bin/gpview 2013-02-18

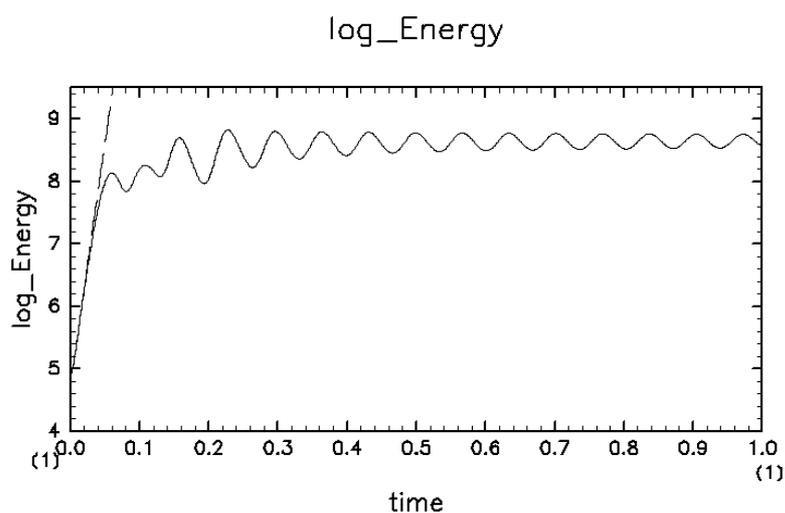
E_oscillation.nc@log_E

図 4.7.7: 設定 2 における $\log_e |E|$, $t = 0.0 \sim 0.10$

析の有効範囲は $t = 0.000 \sim 0.03$ の非常に初期の段階においてのみであることが示された。

設定 III

この設定においては, 単純に線形化した方程式系を数値計算することによって得られる $\log_e E$ と, 支配方程式系を数値計算することによって得られる $\log_e E$ を比較する. これにより, 線形安定性解析の有効範囲を考察する. $t = 0.0 \sim 1.0$ まで比較したグラフを以下に示す. このグラフより, 線形安定性解析が支配方程式系で表現



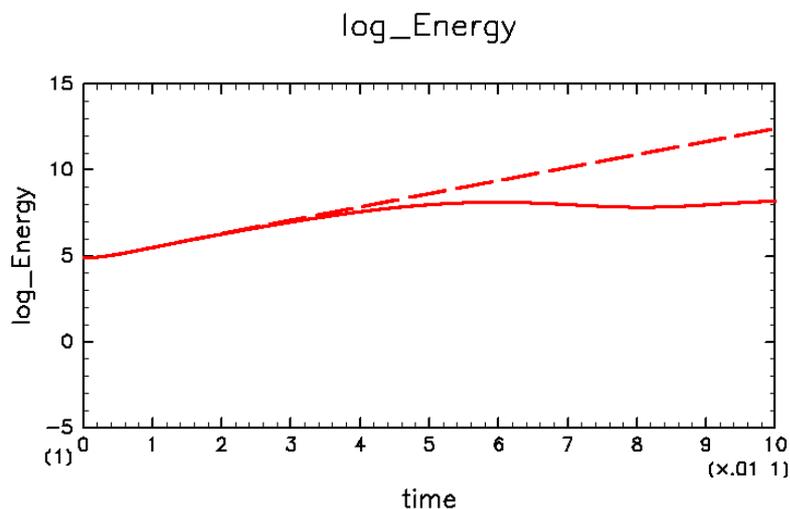
/usr/bin/gxview 2013-02-27

E_growing.nc@log_E

図 4.7.8: 設定 3 における $\log_e E$, $t = 0.0 \sim 1.0$

される流体運動をよく表現できているのは, 擾乱の成長の非常に初期の段階であるように見える.

次に、擾乱の振幅が非常に小さい時間、ここでは $t = 0.00 \sim 0.10$ までの時間を拡大したグラフを以下に示す。これを見ることにより、設定 3 における線形安定性解



/usr/bin/gpview 2013-02-27

E_growing.nc@log_E

図 4.7.9: 設定 3 における $\log_e E$, $t = 0.00 \sim 0.10$

析の有効範囲は $t = 0.00 \sim 0.03$ の非常に初期の段階においてのみであることが示された。

4.8 それぞれの場の時間推移

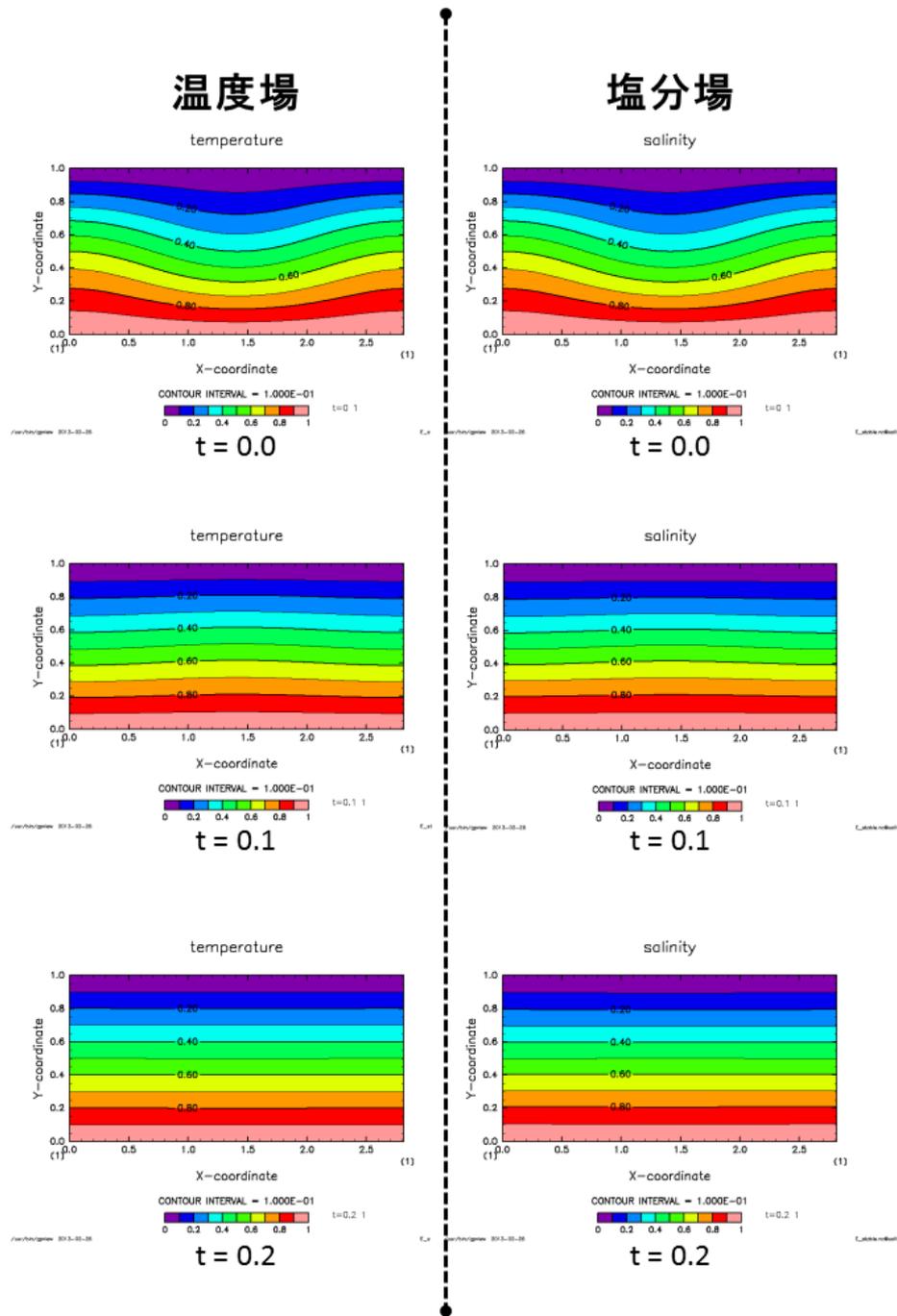
この節では微小な擾乱二重拡散対流における温度場、塩分場、流線関数場それぞれの数値計算結果を示す。これは二重拡散対流の具体的なイメージを掴むために有用であると考えられる。

