

チェビシェフ関数展開を利用した ガラーキン法

竹広真一

平成 23 年 1 月 23 日

この文書は, チェビシェフ関数展開ルーチンを利用したガラーキン法による数値計算の定式化を説明する.

1 チェビシェフ関数の性質

チェビシェフ関数系 $T_k(x)$ は区間 $[-1, 1]$ で定義される関数からなり, 次の性質のような性質をもつ.

- 定義

$$x = \cos \theta; \quad T_k(x) = T_k(\cos \theta) = \cos k\theta. \quad (1)$$

- 微分の表現¹

$$x = \cos \theta, \quad \frac{dT_k}{dx} = \frac{k \sin k\theta}{\sin \theta}, \quad \frac{d^2T_k}{dx^2} = \frac{-k^2 \cos k\theta \sin \theta + k \sin k\theta \cos \theta}{\sin^3 \theta}. \quad (2)$$

1

$$\begin{aligned} \frac{dT_k}{dx} &= \frac{dT_k(\cos \theta)}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = \frac{(\cos k\theta)'}{(\cos \theta)'} = \frac{k \sin k\theta}{\sin \theta}, \\ \frac{d^2T_k}{dx^2} &= \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dT_k}{dx} \right) \frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{k \sin k\theta}{\sin \theta} \right) \frac{1}{(\cos \theta)'} = \frac{k^2 \cos k\theta \sin \theta - k \sin k\theta \cos \theta}{-\sin^3 \theta}. \end{aligned}$$

- 端点での値²

$$T_k(1) = 1, \quad T_k(-1) = (-1)^k, \quad (3)$$

$$\left. \frac{dT_k}{dx} \right|_{x=1} = k^2, \quad \left. \frac{dT_k}{dx} \right|_{x=-1} = (-1)^{k+1} k^2, \quad (4)$$

$$\left. \frac{d^2T_k}{dx^2} \right|_{x=1} = \frac{k^2(k^2-1)}{3}, \quad \left. \frac{d^2T_k}{dx^2} \right|_{x=-1} = (-1)^k \frac{k^2(k^2-1)}{3}. \quad (5)$$

- 微分方程式³

$$(1-x^2) \frac{d^2T_k}{dx^2} - x \frac{dT_k}{dx} + k^2 T_k = 0. \quad (6)$$

- 漸化式⁴

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x). \quad (7)$$

2

$$\begin{aligned} \left. \frac{dT_k}{dx} \right|_{x=1} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{k \sin k\theta}{\sin \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} k^2 \frac{\sin k\theta}{n\theta} \frac{\theta}{\sin \theta} = k^2, \\ \left. \frac{dT_k}{dx} \right|_{x=-1} &= \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{k \sin k\theta}{\sin \theta} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{k \sin k(\pi - \varphi)}{\sin(\pi - \varphi)} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{-k \cos k\pi \sin \varphi}{\sin \varphi} \\ &= (-1)^{k+1} \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{k \sin \varphi}{\sin \varphi} = (-1)^{k+1} k^2, \\ \left. \frac{d^2T_k}{dx^2} \right|_{x=1} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{-k^2 \cos k\theta \sin \theta + k \sin k\theta \cos \theta}{\sin^3 \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(-k^2 \cos k\theta \sin \theta + k \sin k\theta \cos \theta)'}{(\sin^3 \theta)'} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{k^3 \sin k\theta \sin \theta - k^2 \cos k\theta \cos \theta + k^2 \cos k\theta \cos \theta - k \sin k\theta \sin \theta}{3 \sin^2 \theta \cos \theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} k(k^2-1) \frac{\sin k\theta}{3 \sin \theta \cos \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{k^2(k^2-1) \sin k\theta}{3} \frac{\theta}{k\theta} \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{n^2(n^2-1)}{3}. \\ \left. \frac{d^2T_k}{dx^2} \right|_{x=-1} &= \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{-k^2 \cos k\theta \sin \theta + k \sin k\theta \cos \theta}{\sin^3 \theta} = \lim_{\theta \rightarrow \pi} k(k^2-1) \frac{\sin k\theta}{3 \sin \theta \cos \theta} \\ &= \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{k(k^2-1)}{3} \frac{\sin k(\pi - \varphi)}{\sin(\pi - \varphi) \cos(\pi - \varphi)} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{k(k^2-1)}{3} \frac{-\cos k\pi \sin \varphi}{-\sin \varphi \cos \varphi} \\ &= \lim_{\varphi \rightarrow 0} (-1)^k \frac{k(k^2-1)}{3} \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi \cos \varphi} = (-1)^k \frac{k(k^2-1)}{3} \end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned} \frac{d^2T_k}{dx^2} &= \frac{-k^2 \cos k\theta \sin \theta + k \sin k\theta \cos \theta}{\sin^3 \theta} = -k^2 \frac{\cos k\theta}{\sin^2 \theta} + k \frac{\sin k\theta \cos \theta}{\sin^3 \theta} = -k^2 \frac{T_k(x)}{1-x^2} + \frac{k \sin k\theta \cos \theta}{\sin \theta \sin^2 \theta} \\ &= -k^2 \frac{T_k(x)}{1-x^2} + \frac{dT_k}{dx} \frac{x}{1-x^2} \rightarrow (1-x^2) \frac{d^2T_k}{dx^2} - x \frac{dT_k}{dx} + k^2 T_k(x). \end{aligned}$$

⁴三角関数の和を積に直す公式より

$$\cos(k+1)\theta + \cos(k-1)\theta = 2 \cos k\theta \cos \theta \rightarrow T_{k+1}(x) + T_{k-1}(x) = 2xT_k(x).$$

- 昇降漸化式⁵

$$T_{k\pm 1}(x) = xT_k(x) \mp \frac{1-x^2}{k} \frac{dT_k}{dx} \quad (8)$$

- 直交関係⁶

$$\int_{-1}^1 T_k(x)T_l(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \alpha_k \delta_{kl}, \quad (9)$$

ここで

$$\alpha_k = \begin{cases} \pi & k=0 \\ \pi/2 & k \neq 0 \end{cases}. \quad (10)$$

である.

- 低次の関数形

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \dots \quad (11)$$

5

$$\begin{aligned} T_{k+1}(x) &= \cos(k+1)\theta = \cos k\theta \cos \theta - \sin k\theta \sin \theta = xT_k(x) - \frac{1}{k} \frac{k \sin k\theta}{\sin \theta} \sin^2 \theta = xT_k(x) - \frac{1-x^2}{k} \frac{dT_k}{dx}, \\ T_{k-1}(x) &= \cos(k-1)\theta = \cos k\theta \cos \theta + \sin k\theta \sin \theta = xT_k(x) + \frac{1}{k} \frac{k \sin k\theta}{\sin \theta} \sin^2 \theta = xT_k(x) + \frac{1-x^2}{k} \frac{dT_k}{dx}. \end{aligned}$$

6

$$\int_{-1}^1 T_k(x)T_l(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{\pi}^0 \cos k\theta \cos l\theta \frac{-\sin \theta d\theta}{\sin \theta} = \int_0^\pi \cos k\theta \cos l\theta d\theta.$$

$k \neq l$ のとき

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos k\theta \cos l\theta d\theta &= \int_0^\pi \frac{1}{2} [\cos(k+l)\theta + \cos(k-l)\theta] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k+l} \sin(n+m)\theta + \frac{1}{k-l} \sin(n-m)\theta \right]_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

$k = l \neq 0$ のとき

$$\int_0^\pi \cos k\theta \cos l\theta d\theta = \int_0^\pi \cos^2 k\theta d\theta = \int_0^\pi \frac{1}{2} [1 + \cos 2k\theta] d\theta = \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{1}{2k} \sin 2k\theta \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

