

バスタブ渦の起源とその形成メカニズム

地球および惑星大気科学研究室 柏本 光司

はじめに

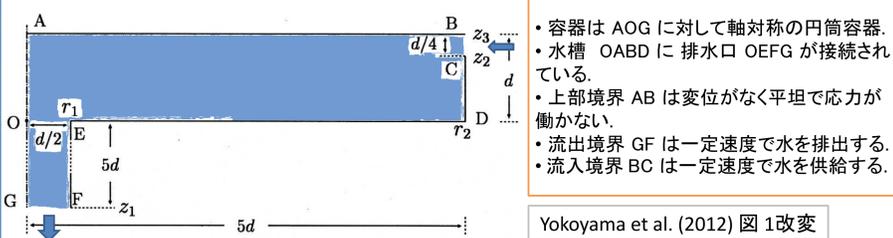
「バスタブの栓を抜いたときにできる渦は北半球では反時計回り、南半球では時計回りに回転する。」このような話を耳にしたことのある人は少なくないはずだ。このバスタブ渦と呼ばれる渦が発見されたのは最近のことではなく、長い間研究されてきた。それに関わらず、このバスタブ渦の回転方向は本当にコリオリ力により決定されるのか、バスタブ渦は何により生成されるのかは、まだ明確に示されていない。ここでは、バスタブ渦の起源とその形成メカニズムについて、数値シミュレーションによって研究した Yokoyama et al (2012) の論文を紹介する。

目的

- バスタブ渦の渦度がどのように供給されているのかを調べる。
- バスタブ渦の回転に対する地球の自転の影響を調べる。

定式化

● 仮定する容器



本実験で仮定する容器の鉛直断面図

● 基礎方程式

・ 連続の式と運動方程式.

- 排水口の直径 d と排水口の平均流速 \bar{w} で無次元化.
- 円筒座標系 (r, θ, z) , z 軸に関して回転対称.
- 非圧縮性流体.

円周方向の渦度方程式

$$\frac{\partial \omega_\theta}{\partial t} - J(\psi, \omega_\theta) - \frac{\omega_\theta}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \left(\frac{2u_\theta}{r} + \frac{1}{R_0} \right) \frac{\partial u_\theta}{\partial z} = \frac{1}{Re} \left(\Delta_2 \omega_\theta - \frac{\omega_\theta}{r^2} \right)$$

円周方向の運動方程式

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} - J(\psi, u_\theta) + \frac{u_\theta}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{1}{Re} \left(\Delta_2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} \right)$$

流線関数に関する Poisson 方程式

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \omega_\theta$$

t : 時間 u_θ : 周速度, ω : 円周方向の渦度, ψ : 流線関数,
 Re : Reynolds 数, $Re = 4Q/(\pi \nu d)$
 Ro : Rossby 数, $Ro = 2Q/(\pi d^3 \Omega)$,
 Q : 単位時間あたりの排出量,
 ν : 水の運動学的粘性, Ω : 角速度,

$$J(g, h) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial g}{\partial r} \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial r} \right),$$
$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

結果

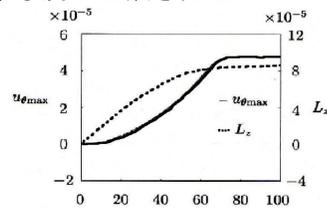
● 実験 1

⇒ 渦は生成されなかった。

$u_{\theta \max}$: 容器内の最大周速度
 r_{\max} : $u_{\theta \max}$ が現れる地点
 L_z : z 軸に沿った全角運動量
 I_z : z 軸に沿った局所角運動量

● 実験 2

⇒ 定常な渦が生成された。



実験 2 の最大周速度と全角運動量の時間発展。

Yokoyama et al. (2012) 図 9 改変

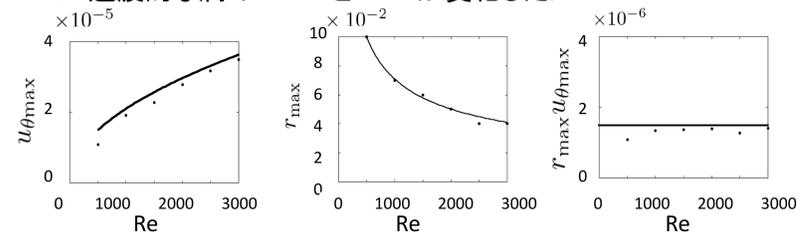
角運動量の増加とともに渦が生成される。

● 実験 3

⇒ 過渡的な渦が生成されたが、時間が経つと消えた。

・ 実験 3 で液体の粘性 (Reynolds 数) を変化させる。

⇒ 過渡的な渦の $u_{\theta \max}$ と r_{\max} が変化した。



$u_{\theta \max}$ の Re 依存性

r_{\max} の Re 依存性

角運動量の Re 依存性

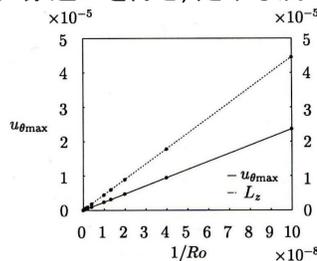
Yokoyama et al. (2012) 図 6 改変, プロットはシミュレーション結果, 実線は Burgers 渦の解。

Reynolds 数が増加すると、より中心軸に近い地点でより大きな周速度が観測され、その積はほぼ一定である。

バスタブ渦は角運動量の集積により生成され、角運動量保存則がよく成り立っている。

● 実験 4

⇒ 赤道上を除き、定常な渦が生成された。



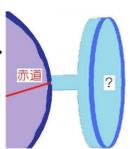
定常な渦の最大周速度と角運動量の $1/Ro$ 変化。

Yokoyama et al. (2012) 図 13

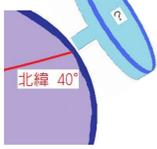
定常な渦の最大周速度は $1/Ro$ に比例する。低緯度では最大周速度は小さくなるが、赤道上 ($Ro = \infty$) を除くあらゆる緯度で定常な渦は生成される。

実験設定

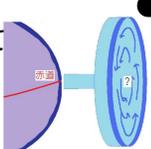
● 実験 1: 赤道上で初期渦度なし



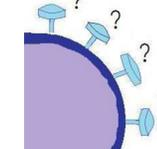
● 実験 2: 北緯 40° で初期渦度なし



● 実験 3: 赤道上で初期渦度として北緯 40° の地球の角速度



● 実験 4: 様々な緯度 (Rossby 数を変化) で、初期渦度なし



結論

・ バスタブ渦は角運動量保存則がよく成り立っており、角運動量の集積により生成される。

・ 緯度が増えると定常な渦の最大周速度が増えるが、赤道上を除くあらゆる緯度で定常な渦は生成される。
- ただし、最大周速度のオーダーは 10^{-5} 程度である。

・ バスタブ渦は Burgers 渦が非常によく当てはまる。

・ 我々の日々の生活で観測されるバスタブ渦の回転方向に対する地球の自転の影響は極めて微弱であるため、極めて理想化された状況でのみしか現れない。

- 現実のバスタブ渦は一時的なものである。
- 初期渦度を 0 にすることは難しい。
- 現実の容器は軸対称ではない。

参考文献

・ Yokoyama, N., Maruyama, Y. & Mizushima, J. 2012 Origin of the Bathtub Vortex and Its Formation Mechanism. *J. Phys. Soc.* **81**, 074401.