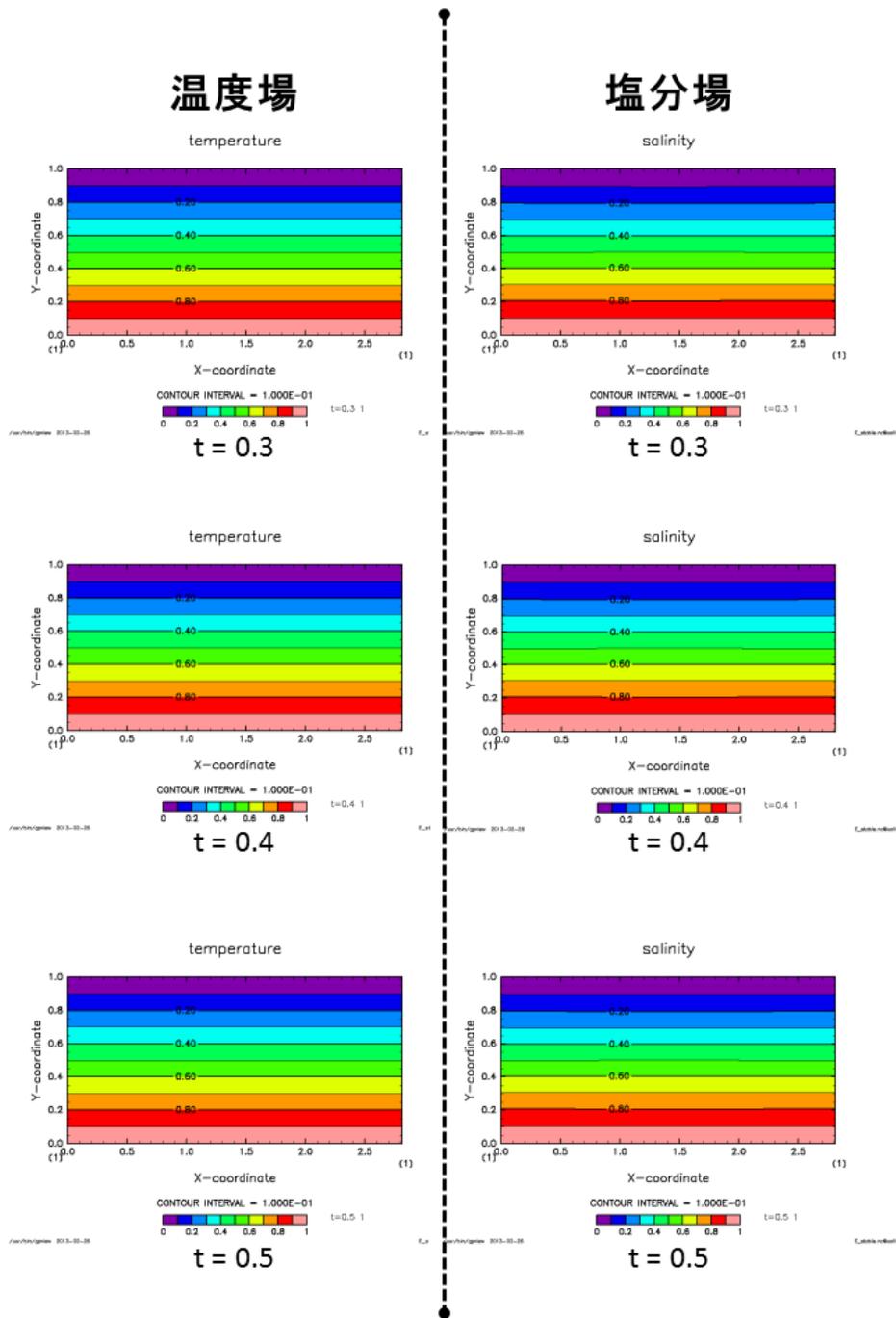
設定

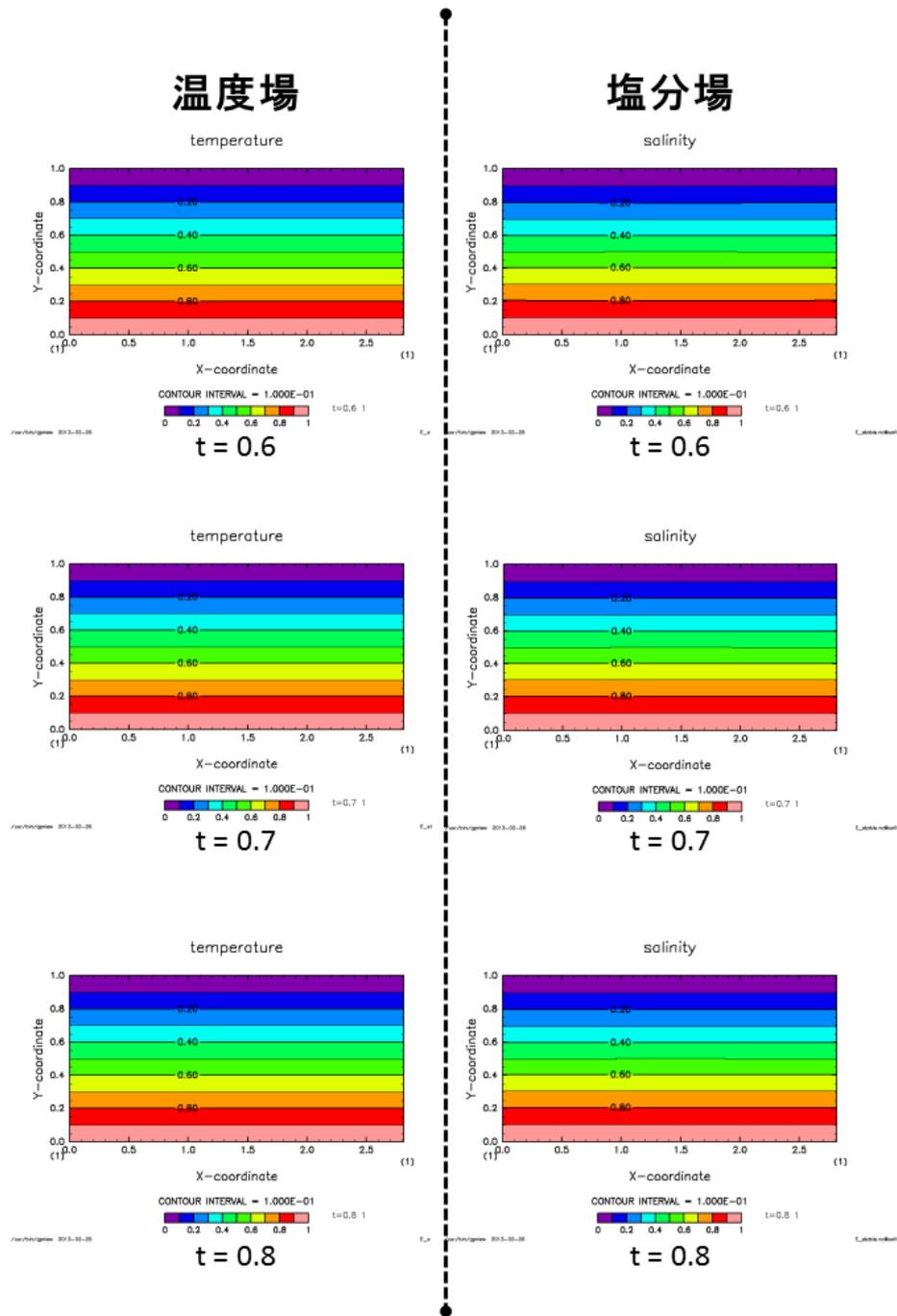
今回は以下の設定で数値計算を行う。水平鉛直 2 次元領域を考える。鉛直方向を z ($0 \sim 1$) 方向、水平方向を x ($0 \sim 2$) 方向とする。

- 格子点設定は z 方向に 128, x 方向に 256 とした
- 切断波数設定は z 方向は 84, x 方向は 84 とした
- 時間差分間隔は $\Delta t = 10^{-6}$ とし, 計算時間は $t = 1.0$ までとした.
- 時間差分の方法はオイラー法とした
- プラントル数 Pr は 10.0, 拡散係数比 τ は 0.01 とした
- レイリー数 Ra' , Rs' は $Ra = 2.0, Ra = 4.0, Ra = 6.0, Ra = 4.0, Ra = 10.0, Ra = 4.0$ の 3 つの設定で行った.