$k = l = 0$ のとき

$$\int_0^\pi \cos k\theta \cos l\theta d\theta = \int_0^\pi d\theta = [\theta]_0^\pi = \pi.$$

2 チェビシェフ関数展開

区間 $[x_{min}, x_{max}]$ でとある時間発展方程式と境界条件の下での解をガラーキン法で数値計算したい. 区間 $[x_{min}, x_{max}]$ で定義された関数 $f^*(x^*)$ は次の線形写像で区間 $[-1, 1]$ での関数 $f(x)$ へと写される.

$$x^* = \frac{x_{max} + x_{min}}{2} + \frac{x_{max} - x_{min}}{2} \times x. \quad (12)$$

したがって, 区間 $[-1, 1]$ で $f(x)$ をチェビシェフ関数で構成された境界条件を満たす関数系 $\phi_n(x)$ を用いて

$$f(x) = \sum_{n=K_s}^N a_n \phi_n(x) \quad (13)$$

と表せばよい. $\phi_n(x)$ はガラーキン法の基底関数系であり, チェビシェフ関数の線形結合で表されるとする. K_s は基底関数のもっとも低い次数, K が最高次の切断次数を表す.

$$\phi_n(x) = \sum_{l=0}^K A_{ln} T_l(x) \quad (14)$$

$\phi_n(x)$ は n 次の多項式であることに注意されたい. (A_{ln}) は $(K+1) \times (K-K_s)$ の行列である.

一方で, $f(x)$ が K 次までのチェビシェフ関数系 $T_k(x)$ で展開されているとする. すなわち

$$f(x) = \sum_{k=0}^K c_k T_k(x) \equiv \frac{1}{2} c_0 T_0(x) + \sum_{k=1}^{K-1} c_k T_k(x) + \frac{1}{2} c_K T_K(x) = \sum_{n=0}^K \beta_k c_k T_k(x) \quad (15)$$

ただし

$$\beta_k = \begin{cases} 1/2 & (k=0, K) \\ 1 & (k \neq 0, K) \end{cases} \quad (16)$$

である.

2.1 チェビシェフ係数からガラーキン係数の計算

いま c_k を計算できているとして, ガラーキン法による展開係数 a_n を求めることを考える. (13) と (14) から

$$f(x) = \sum_{n=K_s}^K a_n \phi_n(x) = \sum_{n=K_s}^K a_n \sum_{l=0}^K A_{ln} T_l(x).$$

これと (15) が等しいので

$$\sum_{k=0}^K \beta_k c_k T_k(x) = \sum_{n=K_s}^K a_n \sum_{l=0}^K A_{ln} T_l(x). \quad (17)$$

両辺に $\phi_m(x) = \sum_{l'=0}^K A_{l'm} T_{l'}'(x)$ ($m = k_s, \dots, K$) をかけて $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ を作用させ、
チェビシェフ関数の直交関係を用いる。

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^K \sum_{l'=0}^K A_{l'm} T_{l'}'(x) \beta_k c_k T_k(x) &= \sum_{n=K_s}^K \sum_{l'=0}^K A_{l'm} T_{l'}'(x) a_n \sum_{l=0}^K A_{ln} T_l(x), \\ \sum_{k=0}^K \sum_{l'=0}^K A_{l'm} \beta_k c_k \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} T_{l'}'(x) T_k(x) &= \sum_{n=K_s}^K \sum_{l'=0}^K A_{l'm} a_n \sum_{l=0}^K A_{ln} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} T_{l'}'(x) T_l(x), \\ \sum_{k=0}^K \sum_{l'=0}^K A_{l'm} \beta_k c_k \alpha_k \delta_{l'k} &= \sum_{n=K_s}^K \sum_{l'=0}^K A_{l'm} a_n \sum_{l=0}^K A_{ln} \alpha_l \delta_{l'l}, \\ \sum_{k=0}^K \alpha_k \beta_k c_k A_{km} &= \sum_{n=K_s}^K a_n \sum_{l=0}^K \alpha_l A_{lm} A_{ln}, \end{aligned}$$

ここで $B_{mn} \equiv \sum_{l=0}^K \alpha_l A_{lm} A_{ln}$ と書き直すと行列の積の形にかけて

$$\sum_{k=0}^K \alpha_k \beta_k c_k A_{km} = \sum_{n=K_s}^K B_{mn} a_n \quad (m = k_s, \dots, K)$$

すなわち、

$$\begin{aligned} &(\alpha_0 \beta_0 c_0, \dots, \alpha_k \beta_k c_k, \dots, \alpha_K \beta_K c_K) \cdot \begin{pmatrix} A_{0k_s} & \cdots & A_{0m} & \cdots & A_{Kk_s} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{kk_s} & \cdots & A_{km} & \cdots & A_{kk_s} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{Kk_s} & \cdots & A_{Km} & \cdots & A_{KK} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B_{k_s k_s} & \cdots & B_{k_s m} & \cdots & B_{Kk_s} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{kk_s} & \cdots & B_{km} & \cdots & B_{kk_s} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{Kk_s} & \cdots & B_{Km} & \cdots & B_{KK} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{k_s} \\ \vdots \\ a_m \\ \vdots \\ a_K \end{pmatrix} \end{aligned}$$

この連立方程式を解くことにより c_k から a_n を求めることができる。

2.2 ガラーキン係数からチェビシェフ係数の計算

逆にガラーキン法による展開係数 a_k から c_k を求めるための式は, (17) の両辺に $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} T_m(x)$ ($m = 0, \dots, K$) を作用させて直交関係を用いると良い.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} T_m(x) \sum_{k=0}^K \beta_k c_k T_k(x) &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} T_m(x) \sum_{n=K_s}^K a_n \sum_{l=0}^K A_{ln} T_l(x), \\ \sum_{k=0}^K \beta_k c_k \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} T_m(x) T_k(x) &= \sum_{n=K_s}^K a_n \sum_{l=0}^K A_{ln} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} T_m(x) T_l(x), \\ \sum_{k=0}^K \beta_k c_k \alpha_m \delta_{mk} &= \sum_{n=K_s}^K a_n \sum_{l=0}^K A_{ln} \alpha_m \delta_{ml}, \\ \alpha_m \beta_m c_m &= \sum_{n=K_s}^K a_n A_{mn} \alpha_m, \\ c_m &= \frac{1}{\beta_m} \sum_{n=K_s}^K A_{mn} a_n, \quad (m = 0, \dots, K). \end{aligned}$$

行列の形で書き直すと

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_m \\ \vdots \\ c_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{0,K_s}/\beta_0 & \dots & A_{0,k}/\beta_0 & \dots & A_{0,K}/\beta_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m,K_s}/\beta_m & \dots & A_{m,k}/\beta_m & \dots & A_{m,K}/\beta_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{K,K_s}/\beta_K & \dots & A_{K,k}/\beta_K & \dots & A_{K,K}/\beta_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{K_s} \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_K \end{pmatrix} \quad (18)$$

2.3 境界値問題の解法

与えられた関数 $g(x)$ に対して, とある境界条件の下で

$$\mathcal{L}[f(x)] = g(x) \quad (19)$$

を満たす関数 $f(x)$ を求めるという境界値問題を解くことを考える. ここで \mathcal{L} は $f(x)$ に働く線形微分作用素であるとする.

