2 次元無限領域モジュール (w_plane_module) の定式化

竹広 真一

2015/12/31

Ishioka (2008) に従って, 2 次元無限領域を扱う SPMODEL Library の w_plane_module の定式化を行なう. 2 次元無限領域を平面に原点で接する球面上に投影して計算を行なう.

1 球面上への投影変換

1.1 定義

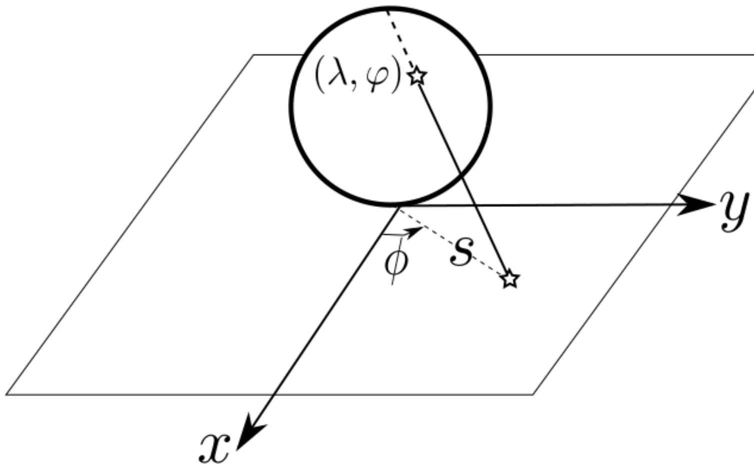

図 1: 無限平面から球面への投影

図 1 のように, xy 無限平面を, 原点において接する半径 R の球上 (緯度経度 λ,φ) に投影変換する. x,y と λ,φ の関係は以下のように与えられる.

$$x = s(\varphi)\cos\lambda, \quad y = s(\varphi)\sin\lambda, \tag{1}$$

ここで

$$s(\varphi) = 2R\tan\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = 2R\sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}}, \quad \mu = \sin\varphi. \tag{2}$$

は 2 次元極座標の動径座標である. 一方 λ はそのまま 2 次元極座標の方位角座標となる.

x, y から λ, φ への逆変換は,

$$\lambda = \tan^{-1}(y/x), \quad \mu = \sin\varphi = \frac{(s/2R)^2-1}{(s/2R)^2+1}. \tag{3}$$

1.2 微分関係式 (極座標)

2 次元極座標から球面上の緯度経度座標変換に伴う微分の変換公式を導く.

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{d\mu} &= R\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{-1/2}\cdot\frac{(1-\mu)-[-(1+\mu)]}{(1-\mu)^2} = R\sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}}\frac{2}{(1-\mu)^2}\\ &= \frac{2R}{\sqrt{1-\mu^2}(1-\mu)},\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_\lambda &= \frac{d\mu}{ds}\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\right)_\lambda = \frac{\sqrt{1-\mu^2}(1-\mu)}{2R}\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\right)_\lambda = \sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}}\frac{1}{2R}(1-\mu^2)\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\right)_\lambda\\ &= \frac{1-\mu^2}{s}\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\right)_\lambda. \end{aligned}\tag{4}$$

2 次元平面上のラプラシアンを球面上の緯度経度で表す.

$$\nabla^2 = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}.$$

第 1 項目は

$$\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}s\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1-\mu^2}{s^2}\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\right)_\lambda\left[(1-\mu^2)\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\right)_\lambda\right] = \frac{(1-\mu)^2}{4R^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu}\right].$$

第 2 項目は

$$\frac{1}{s^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\right)_\mu = \frac{1}{4R^2}\frac{1-\mu}{1+\mu}\left(\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\right)_\mu = \frac{(1-\mu)^2}{4R^2}\frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}.$$

よって

$$\nabla^2 = \frac{(1-\mu)^2}{4R^2}\left[\frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \frac{\partial}{\partial\mu}(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu}\right] = \frac{(1-\mu)^2}{4R^2}\nabla_s^2, \tag{5}$$

ここで ∇_s^2 は単位球面上でのラプラシアン

$$\nabla_s^2 = \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \frac{\partial}{\partial\mu}(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu}, \tag{6}$$

である.

1.3 微分関係式 (xy 直交座標)

xy 直交座標での微分は, 2 次元極座標との関係で記述される. $s = \sqrt{x^2+y^2}$, $\lambda = \tan^{-1}(y/x)$ であるから

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_y = \frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \lambda} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial s} - \frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{y}{x^2}\frac{\partial}{\partial \lambda} = \cos\lambda\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\sin\lambda}{s}\frac{\partial}{\partial \lambda} \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_x = \frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial \lambda}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \lambda} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial \lambda} = \sin\lambda\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\cos\lambda}{s}\frac{\partial}{\partial \lambda} \quad (8)$$

2 球面調和函数展開

2.1 展開法その 1 (w_plane_module)

2 次元無限領域上の関数 $\psi(x,y,t)$ を上記の球面投影を利用して以下のように球面調和函数 $Y_n^m(\lambda,\varphi)$ を用いて展開する.

$$\psi(x,y,t) = \sum_{n=0}^{N_T}\sum_{m=-n}^{n}\tilde{\psi}_{nm}(t)Y_n^m(\lambda,\varphi). \quad (9)$$

2.2 展開法その 2 (w_plane_module2)

2 次元無限領域上の関数 $\psi(x,y,t)$ を上記の球面投影を利用して以下のように球面調和函数 $Y_n^m(\lambda,\varphi)$ を用いて展開する.

$$\psi(x,y,t) = (1-\mu)\sum_{n=0}^{N_T}\sum_{m=-n}^{n}\tilde{\psi}_{nm}(t)Y_n^m(\lambda,\varphi). \quad (10)$$

文献

Ishioka, K., 2008: A Spectral Method for Unbounded Domains and Its Application to Wave Equations in Geophysical Fluid Dynamics. Ed. Yukio Kaneda, ITAM Symposium on Computational Physics and New Perspectives in Turbulence. (Proceedings of the IUTAM Symposium on Computational Physics and New Perspectives in Turbulence, Nagoya University, Nagoya, Japan, September, 11-14, 2006.) IUTAM Bookseries, 2008, Volume 4, III, 291-296, DOI: 10.1007/978-1-4020-6472-2_45.