Ra=2.0, Rs=4.0 の場合

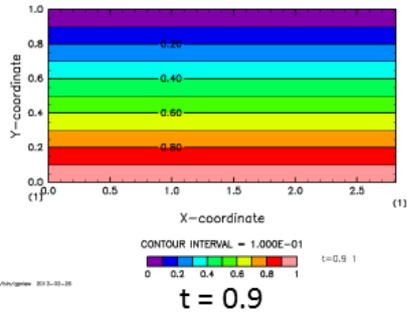






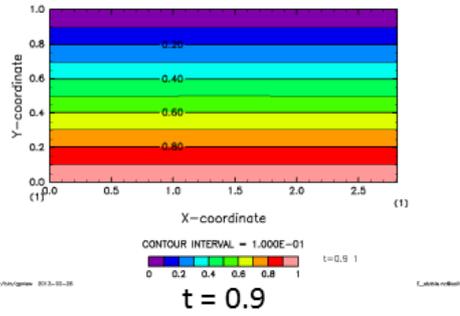
温度場

temperature

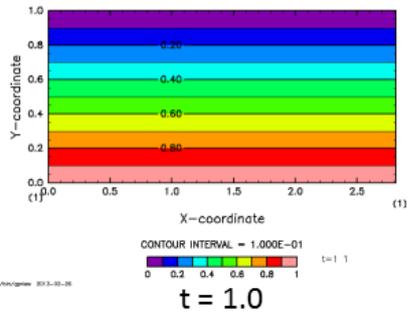


塩分場

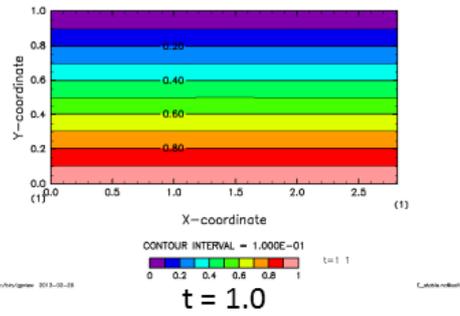
salinity



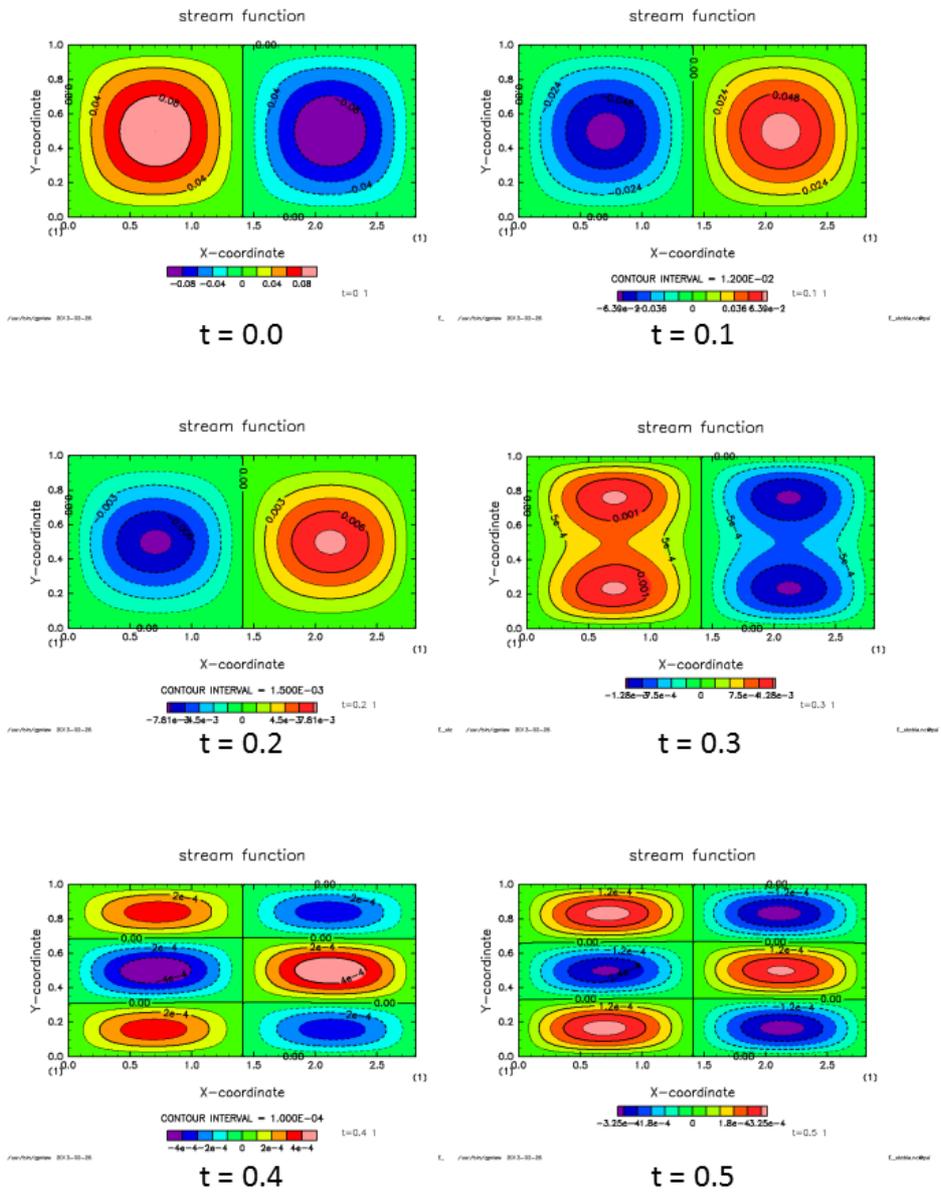
temperature



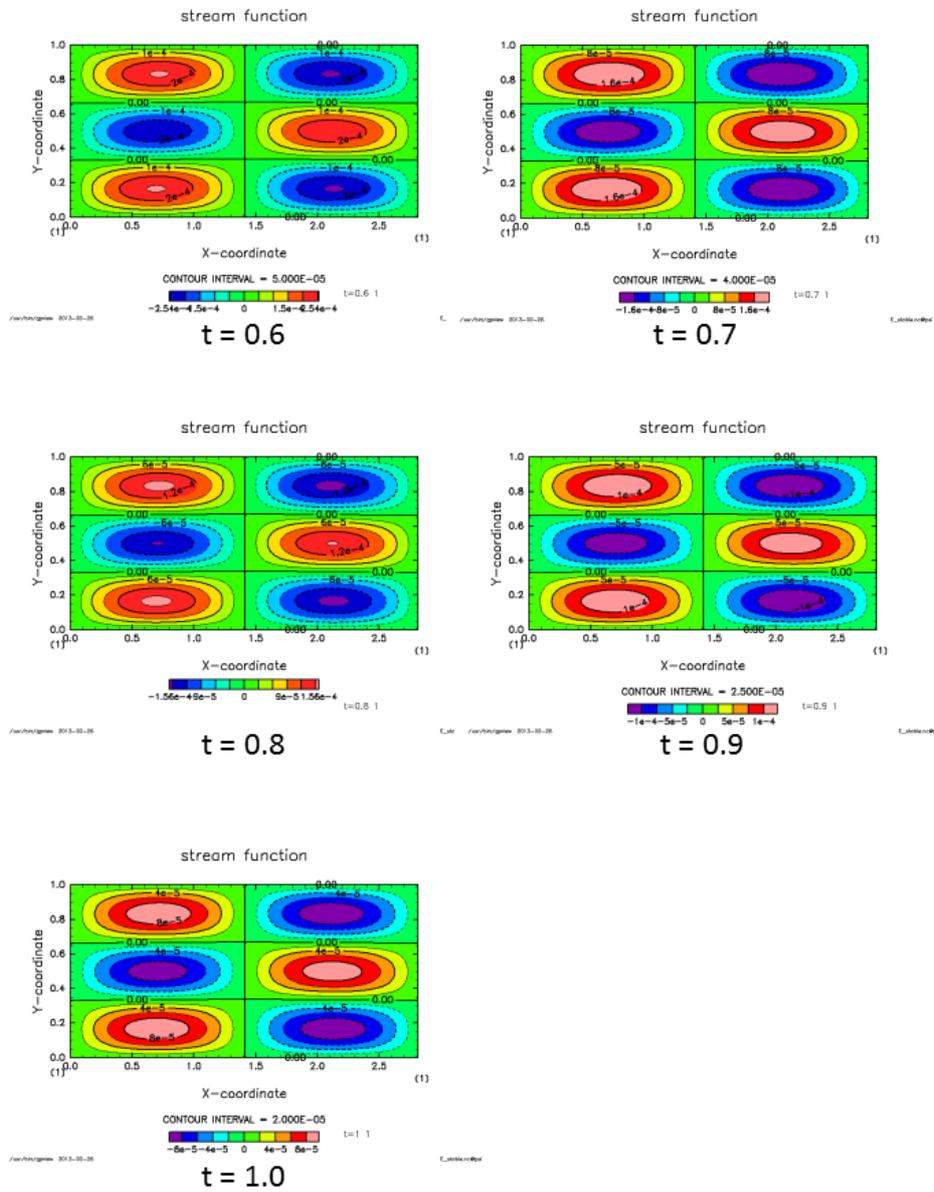
salinity



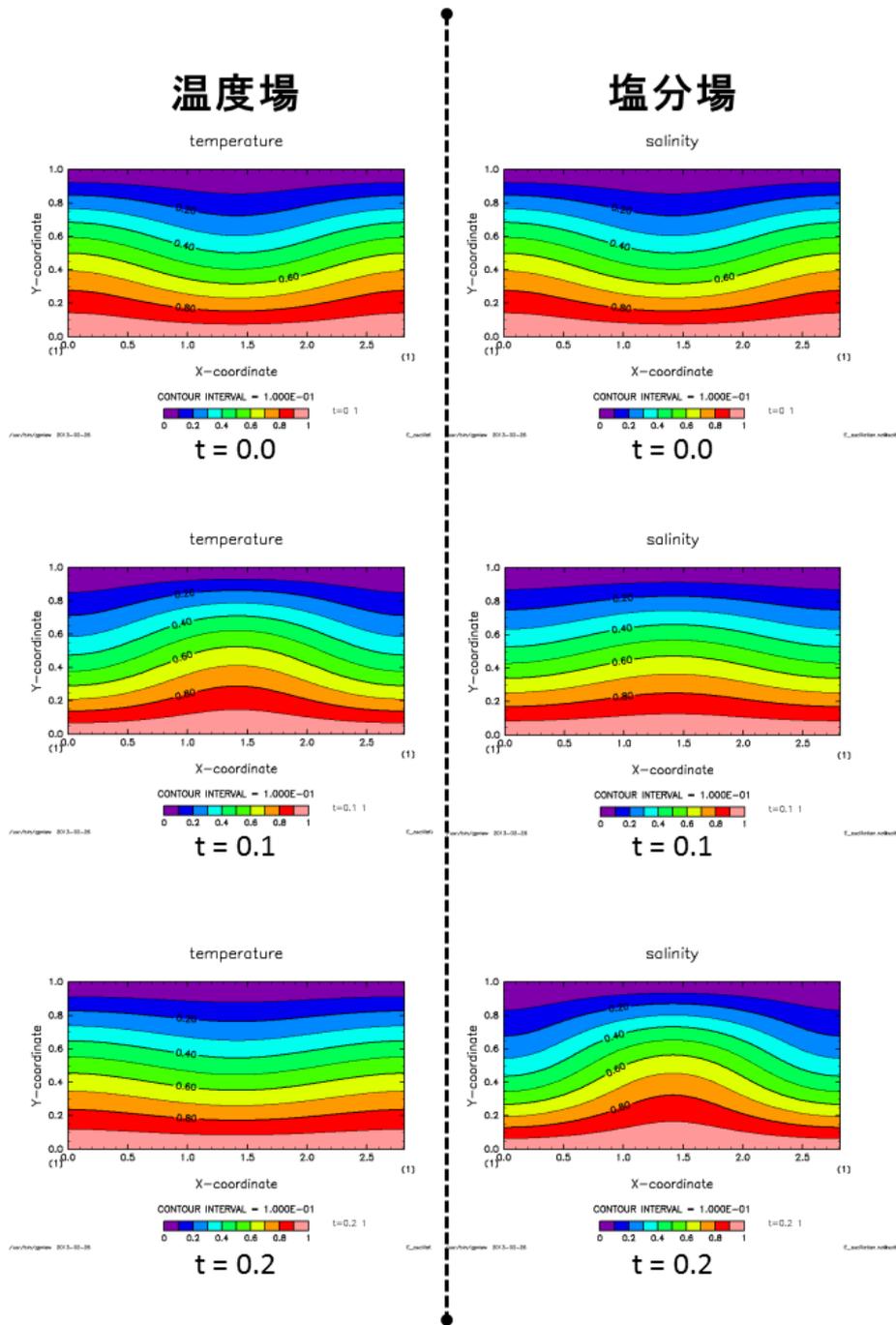
流线関数



流线関数

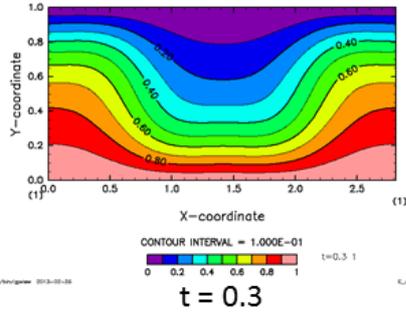


Ra=6.0, Rs=4.0 の場合



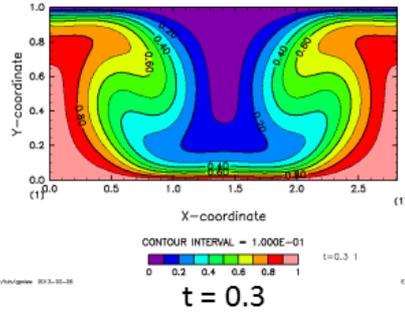
温度场

temperature

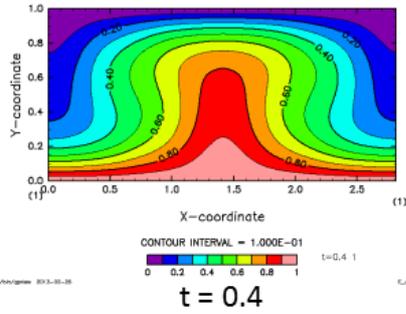


塩分場

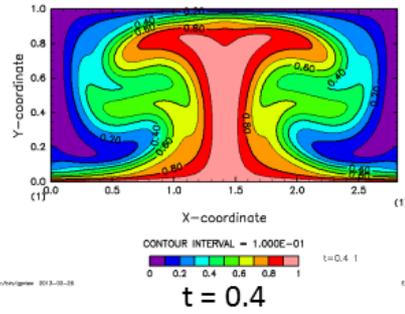
salinity



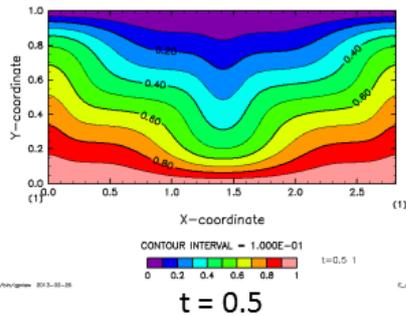