このような問題をチェビシェフ・ガラーキン法で解くには, $f(x)$ を境界条件を満たすガラーキン基底で表現し,

$$f(x) = \sum_{n=K_s}^K a_n \phi_n(x) = \sum_{n=K_s}^K a_n \sum_{l=0}^K A_{ln} T_l(x),$$

とおく. 一方, 与えられた関数 $g(x)$ はチェビシェフ関数展開されており,

$$g(x) = \sum_{k=0}^K b_k T_k(x) = \sum_{k=0}^K \beta_k b_k T_k(x) \quad (20)$$

そうすると

$$\sum_{n=K_s}^K a_n \sum_{l=0}^K A_{ln} \mathcal{L}[T_l(x)] = \sum_{k=0}^K \beta_k b_k T_k(x), \quad (21)$$

の式で b_k から a_n を求める式を構成すれば良い. \mathcal{L} は線形作用素であるから

$$\mathcal{L}[T_l(x)] = \sum_{p=0}^K L_{lp} T_p(x) \quad (22)$$

の形に書き直せる. さらに両辺に $\phi_m(x) = \sum_{l'=0}^K A_{l'm} T_{l'}'(x)$ ($m = k_s, \dots, K$) をかけて $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ を作用させ, チェビシェフ関数の直交関係を用いると,

$$\begin{aligned} & \sum_{l'=0}^K A_{l'm} T_{l'}'(x) \sum_{n=K_s}^K a_n \sum_{l=0}^K A_{ln} \sum_{p=0}^K L_{lp} T_p(x) = \sum_{l'=0}^K A_{l'm} T_{l'}'(x) \sum_{k=0}^K \beta_k b_k T_k(x), \\ & \sum_{l'=0}^K A_{l'm} \sum_{n=K_s}^K a_n \sum_{l=0}^K A_{ln} \sum_{p=0}^K L_{lp} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} T_{l'}'(x) T_p(x) \\ & = \sum_{l'=0}^K A_{l'm} \sum_{k=0}^K \beta_k b_k \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} T_{l'}'(x) T_k(x), \\ & \sum_{l'=0}^K A_{l'm} \sum_{n=K_s}^K a_n \sum_{l=0}^K A_{ln} \sum_{p=0}^K L_{lp} \alpha_p \delta_{l'p} = \sum_{l'=0}^K A_{l'm} \sum_{k=0}^K \beta_k b_k \alpha_k \delta_{l'k} \\ & \sum_{n=K_s}^K a_n \sum_{l=0}^K \sum_{p=0}^K A_{ln} L_{lp} \alpha_p A_{pm} = \sum_{k=0}^K \alpha_k \beta_k b_k A_{km} \end{aligned}$$

ここで $D_{nm} \equiv \sum_{l=0}^K \sum_{p=0}^K A_{ln} L_{lp} \alpha_p A_{pm}$ とおけば行列の形で書き直して

$$\sum_{n=K_s}^K D_{nm} a_n = \sum_{k=0}^K \alpha_k \beta_k b_k A_{km}, \quad (m = k_s, \dots, K) \quad (23)$$

$$(a_{k_s}, \dots, a_n, \dots, a_K) \cdot \begin{pmatrix} D_{k_s k_s} & \cdots & D_{k_s m} & \cdots & D_{k_s K} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ D_{n k_s} & \cdots & D_{nm} & \cdots & D_{n K} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ D_{K k_s} & \cdots & D_{K m} & \cdots & D_{K K} \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_0 \beta_0 b_0, \dots, \alpha_k \beta_k b_k, \dots, \alpha_K \beta_K b_K) \cdot \begin{pmatrix} A_{0k_s} & \cdots & A_{0m} & \cdots & A_{0K} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ A_{kk_s} & \cdots & A_{km} & \cdots & A_{kK} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ A_{Kk_s} & \cdots & A_{Km} & \cdots & A_{KK} \end{pmatrix} \quad (24)$$

この連立方程式を解くことにより b_k から a_n を求めることができる.

3 ディリクレ・ノイマン境界条件に対する定式化

3.1 ディリクレ・ノイマン境界条件に対するガラーキン基底の例 : その 1

k 次の基底が

$$\phi_k(x) = T_k(x) + C_{k-1}T_{k-1}(x) + C_{k-2}T_{k-2}(x)$$

の場合の各境界条件に対応するガラーキン基底を求める ($k = 2, \dots, K$). この場合, チェビシェフ係数とガラーキン係数の間の変換行列 (A_{ln}) は

$$A_{k,k} = 1, \quad A_{k-1,k} = C_{k-1}, \quad A_{k-2,k} = C_{k-2}, \quad (25)$$

と与えられることになる.

3.1.1 両端境界で値が 0 の場合 (両端ディリクレ条件)

境界条件 $\phi_k(1) = \phi_k(-1) = 0$ より,

$$\begin{aligned} \phi_k(1) &= 1 + C_{k-1} + C_{k-2} = 0, \\ \phi_k(-1) &= (-1)^k + (-1)^{k-1}C_{k-1} + (-1)^{k-2}C_{k-2} = 0. \end{aligned}$$

これを解くと

$$C_{k-1} = 0, \quad C_{k-2} = -1. \quad (26)$$

したがって

$$\phi_k(x) = T_k(x) - T_{k-2}(x). \quad (27)$$

3.1.2 両端境界で微分が 0 の場合 (両端ノイマン条件)

区間両端での微分が 0 となる境界条件

$$\frac{df}{dx} = 0 \quad \text{at} \quad x = -1, 1 \quad (28)$$

の場合は

$$\begin{aligned} \phi'_k(1) &= k^2 + (k-1)^2 C_{k-1} + (k-2)^2 C_{k-2} = 0, \\ \phi'_k(-1) &= (-1)^k k^2 + (-1)^{k-1} (k-1)^2 C_{k-1} + (-1)^{k-2} (k-2)^2 C_{k-2} = 0. \end{aligned}$$

ただしこの場合, $k=2$ では境界条件を満たすことができないので $k=3, \dots, K$ である. $k=2$ の基底は特別に扱い, $\phi_2(x) = T_0(x)$ とおく必要がある.

これを解くと,

$$C_{k-1} = 0, \quad C_{k-2} = -\left(\frac{k}{k-2}\right)^2, \quad (29)$$

したがって

$$\phi_2(x) = T_0(x), \quad \phi_k(x) = T_k(x) - \left(\frac{k}{k-2}\right)^2 T_{k-2}(x). \quad (30)$$

変換行列は

$$\begin{aligned} A_{0,2} &= 1, \\ A_{k,k} &= 1, \quad A_{k-2,k} = -\left(\frac{k}{k-2}\right)^2 \quad (k=3, \dots, K) \end{aligned} \quad (31)$$

3.1.3 片側端境界で値が 0, 他方で微分値が 0 の場合 (片側ディリクレ, 片側ノイマン条件)

区間両端での条件が, 片側の値が 0, もう一方で微分値が 0 となる境界条件

$$f(1) = 0, \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=-1} = 0, \quad (32)$$

の場合を考える. この境界条件から

$$\begin{aligned} \phi_k(1) &= 1 + C_{k-1} + C_{k-2} = 0, \\ \phi'_k(-1) &= (-1)^k k^2 + (-1)^{k-1} (k-1)^2 C_{k-1} + (-1)^{k-2} (k-1)^2 C_{k-2} = 0. \end{aligned}$$

これを解くと,

$$C_{k-1} = \frac{k^2 - (k-2)^2}{(k-1)^2 + (k-2)^2}, \quad C_{k-2} = -\frac{k^2 + (k-1)^2}{(k-1)^2 + (k-2)^2}, \quad (33)$$

3.1.4 片側端境界で微分値が 0, 他方で値が 0 の場合 (片側ノイマン, 片側ディリクレ条件)

区間両端での条件が, 片側の微分値が 0, もう一方で値が 0 となる境界条件

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=1} = 0, \quad f(-1) = 0, \quad (34)$$

の場合を考える. この境界条件から

$$\begin{aligned} \phi'_k(1) &= k^2 + (k-1)^2 C_{k-1} + (k-2)^2 C_{k-2} = 0, \\ \phi'_k(-1) &= (-1)^k + (-1)^{k-1} C_{k-1} + (-1)^{k-2} C_{k-2} = 0. \end{aligned}$$

これを解くと,

$$C_{k-1} = -\frac{k^2 - (k-2)^2}{(k-1)^2 + (k-2)^2}, \quad C_{k-2} = -\frac{k^2 + (k-1)^2}{(k-1)^2 + (k-2)^2}, \quad (35)$$

3.2 一般的な混合境界条件

区間両端での条件が, ディリクレ・ノイマン型の混合した一般的な場合を考える. すなわち⁷

$$\alpha_{1,1} \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=1} + \alpha_{0,1} f(1) = 0, \quad (36)$$

$$\alpha_{1,-1} \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=-1} + \alpha_{0,-1} f(-1) = 0, \quad (37)$$

⁷区間 $[x_{min}, x_{max}]$ での関数 $f^*(x^*)$ に対する境界条件が

$$\alpha_{1,x_{max}}^* \left. \frac{df^*}{dx^*} \right|_{x^*=x_{max}} + \alpha_{0,x_{max}}^* f^*(x_{max}) = 0, \quad \alpha_{1,x_{min}}^* \left. \frac{df^*}{dx^*} \right|_{x^*=x_{min}} + \alpha_{0,x_{min}}^* f^*(x_{min}) = 0,$$

と与えられた場合の, 区間 $[-1, 1]$ へ写された関数に対する境界条件を表すには微分関係

$$\frac{df^*}{dx^*} = \frac{dx}{dx^*} \frac{df}{dx} = \frac{2}{x_{max} - x_{min}} \frac{df}{dx} \equiv \frac{1}{D_{fac}} \frac{df}{dx}$$

を気をつけなければならない. ここで $D_{fac} \equiv (x_{max} - x_{min})/2$ である. したがって, 対応する境界条件は

$$\frac{\alpha_{1,x_{max}}^*}{D_{fac}} \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=1} + \alpha_{0,x_{max}}^* f(1) = 0, \quad \frac{\alpha_{1,x_{min}}^*}{D_{fac}} \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=-1} + \alpha_{0,x_{min}}^* f(-1) = 0,$$

となる.

ここで $\alpha_{i,j}$ は定数係数であり, $\alpha_{1,1}$ と $\alpha_{0,1}$, $\alpha_{1,-1}$ と $\alpha_{0,-1}$ および $\alpha_{0,1}$ と $\alpha_{0,-1}$ は同時に 0 とはならないと仮定する. この境界条件から

$$\begin{aligned} & \alpha_{1,1}\phi'(1) + \alpha_{0,1}\phi(1) \\ &= \alpha_{1,1}(k^2 + (k-1)^2C_{k-1} + (k-2)^2C_{k-2}) + \alpha_{0,1}(1 + C_{k-1} + C_{k-2}) = 0, \\ & \alpha_{1,-1}\phi'(-1) + \alpha_{0,-1}\phi(-1) \\ &= \alpha_{1,-1}[(-1)^{k+1}k^2 + (-1)^k(k-1)^2C_{k-1} + (-1)^{k-1}(k-2)^2C_{k-2}] \\ &+ \alpha_{0,-1}[(-1)^k + (-1)^{k-1}C_{k-1} + (-1)^{k-2}C_{k-2}] = 0, \end{aligned}$$

行列の形式でかけば

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{k-1} \\ C_{k-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix},$$

ただし

$$\begin{aligned} a &= \alpha_{1,1}(k-1)^2 + \alpha_{0,1} \\ b &= \alpha_{1,1}(k-2)^2 + \alpha_{0,1} \\ c &= \alpha_{1,-1}(k-1)^2 - \alpha_{0,-1} \\ d &= -\alpha_{1,-1}(k-2)^2 + \alpha_{0,-1} \\ e &= -(\alpha_{1,1}k^2 + \alpha_{0,1}) \\ f &= -(-\alpha_{1,-1}k^2 + \alpha_{0,-1}). \end{aligned}$$

これを解くと

$$\begin{pmatrix} C_{k-1} \\ C_{k-2} \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} -d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} de-bf \\ -ce+af \end{pmatrix}.$$

係数行列の行列式が 0 となってしまう特別な場合として, $k=2$ の係数行列式が 0 となる場合を考えよう. このときには基底の一つが

$$\phi_2(x) = C_1T_1(x) + C_0T_0(x)$$

という形となることを意味している. C_1, C_0 は片側の境界条件から定めることができ, 例えば $x=1$ での境界条件から

$$\alpha_{1,1}C_1 + \alpha_{0,1}(C_1 + C_0) = 0, \quad (\alpha_{1,1} + \alpha_{0,1})C_1 + \alpha_{0,1}C_0 = 0,$$

すなわち

$$C_1 = -\alpha_{0,1} \quad C_0 = \alpha_{1,1} + \alpha_{0,1}, \quad (38)$$

と定められる. したがって

$$\phi_2(x) = -\alpha_{0,1}T_1(x) + (\alpha_{1,1} + \alpha_{0,1})C_0T_0(x).$$

結局, この場合は変換行列の 0 行目だけ修正して

$$A_{1,2} = -\alpha_{0,1}, \quad A_{0,2} = \alpha_{1,1} + \alpha_{0,1} \quad (39)$$

$$A_{k,k} = 1, \quad A_{k-1,k} = C_{k-1}, \quad A_{k-2,k} = C_{k-2}, \quad (k \geq 3). \quad (40)$$

と与えられることになる.

3.3 ディリクレ・ノイマン境界条件に対するガラーキン基底の例 : その 2

3.3.1 両端境界で値が 0 の場合 (両端ディリクレ条件)

$T_k(1) = \cos 0 = 1$, $T_k(-1) = \cos k\pi = (-1)^k$ である. 特に $T_0(1) = T_0(-1) = 1$, $T_1(1) = 1$, $T_1(-1) = -1$ であるから, 両端で値が 0 となるようなガラーキン基底は

$$\begin{aligned} \phi_2(x) &= T_2(x) - T_0(x), & \phi_3(x) &= T_3(x) - T_1(x), \\ &\dots & \dots \\ \phi_{2k}(x) &= T_{2k}(x) - T_0(x), & \phi_{2k+1}(x) &= T_{2k+1}(x) - T_1(x), \\ &\dots & \dots \\ \phi_{K-1}(x) &= T_{K-1}(x) - T_1(x), & \phi_K(x) &= T_K(x) - T_0(x). \end{aligned}$$

暗黙のうちに K が偶数であることを用いている. 変換行列 (\tilde{A}_{nk}) は

$$(\tilde{A}_{nk}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & -1 & \dots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (41)$$

解析的に書けば

$$\tilde{A}_{0,k} = -[1 + (-1)^k]/2 \quad (k = 2, 3, \dots, K) \quad (42)$$

$$\tilde{A}_{1,k} = -[1 - (-1)^k]/2 \quad (k = 2, 3, \dots, K-1) \quad (43)$$

$$\tilde{A}_{k,k} = 1 \quad (k = 2, 3, \dots, K) \quad (44)$$

3.3.2 両端境界で微分が 0 の場合 (両端ノイマン条件)

区間両端での微分が 0 となる境界条件

$$\frac{df}{dx} = 0 \quad \text{at} \quad x = -1, 1 \quad (45)$$

の場合を考える.