temperature



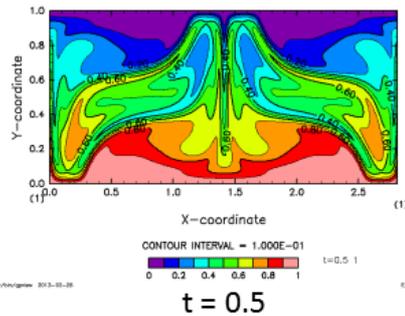
salinity



temperature

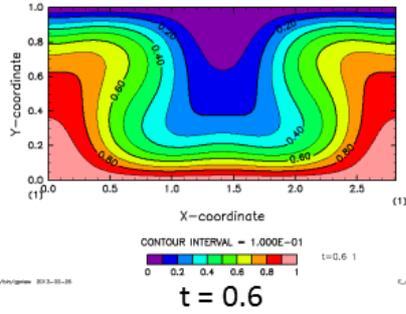


salinity



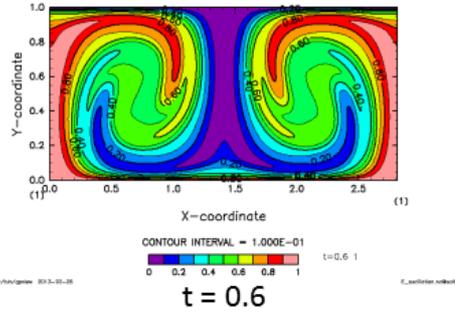
温度場

temperature

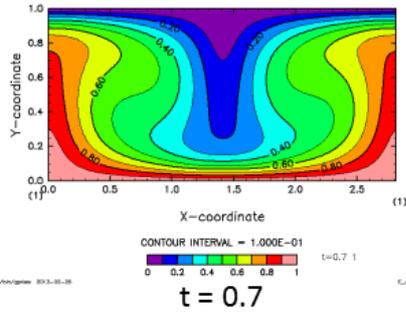


塩分場

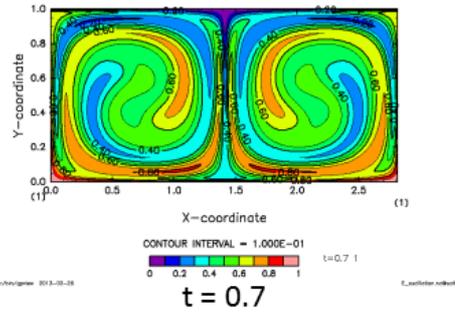
salinity



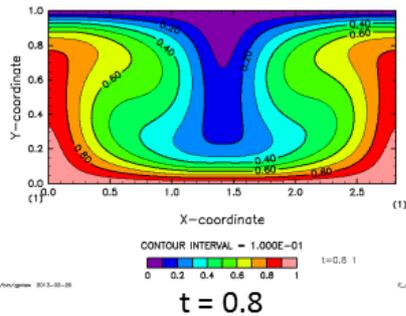
temperature



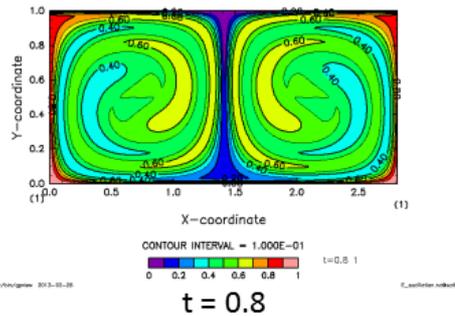
salinity



temperature

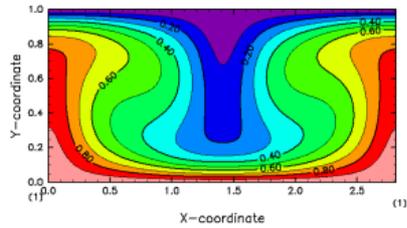


salinity



温度場

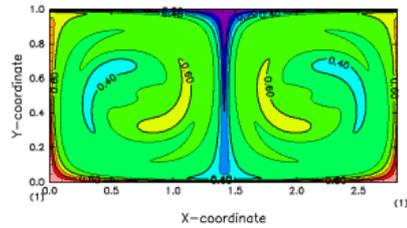
temperature



t = 0.9

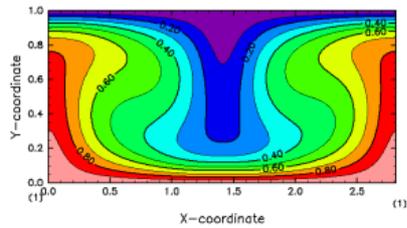
塩分場

salinity



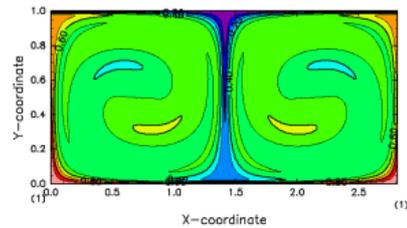