チェビシェフ関数の微分は

$$\frac{dT_k(x)}{dx} = \frac{dT_k(\cos \theta)}{d\theta} = \frac{(\cos n\theta)'}{(\cos \theta)'} = \frac{n \sin n\theta}{\sin \theta} \quad (46)$$

$x = 1$ での微分値は $\theta \rightarrow 0$ の極限をとって

$$\left. \frac{dT_k(x)}{dx} \right|_{x=1} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{k \sin k\theta}{\sin \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} k^2 \frac{\sin n\theta}{k\theta} \frac{\theta}{\sin \theta} = k^2. \quad (47)$$

$x = -1$ での微分値は $\varphi = \pi - \theta$ と変換して

$$\begin{aligned} \left. \frac{dT_k(x)}{dx} \right|_{x=-1} &= \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{k \sin k(\pi - \varphi)}{\sin(\pi - \varphi)} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{-k \cos k\pi \sin k\varphi}{\sin \varphi} \\ &= \lim_{\varphi \rightarrow 0} (-1)^{k+1} k^2 \frac{\sin k\varphi}{n\varphi} \frac{\varphi}{\sin \varphi} = (-1)^{k+1} k^2. \end{aligned} \quad (48)$$

したがって, 境界条件を満たすガラーキン基底を

$$\begin{aligned} \phi_2(x) &= T_0(x), \\ \phi_3(x) &= T_3(x) - 3^2 T_1(x) \\ \phi_4(x) &= T_4(x) - (4/2)^2 T_2(x) \\ &\dots \\ \phi_{2k-1}(x) &= T_{2k-1}(x) - (2k-1)^2 T_1(x) \\ \phi_{2k}(x) &= T_{2k}(x) - k^2 T_2(x) \end{aligned}$$

これにあわせて変換行列は

$$(\tilde{A}_{nk}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -3^2 & 0 & -5^2 & \dots & -(2k-1)^2 & 0 & \dots & (K-1)^2 & 0 \\ 0 & -4^2 & 0 & \dots & 0 & -k^2 & \dots & 0 & (K/2)^2 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (49)$$

解析的に書けば

$$A_{0,2} = 1, \quad (50)$$

$$A_{1,k} = -[1 - (-1)^k]k^2/2 \quad (k = 3, 4, \dots, K-1) \quad (51)$$

$$A_{2,k} = -[1 + (-1)^k]k^2/8 \quad (k = 3, 4, \dots, K) \quad (52)$$

$$A_{k,k} = 1 \quad (k = 3, 4, \dots, K) \quad (53)$$

3.3.3 片側端境界で値が 0, 他方で微分値が 0 の場合 (片側ディリクレ, 片側ノイマン条件)

区間両端での条件が, 片側の値が 0, もう一方で微分値が 0 となる境界条件

$$f(1) = 0, \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=-1} = 0, \quad (54)$$

の場合を考える. k 次の基底を

$$\phi_k(x) = T_k(x) + C_1 T_1(x) + C_0 T_0(x)$$

と仮定する. 境界条件から

$$\phi'_k(-1) = (-1)^{k+1} \cdot k^2 + C_1 = 0, \quad \phi_k(1) = 1 + C_1 + C_0 = 0,$$

これを解くと

$$C_1 = (-1)^k \cdot k^2, \quad C_0 = (-1)^{k+1} \cdot k^2 - 1$$

よって基底関数は

$$\phi_n(x) = T_k(x) + (-1)^k \cdot k^2 T_1(x) + [(-1)^{n+1} \cdot n^2 - 1] T_0(x). \quad (55)$$

対応して変換行列は

$$\tilde{A}_{0,k} = [(-1)^{k+1} \cdot k^2 - 1] \quad (n = 2, 3, \dots, K) \quad (56)$$

$$\tilde{A}_{1,k} = (-1)^k \cdot k^2 \quad (n = 2, 3, \dots, K) \quad (57)$$

$$\tilde{A}_{k,k} = 1 \quad (n = 2, 3, \dots, K) \quad (58)$$

3.3.4 片側端境界で微分値が 0, 他方で値が 0 の場合 (片側ノイマン, 片側ディリクレ条件)

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=1} = 0, \quad f(-1) = 0, \quad (59)$$

の場合を考える. 先と同様に n 次の基底を

$$\phi_k(x) = T_k(x) + C_1 T_1(x) + C_0 T_0(x)$$

と仮定する. 境界条件から

$$\phi_k(-1) = (-1)^n - C_1 + C_0 = 0, \quad \phi'_k(1) = k^2 + C_1 = 0,$$

これを解くと

$$C_1 = -k^2, \quad C_0 = -k^2 + (-1)^{k+1}$$

よって基底関数は

$$\phi_k(x) = T_k(x) - k^2 T_1(x) + [-k^2 + (-1)^{k+1}] T_0(x). \quad (60)$$

対応して変換行列は

$$\tilde{A}_{0,k} = [-k^2 + (-1)^{k+1}] \quad (k = 2, 3, \dots, K) \quad (61)$$

$$\tilde{A}_{1,k} = -k^2 \quad (k = 2, 3, \dots, K) \quad (62)$$

$$\tilde{A}_{k,k} = 1 \quad (k = 2, \dots, K) \quad (63)$$

3.4 一般的な混合境界条件

区間両端での条件が、ディリクレ・ノイマン型の混合した一般的な場合を考える。
すなわち⁸

$$\alpha_{1,1} \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=1} + \alpha_{0,1} f(1) = 0, \quad (64)$$

$$\alpha_{1,-1} \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=-1} + \alpha_{0,-1} f(-1) = 0, \quad (65)$$

ここで $\alpha_{i,j}$ は定数係数である。この境界条件を満たす n 次の基底を

$$\phi_k(x) = T_k(x) + C_1 T_1(x) + C_0 T_0(x)$$

と仮定する。境界条件から

$$\begin{aligned} \alpha_{1,1}(k^2 + C_1) + \alpha_{0,1}(1 + C_1 + C_0) &= 0, \\ \alpha_{1,-1}[(-1)^{k+1}k^2 + C_1] + \alpha_{0,-1}[(-1)^k - C_1 + C_0] &= 0, \end{aligned}$$

これを整理すると

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} + \alpha_{0,1} & \alpha_{0,1} \\ \alpha_{1,-1} - \alpha_{0,-1} & \alpha_{0,-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} \cdot k^2 + \alpha_{0,1} \\ \alpha_{1,-1} \cdot (-1)^{k+1}k^2 + \alpha_{0,-1} \cdot (-1)^k \end{pmatrix},$$

よって、左辺係数行列の行列式が 0 でない、すなわち

$$(\alpha_{1,1} + \alpha_{0,1})\alpha_{0,-1} - (\alpha_{1,-1} - \alpha_{0,-1})\alpha_{0,1} = \alpha_{1,-1}\alpha_{0,1} - \alpha_{1,1}\alpha_{0,-1} - 2\alpha_{0,-1}\alpha_{0,1} \neq 0 \quad (66)$$

の場合には C_1, C_0 を定めることができて、

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_0 \end{pmatrix} = - \frac{1}{(\alpha_{1,1} + \alpha_{0,1})\alpha_{0,-1} - (\alpha_{1,-1} - \alpha_{0,-1})\alpha_{0,1}} \begin{pmatrix} \alpha_{0,-1} & -\alpha_{0,1} \\ -\alpha_{1,-1} + \alpha_{0,-1} & \alpha_{1,1} + \alpha_{0,1} \end{pmatrix}$$

⁸ 区間 $[x_{min}, x_{max}]$ での関数 $f^*(x^*)$ に対する境界条件が

$$\alpha_{1,x_{max}}^* \left. \frac{df^*}{dx^*} \right|_{x^*=x_{max}} + \alpha_{0,x_{max}}^* f^*(x_{max}) = 0, \quad \alpha_{1,x_{min}}^* \left. \frac{df^*}{dx^*} \right|_{x^*=x_{min}} + \alpha_{0,x_{min}}^* f^*(x_{min}) = 0,$$

と与えられた場合の、区間 $[-1, 1]$ へ写された関数に対する境界条件を表すには微分関係

$$\frac{df^*}{dx^*} = \frac{dx}{dx^*} \frac{df}{dx} = \frac{2}{x_{max} - x_{min}} \frac{df}{dx} \equiv \frac{1}{D_{fac}} \frac{df}{dx}$$

を気をつけなければならない。ここで $D_{fac} \equiv (x_{max} - x_{min})/2$ である。したがって、対応する境界条件は

$$\frac{\alpha_{1,x_{max}}^*}{D_{fac}} \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=1} + \alpha_{0,x_{max}}^* f(1) = 0, \quad \frac{\alpha_{1,x_{min}}^*}{D_{fac}} \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=-1} + \alpha_{0,x_{min}}^* f(-1) = 0,$$

となる。

$$\begin{aligned}
 & \times \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} \cdot k^2 + \alpha_{0,1} \\ \alpha_{1,-1} \cdot (-1)^{k+1} k^2 + \alpha_{0,-1} \cdot (-1)^k \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\alpha_{1,-1}\alpha_{0,1} - \alpha_{1,1}\alpha_{0,-1} - 2\alpha_{0,-1}\alpha_{0,1}} \\
 & \times \begin{pmatrix} \alpha_{0,-1}[\alpha_{1,1} \cdot k^2 + \alpha_{0,1}] - \alpha_{0,1}[\alpha_{1,-1} \cdot (-1)^{k+1} k^2 + \alpha_{0,-1} \cdot (-1)^k] \\ (-\alpha_{1,-1} + \alpha_{0,-1})(\alpha_{1,1} \cdot k^2 + \alpha_{0,1}) + (\alpha_{1,1} + \alpha_{0,1})[\alpha_{1,-1} \cdot (-1)^{k+1} k^2 + \alpha_{0,-1} \cdot (-1)^k] \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

対応する変換行列は

$$\tilde{A}_{0,k} = C_0(k) \quad (k = 2, 3, \dots, K) \quad (67)$$

$$\tilde{A}_{1,k} = C_1(k) \quad (k = 2, 3, \dots, K) \quad (68)$$

$$\tilde{A}_{k,k} = 1 \quad (n = 2, 3, \dots, K) \quad (69)$$

係数行列式が 0 となる場合には基底の取り方を変えなければならない．係数行列式が 0 となる時には基底の一つが

$$\phi_2(x) = C_1 T_1(x) + C_0 T_0(x)$$

という形となることを意味している． C_1, C_0 は片側の境界条件から定めることができ、例えば $x = 1$ での境界条件から

$$\alpha_{1,1}C_1 + \alpha_{0,1}(C_1 + C_0) = 0, \quad (\alpha_{1,1} + \alpha_{0,1})C_1 + \alpha_{0,1}C_0 = 0,$$

すなわち

$$C_1 = -\alpha_{0,1} \quad C_0 = \alpha_{1,1} + \alpha_{0,1}, \quad (70)$$

と定められる．したがって

$$\phi_2(x) = -\alpha_{0,1}T_1(x) + (\alpha_{1,1} + \alpha_{0,1})C_0T_0(x).$$

$n > 2$ での境界条件を満たす n 次の基底は

$$\phi_k(x) = T_k(x) + C_2T_2(x) + C_1T_0(x)$$

と仮定する．境界条件から

$$\begin{aligned}
 & \alpha_{1,1}(k^2 + 4C_2 + C_1) + \alpha_{0,1}(1 + C_2 + C_1) = 0, \\
 & \alpha_{1,-1}[(-1)^{k+1}k^2 - 4C_2 + C_1] + \alpha_{0,-1}[(-1)^k + C_2 - C_1] = 0,
 \end{aligned}$$

これを整理すると

$$\begin{pmatrix} 4\alpha_{1,1} + \alpha_{0,1} & \alpha_{1,1} + \alpha_{0,1} \\ -4\alpha_{1,-1} + \alpha_{0,-1} & \alpha_{1,-1} - \alpha_{0,-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 \\ C_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} \cdot k^2 + \alpha_{0,1} \\ \alpha_{1,-1} \cdot (-1)^{k+1} k^2 + \alpha_{0,-1} \cdot (-1)^k \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} C_2 \\ C_1 \end{pmatrix} &= -\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} de-bf \\ -ce+af \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} a &= 4\alpha_{1,1} + \alpha_{0,1} \\ b &= \alpha_{1,1} + \alpha_{0,1} \\ c &= -4\alpha_{1,-1} + \alpha_{0,-1} \\ d &= \alpha_{1,-1} - \alpha_{0,-1} \\ e &= \alpha_{1,1} \cdot k^2 + \alpha_{0,1} \\ f &= \alpha_{1,-1} \cdot (-1)^{k+1} k^2 + \alpha_{0,-1} \cdot (-1)^k \end{aligned}$$

対応する変換行列は

$$\tilde{A}_{0,2} = \alpha_{1,1} + \alpha_{0,1} \quad (71)$$

$$\tilde{A}_{1,2} = -\alpha_{0,1} \quad (72)$$

$$\tilde{A}_{1,k} = C_1(k) \quad (k = 3, 4, \dots, K) \quad (73)$$

$$\tilde{A}_{2,k} = C_2(k) \quad (k = 3, 4, \dots, K) \quad (74)$$

$$\tilde{A}_{k,k} = 1 \quad (n = 3, 4, \dots, K) \quad (75)$$

特別な場合に先の結果と一致することを確認しておこう.

$\alpha_{1,1} = \alpha_{1,-1} = 0, \alpha_{0,1} = \alpha_{0,-1} = 1$ の場合は両端ディリクレ条件に一致する. このとき上の係数 C_1, C_0 は

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - (-1)^k \\ 1 + (-1)^k \end{pmatrix}$$

$\alpha_{1,1} = \alpha_{0,-1} = 0, \alpha_{0,1} = \alpha_{1,-1} = 1$ の場合は片側ディリクレ, 片側ノイマン条件に一致する. このとき上の係数 C_1, C_0 は

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(-1)^{k+1} \cdot k^2 \\ -1 + (-1)^{k+1} \cdot k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^k \cdot k^2 \\ (-1)^{k+1} \cdot k^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$\alpha_{0,1} = \alpha_{1,-1} = 0, \alpha_{1,1} = \alpha_{0,-1} = 1$ の場合はもう一つの片側ディリクレ, 片側ノイマン条件に一致する. このとき上の係数 C_1, C_0 は

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} k^2 \\ k^2 + (-1)^k \end{pmatrix}$$

$\alpha_{1,1} = \alpha_{1,-1} = 1, \alpha_{0,1} = \alpha_{0,-1} = 0$ の場合は両端ノイマン条件に一致する. このとき上の係数 C_2, C_1 は $a = 4, b = 1, c = -4, d = 1, e = k^2, f = (-1)^{k+1}k^2$ より

$$\begin{pmatrix} C_2 \\ C_1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} k^2 - (-1)^{k+1}k^2 \\ 4k^2 + 4(-1)^{k+1}k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -[1 + (-1)^k]k^2/8 \\ -[1 - (-1)^k]k^2/2 \end{pmatrix}$$

また最低次の基底は

$$\phi_2(x) = T_0(x)$$

である.