t = 0.9

temperature



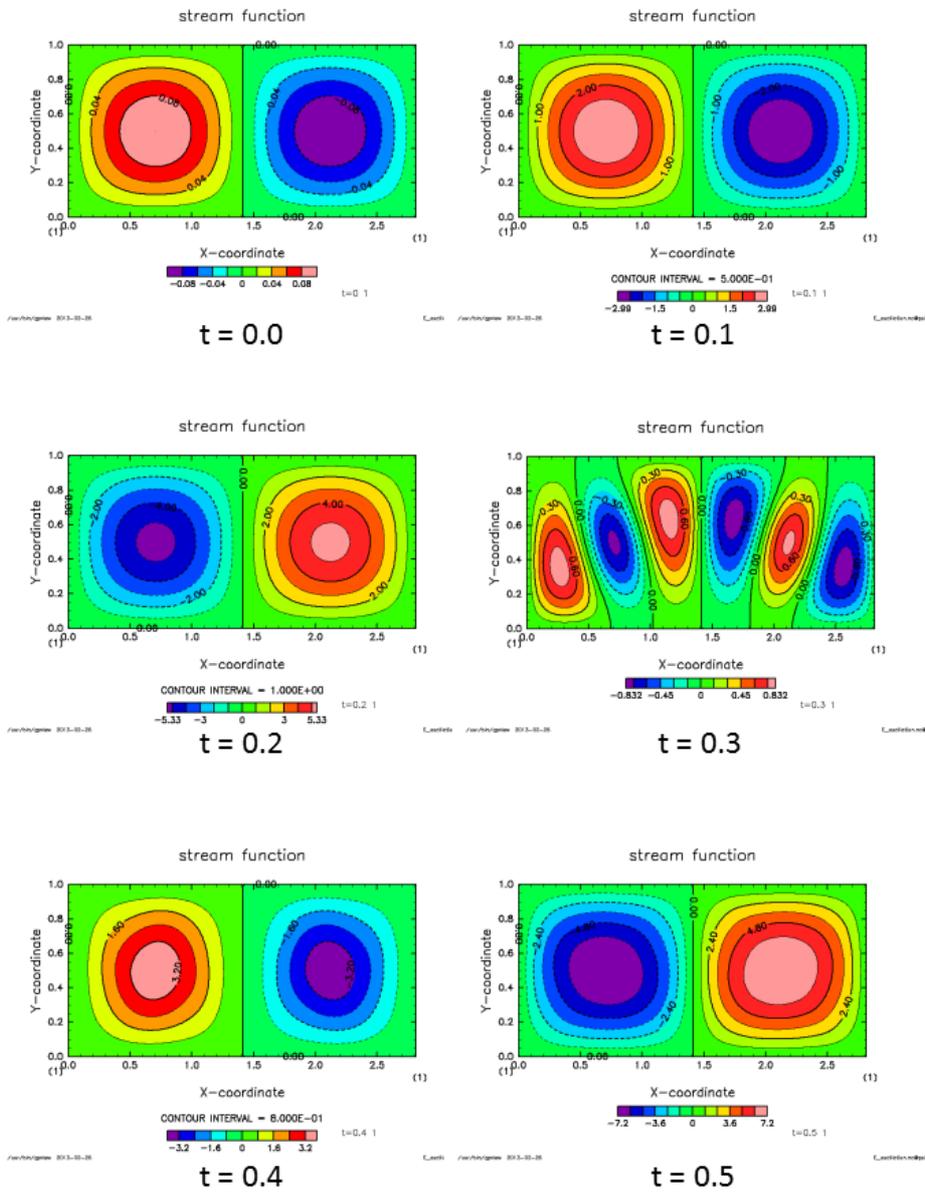
t = 1.0

salinity

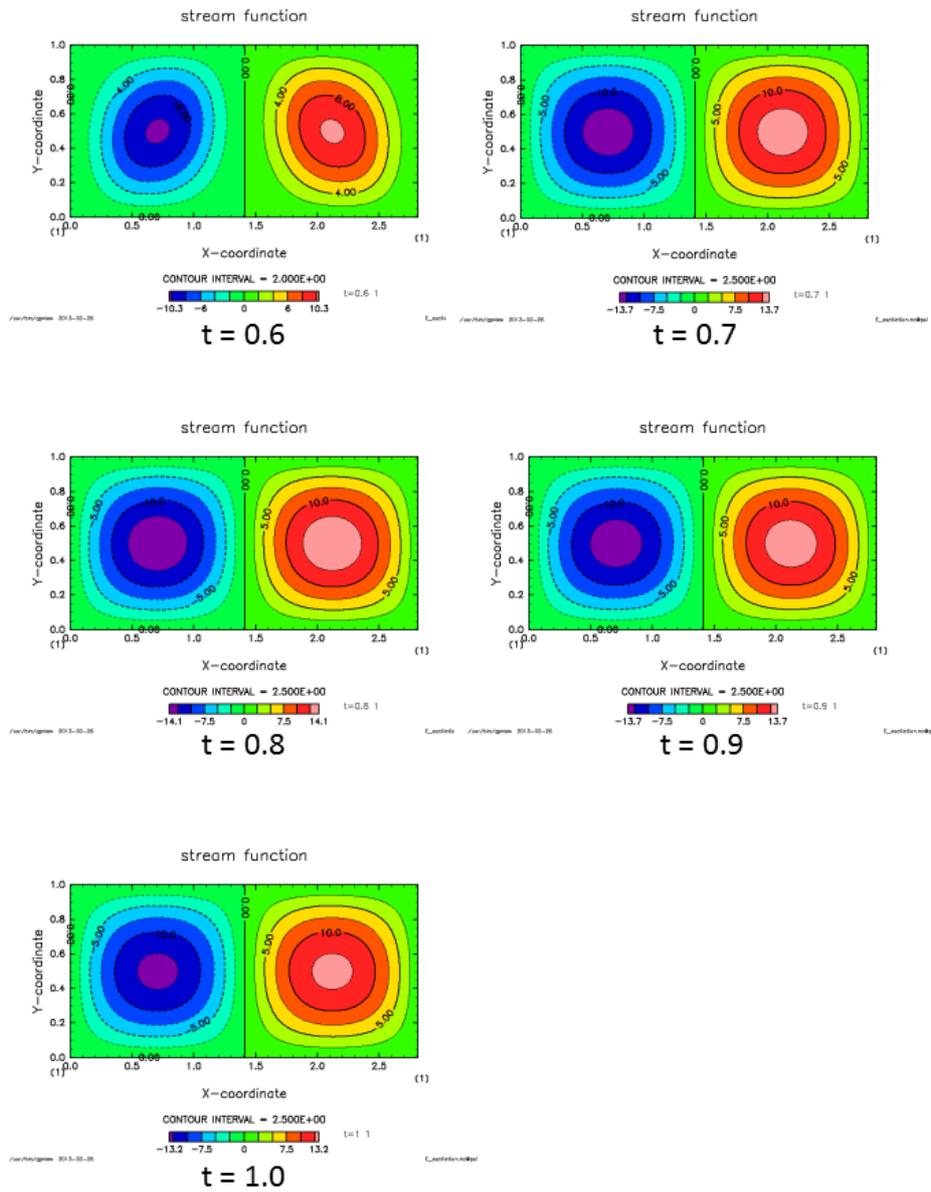


t = 1.0

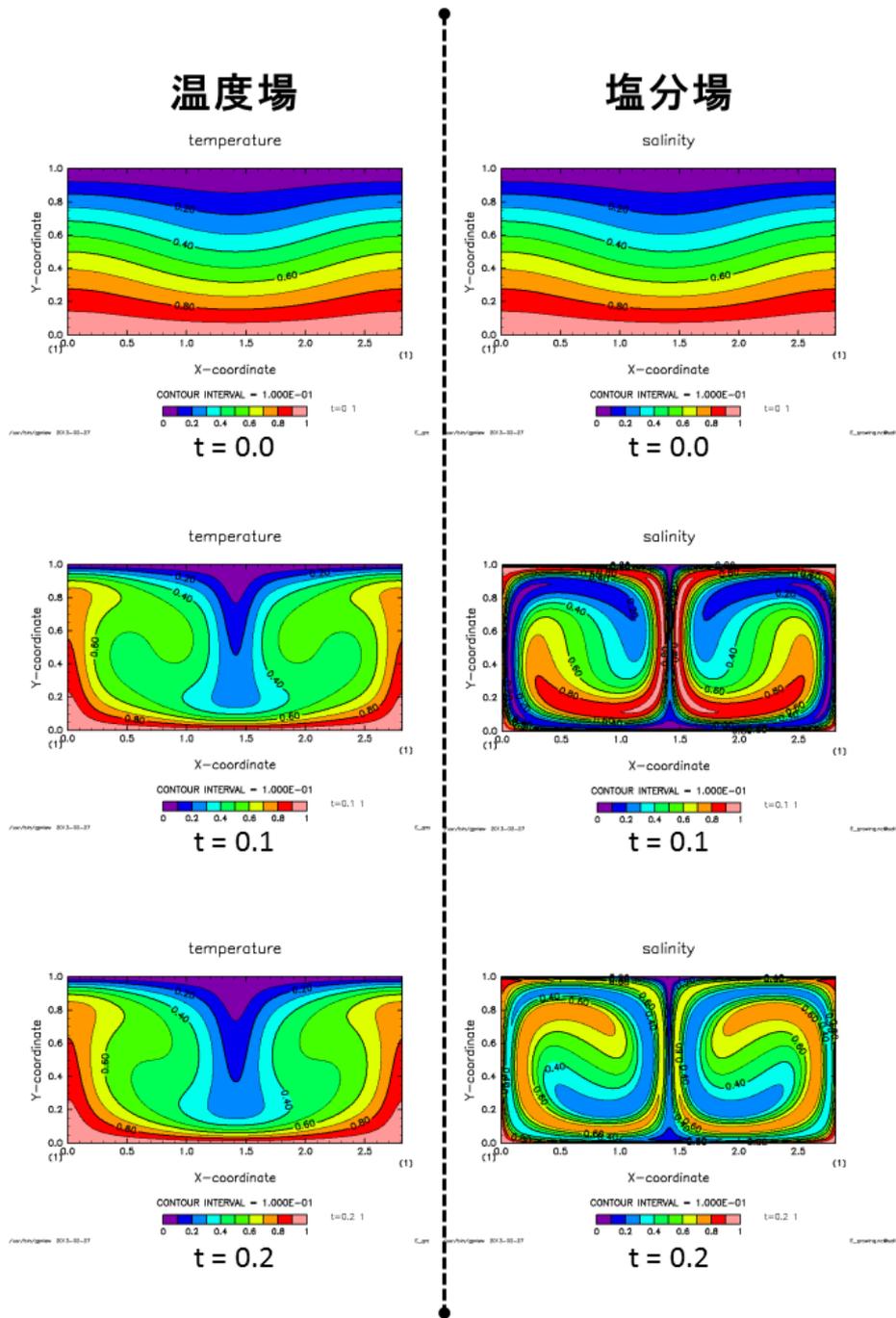
流线関数



流线関数

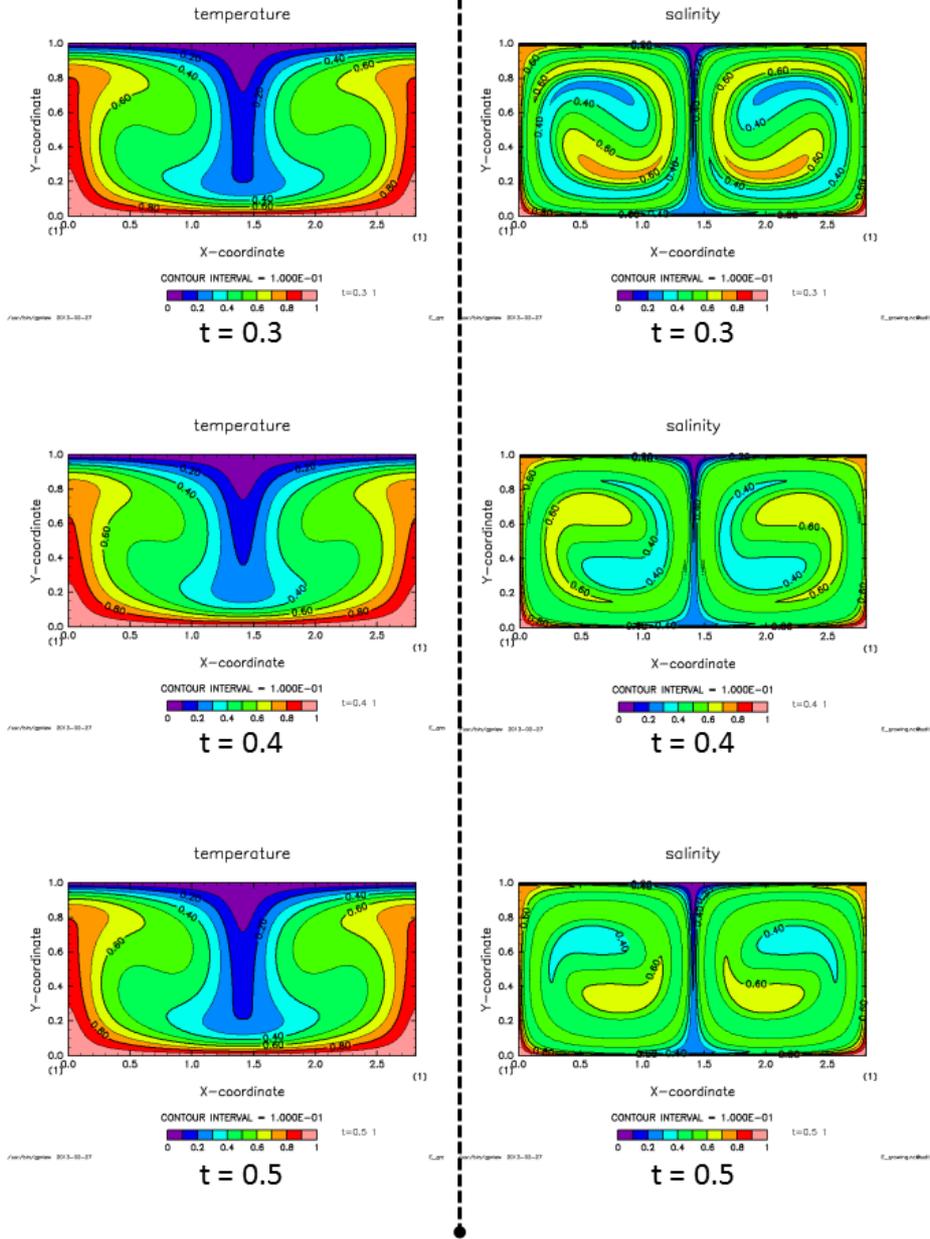


Ra=10.0, Rs=4.0 の場合



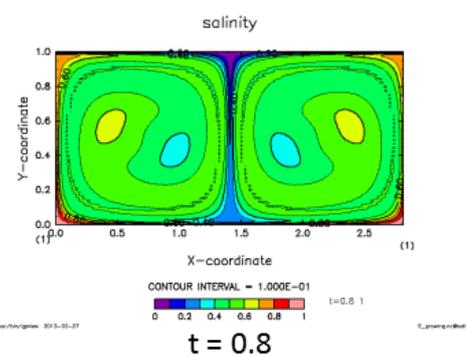
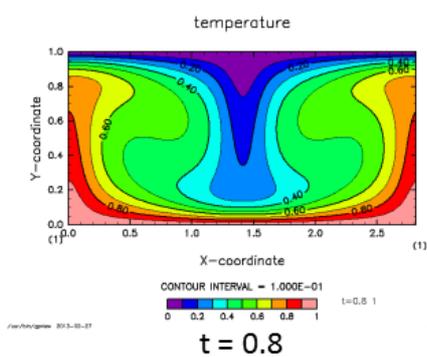
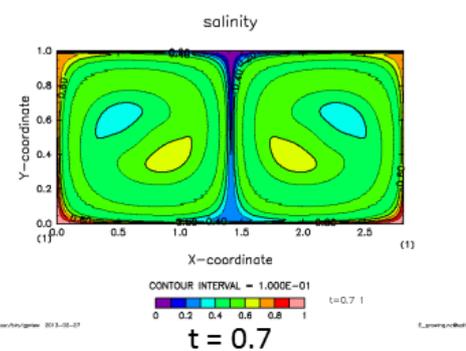
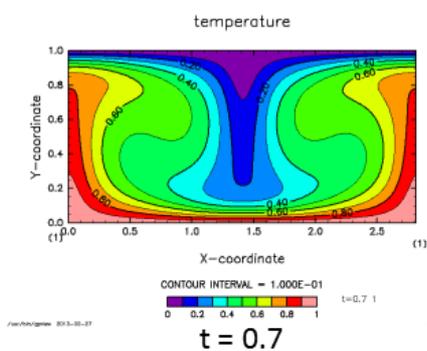
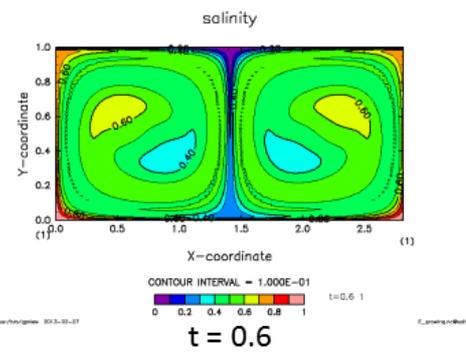
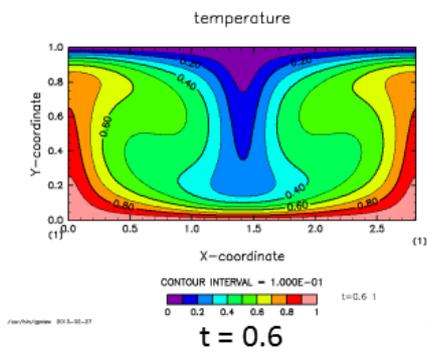
温度場

塩分場



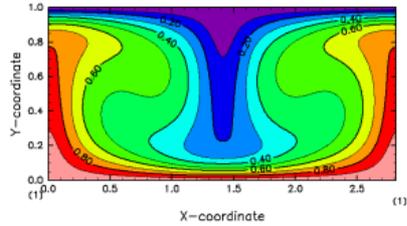
温度场

塩分場



温度场

temperature



CONTOUR INTERVAL = 1.000E-01
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1 t=0.9 1

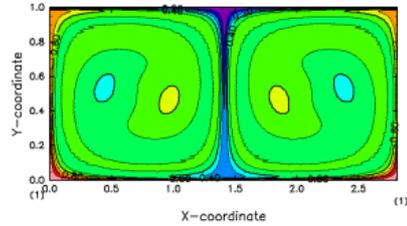
t = 0.9

/usr/Archi/gnuplot 2013-02-27

C:\gn

塩分場

salinity



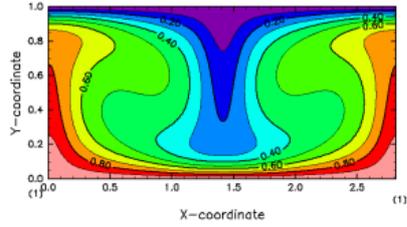
CONTOUR INTERVAL = 1.000E-01
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1 t=0.9 1

t = 0.9

C:\gn

E:\gnuplot\gn

temperature



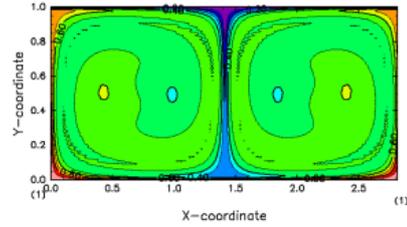
CONTOUR INTERVAL = 1.000E-01
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1 t=1 1

t = 1.0

/usr/Archi/gnuplot 2013-02-27

C:\gn

salinity



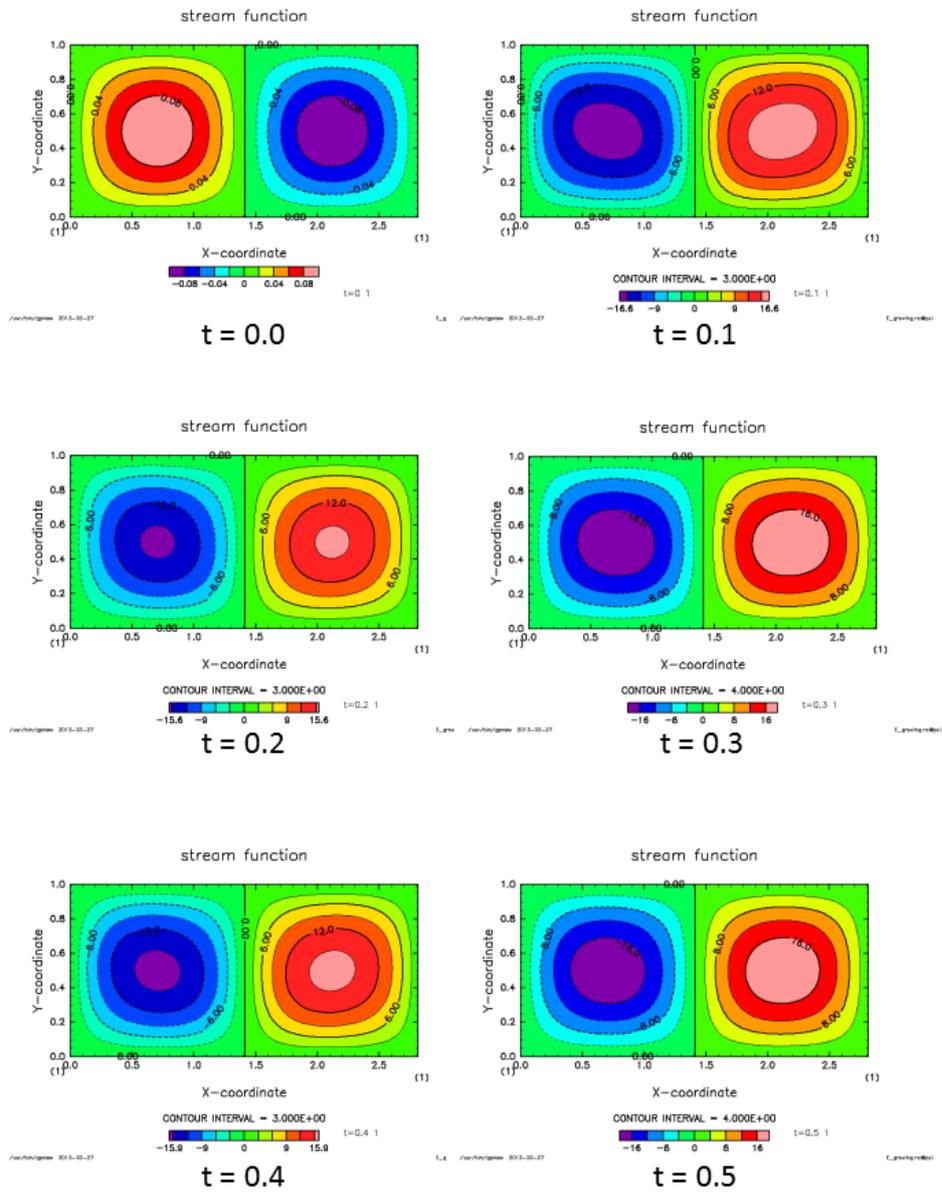
CONTOUR INTERVAL = 1.000E-01
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1 t=1 1