4 非圧縮流体の流線関数・ポテンシャルのための定式化

4.1 非圧縮流体の流線関数・ポテンシャルのためのガラーキン基底の例：その 1

n 次の基底が

$$\phi_k(x) = T_k(x) + C_{k-1}T_{k-1}(x) + C_{k-2}T_{k-2}(x) + C_{k-3}T_{k-3}(x) + C_{k-4}T_{k-4}(x)$$

の場合の各境界条件に対応するガラーキン基底を求める. この場合, チェビシェフ係数とガラーキン係数の間の変換行列 (A_{ln}) は

$$\begin{aligned} A_{k,k} &= 1, \\ A_{k-1,k} &= C_{k-1,k}, \quad A_{k-2,k} = C_{k-2}, \\ A_{k-3,k} &= C_{k-3,k}, \quad A_{k-4,k} = C_{k-4}, \end{aligned} \tag{76}$$

と与えられることになる.

4.1.1 両境界で粘着条件の場合

両境界で粘着条件の場合を考える．この場合区間両端での条件は、値と微分値がともに 0 となる境界条件となる．すなわち、

$$f(1) = f(-1) = 0, \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=-1} = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=1} = 0. \quad (77)$$

境界条件を適用すると、

$$\begin{aligned} \phi_k(1) &= 1 + C_{k-1} + C_{k-2} + C_{k-3} + C_{k-4} = 0, \\ \phi_k(-1) &= (-1)^k (1 - C_{k-1} + C_{k-2} - C_{k-3} + C_{k-4}) = 0, \\ \phi'_k(1) &= T'_k + T'_{k-1}C_{k-1} + T'_{k-2}C_{k-2} + T'_{k-3}C_{k-3} + T'_{k-4}C_{k-4} = 0, \\ \phi'_k(-1) &= (-1)^k (T'_k - T'_{k-1}C_{k-1} + T'_{k-2}C_{k-2} - T'_{k-3}C_{k-3} + T'_{k-4}C_{k-4}) = 0. \end{aligned}$$

ここで $T'_k = \left. \frac{\partial T_k}{\partial x} \right|_{x=1} = k^2$ である．これを解くと

$$\begin{aligned} C_{k-1} &= C_{k-3} = 0, \\ C_{k-2} &= -\frac{T'_k - T'_{k-4}}{T'_{k-2} - T'_{k-4}} = -\frac{2(k-2)}{k-3}, \\ C_{k-4} &= \frac{T'_k - T'_{k-2}}{T'_{k-2} - T'_{k-4}} = \frac{k-1}{k-3}. \end{aligned}$$

4.1.2 両境界で自由すべり条件の場合

両境界で自由すべり条件の場合を考える．この場合区間両端での条件は、値と 2 階微分値がともに 0 となる境界条件となる．すなわち、

$$f(1) = f(-1) = 0, \quad \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=-1} = \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=1} = 0. \quad (78)$$

境界条件を適用すると、

$$\begin{aligned} \phi_k(1) &= 1 + C_{k-1} + C_{k-2} + C_{k-3} + C_{k-4} = 0, \\ \phi_k(-1) &= (-1)^k (1 - C_{k-1} + C_{k-2} - C_{k-3} + C_{k-4}) = 0, \\ \phi''_k(1) &= T''_k + T''_{k-1}C_{k-1} + T''_{k-2}C_{k-2} + T''_{k-3}C_{k-3} + T''_{k-4}C_{k-4} = 0, \\ \phi''_k(-1) &= (-1)^k (T''_k - T''_{k-1}C_{k-1} + T''_{k-2}C_{k-2} - T''_{k-3}C_{k-3} + T''_{k-4}C_{k-4}) = 0. \end{aligned}$$

ここで $T_k'' = \frac{\partial^2 T_k}{\partial x^2} \Big|_{x=1} = \frac{k^2(k^2 - 1)}{3}$ である. これを解くと

$$\begin{aligned} C_{k-1} &= C_{k-3} = 0, \\ C_{k-2} &= -\frac{T_k'' - T_{k-4}''}{T_{k-2}'' - T_{k-4}''}, \\ C_{k-4} &= \frac{T_k'' - T_{k-2}''}{T_{k-2}'' - T_{k-4}''} \end{aligned}$$

4.1.3 片側自由すべり条件, 他方粘着条件の場合

片側自由すべり条件, 他方粘着条件の場合を考える. この場合, 片側境界にて値と 2 階微分値, もう一方では値と 1 階微分値が 0 となる境界条件となる. すなわち,

$$f(1) = f(-1) = 0, \quad \frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_{x=1} = \frac{d^1 f}{dx^1} \Big|_{x=-1} = 0. \quad (79)$$

境界条件を適用すると,

$$\begin{aligned} \phi_k(1) &= 1 + C_{k-1} + C_{k-2} + C_{k-3} + C_{k-4} = 0, \\ \phi_k(-1) &= (-1)^k (1 - C_{k-1} + C_{k-2} - C_{k-3} + C_{k-4}) = 0, \\ \phi_k''(1) &= T_k'' + T_{k-1}'' C_{k-1} + T_{k-2}'' C_{k-2} + T_{k-3}'' C_{k-3} + T_{k-4}'' C_{k-4} = 0, \\ \phi_k'(-1) &= (-1)^k (T_k' - T_{k-1}' C_{k-1} + T_{k-2}' C_{k-2} - T_{k-3}' C_{k-3} + T_{k-4}' C_{k-4}) = 0, \end{aligned}$$

である. これを解くと

$$\begin{aligned} C_{k-1} &= -C_{k-3}, \\ C_{k-2} &= -C_{k-4} - 1, \\ C_{k-3} &= \frac{1}{\Delta} (T_{k-2}' - T_{k-4}') (T_k'' - T_{k-2}'') - (T_{k-2}'' - T_{k-4}'') (T_k' - T_{k-2}'), \\ C_{k-4} &= \frac{1}{\Delta} (T_{k-1}' - T_{k-3}') (T_k'' - T_{k-2}'') + (T_{k-1}'' - T_{k-3}'') (T_k' - T_{k-2}'), \end{aligned}$$

ここで

$$\Delta = (T_{k-1}'' - T_{k-3}'') (T_{k-2}' - T_{k-4}') + (T_{k-1}' - T_{k-3}') (T_{k-2}'' - T_{k-4}'')$$

である.

4.1.4 片側粘着条件, 他方自由すべり条件の場合

片側粘着条件, 他方自由すべり条件の場合を考える. この場合, 片側境界にて値と 1 階微分値, もう一方では値と 2 階微分値が 0 となる境界条件となる. すなわち,

$$f(1) = f(-1) = 0, \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=1} = \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=-1} = 0. \quad (80)$$

境界条件を適用すると,

$$\begin{aligned} \phi_k(1) &= 1 + C_{k-1} + C_{k-2} + C_{k-3} + C_{k-4} = 0, \\ \phi_k(-1) &= (-1)^k (1 - C_{k-1} + C_{k-2} - C_{k-3} + C_{k-4}) = 0, \\ \phi'_k(1) &= T'_k + T'_{k-1}C_{k-1} + T'_{k-2}C_{k-2} + T'_{k-3}C_{k-3} + T'_{k-4}C_{k-4} = 0, \\ \phi''_k(-1) &= (-1)^k (T''_k - T''_{k-1}C_{k-1} + T''_{k-2}C_{k-2} - T''_{k-3}C_{k-3} + T''_{k-4}C_{k-4}) = 0, \end{aligned}$$

である. これを解くと

$$\begin{aligned} C_{k-1} &= -C_{k-3}, \\ C_{k-2} &= -C_{k-4} - 1, \\ C_{k-3} &= \frac{1}{\Delta} (T''_{k-2} - T''_{k-4})(T'_k - T'_{k-2}) - (T'_{k-2} - T'_{k-4})(T''_k - T''_{k-2}), \\ C_{k-4} &= \frac{1}{\Delta} (T''_{k-1} - T''_{k-3})(T'_k - T'_{k-2}) + (T'_{k-1} - T'_{k-3})(T''_k - T''_{k-2}), \end{aligned}$$

ここで

$$\Delta = (T'_{k-1} - T'_{k-3})(T''_{k-2} - T''_{k-4}) + (T''_{k-1} - T''_{k-3})(T'_{k-2} - T'_{k-4})$$

である.

4.2 非圧縮流体の流線関数・ポテンシャルのためのガラーキン基底の例：その 2

n 次の基底が

$$\phi_k(x) = T_k(x) + C_3 T_3(x) + C_2 T_2(x) + C_1 T_1(x) + C_0 T_0(x)$$

の場合の各境界条件に対応するガラーキン基底を求める. この場合, チェビシェフ係数とガラーキン係数の間の変換行列 (A_{ln}) は

$$\begin{aligned} A_{k,k} &= 1, \\ A_{3,k} &= C_3, \quad A_{2,k} = C_2, \\ A_{1,k} &= C_1, \quad A_{0,k} = C_0, \end{aligned} \quad (81)$$

と与えられることになる.

4.2.1 両境界で粘着条件の場合

両境界で粘着条件の場合を考える. この場合区間両端での条件は, 値と微分値がともに 0 となる境界条件となる. すなわち,

$$f(1) = f(-1) = 0, \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=-1} = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=1} = 0. \quad (82)$$

境界条件を適用すると,

$$\begin{aligned} \phi_k(1) &= 1 + C_3 + C_2 + C_1 + C_0 = 0, \\ \phi_k(-1) &= (-1)^k - C_3 + C_2 - C_1 + C_0 = 0, \\ \phi'_k(1) &= k^2 + 9C_3 + 4C_2 + C_1 = 0, \\ \phi'_k(-1) &= (-1)^{k+1}k^2 + 9C_3 - 4C_2 + C_1 = 0. \end{aligned}$$

これを解くと

$$C_3 = \frac{1}{16}[1 - (-1)^k](1 - k^2), \quad C_2 = -\frac{1}{8}[(-1)^k + 1]k^2, \quad (83)$$

$$C_1 = -\frac{1}{16}[1 - (-1)^k](9 - k^2), \quad C_0 = \frac{1}{8}[(-1)^k + 1](k^2 - 4). \quad (84)$$

4.2.2 両境界で自由すべり条件

両境界で自由すべり条件の場合を考える. この場合区間両端での条件は, 値と 2 階微分値がともに 0 となる境界条件となる. すなわち,

$$f(1) = f(-1) = 0, \quad \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=-1} = \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=1} = 0. \quad (85)$$

境界条件から

$$\begin{aligned} \phi_k(1) &= 1 + C_3 + C_2 + C_1 + C_0 = 0, \\ \phi_k(-1) &= (-1)^n - C_3 + C_2 - C_1 + C_0 = 0, \\ \phi''_k(1) &= \frac{k^2(k^2 - 1)}{3} + 24C_3 + 4C_2 = 0, \\ \phi''_k(-1) &= (-1)^k \frac{k^2(k^2 - 1)}{3} - 24C_3 + 4C_2 = 0. \end{aligned}$$

これを解くと

$$C_3 = -\frac{1}{144}[1 - (-1)^k]k^2(k^2 - 1), \quad (86)$$

$$C_2 = -\frac{1}{24}[(-1)^k + 1]k^2(k^2 - 1), \quad (87)$$

$$C_1 = \frac{1}{144}[1 - (-1)^k][k^2(k^2 - 1) - 72], \quad (88)$$

$$C_0 = \frac{1}{24}[(-1)^k + 1][k^2(k^2 - 1) - 12]. \quad (89)$$

4.2.3 片側自由すべり条件, 他方粘着条件の場合

片側自由すべり条件, 他方粘着条件の場合を考える. この場合, 片側境界にて値と 2 階微分値, もう一方では値と 1 階微分値が 0 となる境界条件となる. すなわち,

$$f(1) = f(-1) = 0, \quad \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=1} = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=-1} = 0. \quad (90)$$

境界条件から

$$\begin{aligned} \phi_k(1) &= 1 + C_3 + C_2 + C_1 + C_0 = 0, \\ \phi_k(-1) &= (-1)^k - C_3 + C_2 - C_1 + C_0 = 0, \\ \phi_k''(1) &= \frac{k^2(k^2 - 1)}{3} + 24C_3 + 4C_2 = 0, \\ \phi_k'(-1) &= (-1)^{k+1}k^2 + 9C_3 - 4C_2 + C_1 = 0. \end{aligned}$$

これを解くと

$$C_3 = -\frac{1}{32} \left[\frac{1}{3}k^2(k^2 - 1) + (-1)^{k+1}k^2 - \frac{1 - (-1)^k}{2} \right], \quad (91)$$

$$C_2 = -\frac{1}{48}k^2(k^2 - 1) + \frac{3}{16}(-1)^{k+1}k^2 - \frac{3}{32}[1 - (-1)^k], \quad (92)$$

$$C_1 = \frac{1}{96}k^2(k^2 - 1) + \frac{1}{32}(-1)^{k+1}k^2 - \frac{33}{64}[1 - (-1)^k], \quad (93)$$

$$C_0 = \frac{1}{48}k^2(k^2 - 1) - \frac{3}{16}(-1)^{k+1}k^2 + \frac{3}{32}[1 - (-1)^k] - \frac{1}{2}[1 + (-1)^k]. \quad (94)$$

4.2.4 片側粘着条件条件, 他方自由すべりの場合

片側粘着条件, 他方自由すべり条件の場合を考える. この場合, 片側境界にて値と 1 階微分値, もう一方では値と 2 階微分値が 0 となる境界条件となる. すなわち,

$$f(1) = f(-1) = 0, \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=1} = \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=-1} = 0. \quad (95)$$

境界条件から

$$\begin{aligned}\phi_k(1) &= 1 + C_3 + C_2 + C_1 + C_0 = 0, \\ \phi_k(-1) &= (-1)^n - C_3 + C_2 - C_1 + C_0 = 0, \\ \phi'_k(1) &= k^2 + 9C_3 + 4C_2 = 0, \\ \phi''_k(-1) &= (-1)^k \frac{k^2(k^2 - 1)}{3} - 24C_3 + 4C_2 + C_1 = 0.\end{aligned}$$

これを解くと

$$C_3 = \frac{1}{32} \left[\frac{(-1)^k}{3} k^2 (k^2 - 1) - k^2 + \frac{1 - (-1)^k}{2} \right], \quad (96)$$

$$C_2 = -\frac{(-1)^k}{48} k^2 (k^2 - 1) - \frac{3}{16} k^2 + \frac{3}{32} [1 - (-1)^k], \quad (97)$$

$$C_1 = -\frac{(-1)^k}{96} k^2 (k^2 - 1) + \frac{1}{32} k^2 - \frac{33}{64} [1 - (-1)^k], \quad (98)$$

$$C_0 = \frac{(-1)^k}{48} k^2 (k^2 - 1) + \frac{3}{16} k^2 - \frac{3}{32} [1 - (-1)^k] - \frac{1}{2} [1 + (-1)^k]. \quad (99)$$