t = 1.0

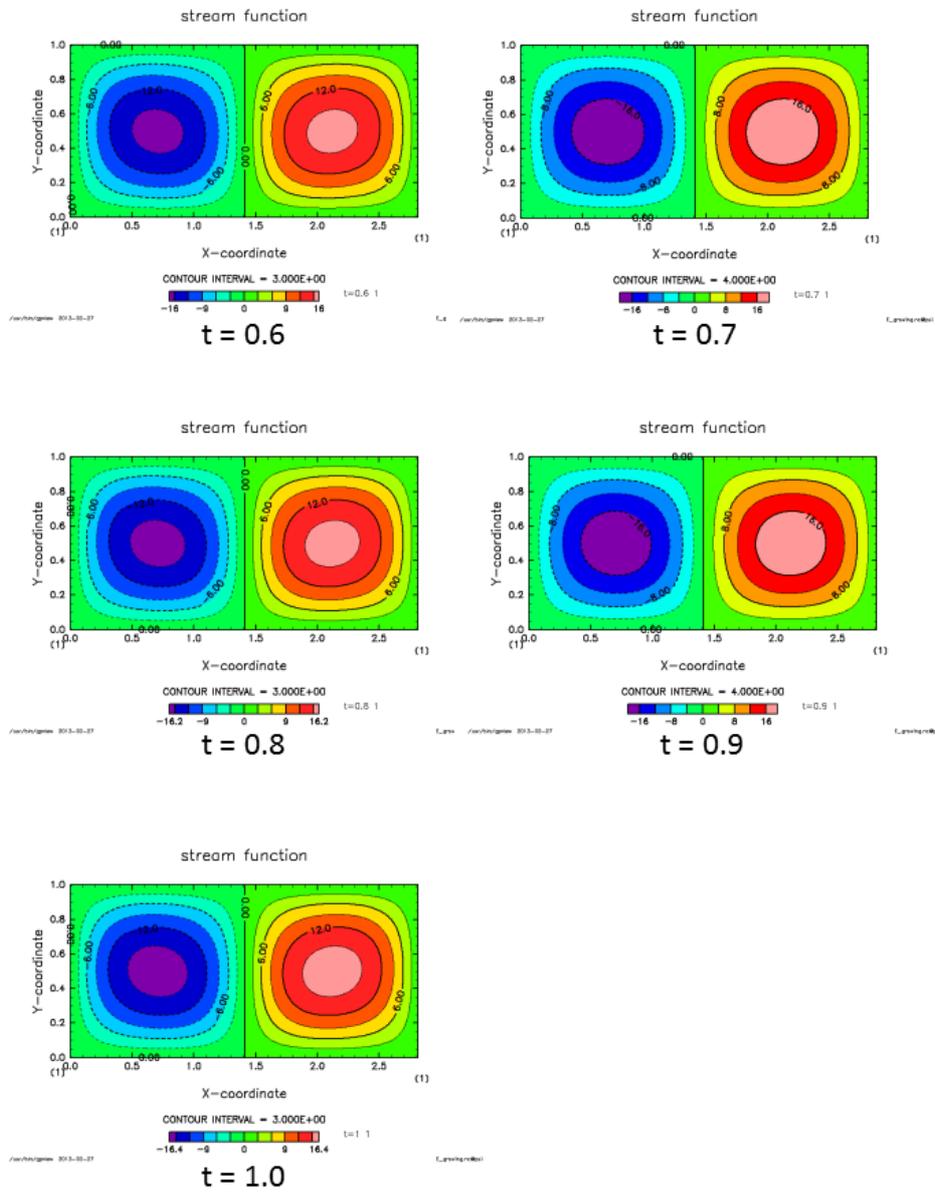
C:\gn

E:\gnuplot\gn

流线関数



流线関数



第 5 章 まとめ

本研究においては二重拡散対流の線形安定性解析とその有効範囲を考察した。基本場に擾乱を置いた場合の流体運動を考えた。ここで考えなければならないのは、温度と塩分の拡散係数の違いである。実際のところ、この 2 つの拡散係数を κ , κ_s とすると、本研究中に表現しているように拡散係数の比は τ として

$$\tau = \frac{\kappa_s}{\kappa} = 10^{-2}$$

程度のものである。つまり塩分の拡散より、温度の拡散のほうが 100 倍速いということである。本研究のテーマである二重拡散対流はこの拡散速度の違いによって発生する。

まずブシネスク近似をされた水平 2 次元の流体層において、方程式系を線形化し、二重拡散対流の発生条件を調べた。温度のレイリー数に関する数値 Ra' 、塩分のレイリー数に関する数値 Rs' を設定することにより、安定解、振動増幅解、定常増幅解の 3 種類の解が見つかった。

次に線形解析によって得られた解析解が、二重拡散対流においてどのような意味を持つのかを地球流体電脳倶楽部の SPMODEL を用いて数値実験した結果と見比べることにより考察した。この結果、非線形項を含めた方程式系においては、時間が経つにつれて、線形解析で得られる解とは離れた流体運動をすることがわかった。これは擾乱が成長してくるにつれて非線形項 $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ の効果が無視できなくなることからだと思われる。言い換えれば、二重拡散対流において線形解析で得られた解析解は、場に存在する擾乱が非常に小さい場合においてのみ、有効であることが確認された。

付 録 A 流線関数

本研究では x, z の 2 次元平面を考えている. ゆえに速度ベクトルは

$$\mathbf{u} = (u, 0, w) \quad (\text{A.1})$$

と表現される. これは x と z の関数であるから, ベクトルポテンシャルを \mathbf{A} と置くと

$$\mathbf{A} = (0, \Psi, 0) \quad (\text{A.2})$$

の形となる. このとき \mathbf{u} は y 方向の単位ベクトルを \mathbf{e}_y と考えると

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{e}_y \times \nabla \Psi \\ &= \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}, 0, -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

すなわち成分で書き下すと

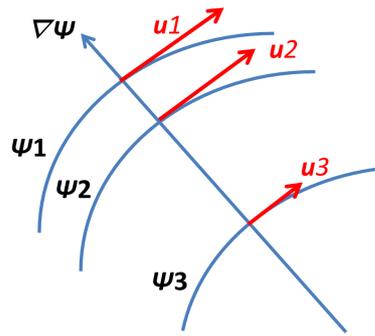
$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (\text{A.4})$$

となる. ここで座標系は左手系をとっている. 同様に速度ベクトルの大きさ $|\mathbf{u}|$ も Ψ を用いて表現することができ, 前の結果を利用すると

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}| &= \sqrt{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^2 + \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2} \\ &= \nabla \Psi \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

とできる.

ここで $\Psi = \text{一定}$ の曲線を考えると, (A.3), (A.5) より流体は $\Psi = \text{一定}$ の曲線に沿って流れ, $\nabla \Psi$ が大きいところほど流速は大きくなることがわかる. 図に表現すると次の図のようになる.



ここで ψ_1, ψ_2, ψ_3 はそれぞれ $\psi = \text{const.}$ を結んだ曲線である.

付 録 B (3.2.23) の導出

(3.2.19), (3.2.22) から (3.2.23) が導出できることを確認する.

(3.2.19) より

$$q = \begin{cases} \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \\ \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

の 2 つの実数解が存在する可能性がある. だが, ここでは実部が正となる q が少なくとも 1 つは存在する領域を考えているので, $\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$ という正の q は存在するはずである. これを (3.2.22) に代入することにより

$$\begin{aligned} \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \{b + a(c - a)\} + d - b(c - a) &= 0 \\ \sqrt{a^2 - 4b} \{b + a(c - a)\} &= a\{b + a(c - a)\} + 2\{d - b(c - a)\} \\ (a^2 - 4b) \{b + a(c - a)\}^2 &= [a\{b + a(c - a)\} + 2\{d - b(c - a)\}]^2 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

ここで (3.2.18)^{*1}より $c = \frac{3}{4}a$ であるので

^{*1}(3.2.18) を再掲する.

$$\begin{aligned} a &= \frac{2}{3}(Pr + \tau + 1), \\ b &= \frac{1}{3}Pr + Pr\tau + \tau - Pr(Ra' - Rs'), \\ c &= \frac{1}{2}(Pr + \tau + 1), \\ d &= \frac{1}{2} - Pr\tau - Pr(Rs' - \tau Ra'). \end{aligned} \quad (\text{3.2.18})$$

$$\begin{aligned}
& (a^2 - 4b) \left(b - \frac{a^2}{4}\right)^2 = \left\{ a \left(b - \frac{a^2}{4}\right) + 2 \left(d + \frac{ab}{4}\right) \right\}^2 \\
& a^2 \left(b - \frac{a^2}{4}\right)^2 - 4b \left(b - \frac{a^2}{4}\right)^2 \\
& \quad = a^2 \left(b - \frac{a^2}{4}\right)^2 + 4a \left(b - \frac{a^2}{4}\right) \left(d + \frac{ab}{4}\right) + 4 \left(d + \frac{ab}{4}\right)^2 \\
& b \left(b - \frac{a^2}{4}\right)^2 = -a \left(b - \frac{a^2}{4}\right) \left(d + \frac{ab}{4}\right) - \left(d + \frac{ab}{4}\right)^2 \tag{B.3} \\
& b \left(b^2 - \frac{a^2b}{2} + \frac{a^4}{16}\right) = -ad \left(b - \frac{a^2}{4}\right) - \frac{a^2b}{4} \left(b - \frac{a^2}{4}\right) - \left(d + \frac{ab}{4}\right)^2 \\
& b \left(b^2 - \frac{a^2b}{4}\right) = -ad \left(b - \frac{a^2}{4}\right) - \left(d + \frac{ab}{4}\right)^2 \\
& b^3 - \frac{a^2b^2}{4} = -abd + \frac{a^3d}{4} - d^2 - \frac{1}{2}abd - \frac{a^2b^2}{16} \\
& b^3 - \frac{3}{16}a^2b^2 + \frac{3}{2}abd + d^2 - \frac{a^3}{4}d = 0
\end{aligned}$$

となることが確認でき, (3.2.23) が導出できた.

付 録 C 考慮する Ra' , Rs' の領域

付録 B で考えた実部が正となる q が少なくとも 1 つは存在する領域であるが、言い換えれば $\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$ という正の q は存在する領域である。これは

$$\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \geq 0 \tag{C.1}$$

を満たす領域であり、これに a, b と具体的な Pr, τ を代入すると

$$Ra' \geq Rs' + \tau + \frac{\tau}{Pr} + \frac{1}{3} \tag{C.2}$$

という領域が条件を満たす領域であることがわかる。単に (3.2.24) を Rs' を固定することにより、ニュートン法により解き、 $Ra' - Rs'$ 平面にプロットすると下の図のようになり $Rs' = 0$ 付近で不連続な値をとってしまう。これは $Rs' = 0$ において

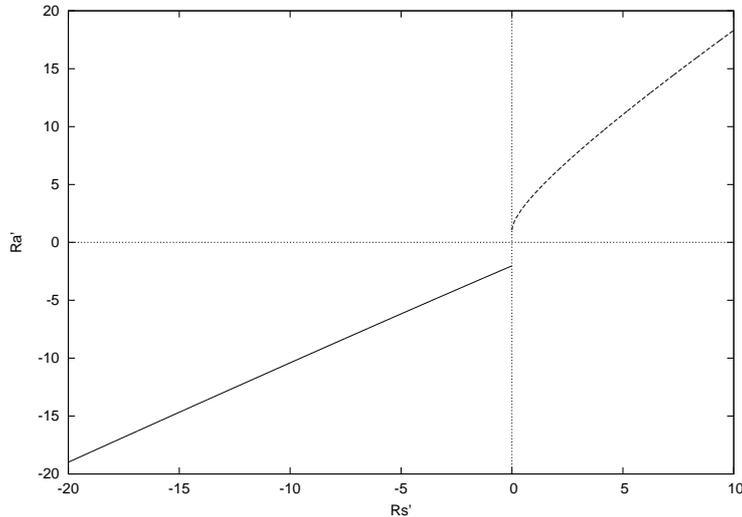
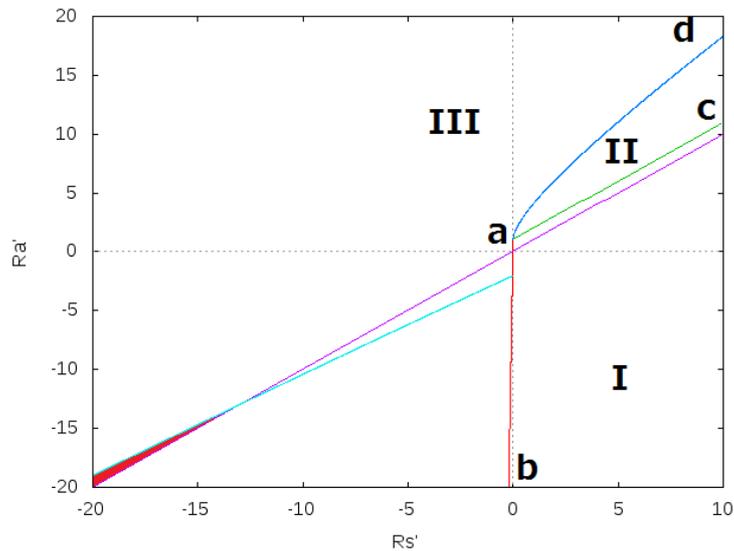


図 3.0.1: (3.2.24) の解

$f(Ra', Rs')$ は重解を持ち、それ以降では虚数解が生じることに所因する。この条件と、本文中で示した領域 I, II, III を合わせて考えた結果、下の図が描ける。 Rs' が



−13 を下回る赤く塗りつぶした範囲では、解が 3 つの実数解になるのか 1 つの実数解と 2 つの虚数解 (複素共役解) になるのかの境目の曲線以下であり、すなわち実数解が 1 つと虚数解が 2 つ存在し、実部が正となる q が少なくとも 1 つは存在する領域が存在するようである。つまりこの領域では、領域 II のように擾乱が振動しながら指数関数的に増幅していく様子が見られると予想する。

あるいは、ここにおいては $Ra' \leq 0$, $Rs \leq 0$ である。つまり領域の上層には高温度子塩分の流体、下層には低温低塩分の流体が存在している領域である。この領域では本論文の第 2 章で述べたように salt finger 型対流が生じるのではないかと考える。

本研究ではこの領域については取り扱わないこととする。これに関してはまだ考える必要があり、今後の課題としたい。

付録 D (4.2.11) の変形

議論しなかった $J(\zeta, \Psi)$, $J(T, \Psi)$, $J(S, Psi)$ を変形していく. $J(\zeta, \Psi)$ について考える. これは

$$J(\zeta, \Psi) = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (\text{D.1})$$

と表されるので, 上のヤコビアン の各項にそれぞれ (4.2.1), (4.2.2) を代入すると

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M ik \frac{2\pi}{L_x} \hat{\zeta}_{k,m}(t) e^{i2\pi(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z)}, \quad (\text{D.2})$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M im \frac{2\pi}{L_z} \hat{\Psi}_{k,m}(t) e^{i2\pi(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z)}, \quad (\text{D.3})$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M im \frac{2\pi}{L_z} \hat{\zeta}_{k,m}(t) e^{i2\pi(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z)}, \quad (\text{D.4})$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \sum_{k=-K}^K \sum_{m=-M}^M ik \frac{2\pi}{L_x} \hat{\Psi}_{k,m}(t) e^{i2\pi(\frac{k}{L_x}x + \frac{m}{L_z}z)} \quad (\text{D.5})$$

となる. そのまま単純にかけ合わせると

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial z} = - \sum_{K_1, M_1} \sum_{K_2, M_2} k_1 m_2 \frac{4\pi^2}{L_x L_z} \hat{\zeta}_{k_1, m_1}(t) \hat{\Psi}_{k_2, m_2}(t) e^{i2\pi(\frac{k_1+k_2}{L_x}x + \frac{m_1+m_2}{L_z}z)}, \quad (\text{D.6})$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = - \sum_{K_1, M_1} \sum_{K_2, M_2} m_1 k_2 \frac{4\pi^2}{L_x L_z} \hat{\zeta}_{k_1, m_1}(t) \hat{\Psi}_{k_2, m_2}(t) e^{i2\pi(\frac{k_1+k_2}{L_x}x + \frac{m_1+m_2}{L_z}z)} \quad (\text{D.7})$$

よって $J(\zeta, \Psi)$ は

$$\begin{aligned} & J(\zeta, \Psi) \\ &= \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ &= \sum_{K_1, M_1} \sum_{K_2, M_2} \frac{4\pi^2}{L_x L_z} (k_2 m_1 - k_1 m_2) \hat{\zeta}_{k_1, m_1}(t) \hat{\Psi}_{k_2, m_2}(t) e^{i2\pi(\frac{k_1+k_2}{L_x}x + \frac{m_1+m_2}{L_z}z)} \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

とすると、非線形項であるヤコビアンは x, z 方向の切断波数がそれぞれ $2K - 1, 2M - 1$ の切断級数

$$J(\zeta, \Psi) = \sum_{k=-(2K-1)}^{2K-1} \sum_{m=-(2M-1)}^{2M-1} \frac{4\pi^2}{L_x L_z} (k_2 m_1 - k_1 m_2) \hat{\zeta}_{k_1, m_1}(t) \hat{\Psi}_{k_2, m_2}(t) e^{i2\pi \left(\frac{k_1+k_2}{L_x} x + \frac{m_1+m_2}{L_z} z \right)} \quad (\text{D.9})$$

と書ける.

同様に $J(T, \Psi), J(S, \Psi)$ についても

$$J(T, \Psi) = \sum_{k=-(2K-1)}^{2K-1} \sum_{m=-(2M-1)}^{2M-1} \frac{4\pi^2}{L_x L_z} (k_2 m_1 - k_1 m_2) \hat{T}_{k_1, m_1}(t) \hat{\Psi}_{k_2, m_2}(t) e^{i2\pi \left(\frac{k_1+k_2}{L_x} x + \frac{m_1+m_2}{L_z} z \right)}, \quad (\text{D.10})$$

$$J(S, \Psi) = \sum_{k=-(2K-1)}^{2K-1} \sum_{m=-(2M-1)}^{2M-1} \frac{4\pi^2}{L_x L_z} (k_2 m_1 - k_1 m_2) \hat{S}_{k_1, m_1}(t) \hat{\Psi}_{k_2, m_2}(t) e^{i2\pi \left(\frac{k_1+k_2}{L_x} x + \frac{m_1+m_2}{L_z} z \right)} \quad (\text{D.11})$$

と書き表せる.

付 録 E 線形解析の持つ意味

ここでは例としてナビエ - ストークスの式を用いて、線形解析の持つ意味を示す。

ナビエ - ストークスの式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \left\{ \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right\} \quad (\text{E.1})$$

x, y 方向に広がる 2 次元の領域を考える。変数 \mathbf{u}, \mathbf{p} を一様で定常な基本場 $\mathbf{u}_0, \mathbf{p}_0$ とずれの部分 \mathbf{u}', \mathbf{p}' に分けて考えると (E.1) は

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}' = -\frac{1}{\rho} \nabla p' + \nu \left\{ \nabla^2 \mathbf{u}' + \frac{1}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}') \right\} \quad (\text{E.2})$$

とできる。この式において \mathbf{u}', \mathbf{p}' が非常に小さい時、左辺第二項の

$$(\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}' \quad (\text{E.3})$$

はさらに非常に小さいものとして無視できる。この考え方を線形化と呼ぶ。 \mathbf{u}', \mathbf{p}' が徐々に大きくなるに連れて (E.3) の式 (E.2) への寄与は大きくなり無視して考えることはできなくなる。つまり線形解析で得られる解析解は意味を成さなくなる。

謝辞

本研究に関して, 多くの方々にご指導とご協力を頂いた. 指導教員である林祥介教授と岩山隆寛准教授, 高橋芳幸助教授には研究の題目, 研究方針についての助言を頂いた.

河合佑太氏には数値計算を行うにあたり, 多くの助言を頂いた. また博士課程前期課程の皆様をはじめ, 地球および惑星大気科学研究室の皆様には, 研究の題目に関する相談から研究内容, 発表に関する相談まで数多くの助言を頂いた.

なお, 数値計算には地球流体電脳倶楽部の SPMODEL を用い, 計算結果の描画には GNUPLOT および DCL (地球流体電脳倶楽部ライブラリ) を用いた.

様々なご指導と協力を頂いた地球および惑星大気科学研究室の皆様には, ここに深く感謝の意を表する.

参考文献

1. 上川, 二重拡散対流, 地球流体電脳ノート
2. 及川正行, 柏木正, 伊賀啓太, 市川香, 柳哲雄, 2001: 地球環境を学ぶための流体力学, 70pp.
3. P.G. Baines, A.E. Gill, 1969: On thermohaline convection with linear gradients, *J. Fluid Mech.* **37** 289-306pp.
4. 石岡圭一, 2004: スペクトル法による数値計算入門, 1-29pp
5. 大関誠, 2006: スペクトルモデル入門, 気象研究ノート 第211号, 137-146pp
6. 竹広 真一, 佐々木 洋平, 森川 靖大, 石岡 圭一, 小高 正嗣, 高橋 芳幸, 西澤 誠也, 中島 健介, 石渡 正樹, 林 祥介, spmodel 開発グループ, 2011: 階層的地球流体力学スペクトルモデル集 (SPMODEL), <http://www.gfd-dennou.org/library/spmodel/>, 地球流体電脳倶楽部.
7. David G. Andrews, 2000: *An Introduction to Atmospheric Physics*, 126-130pp