Battisti et al. (1999) の強制定常問題
これは熱帯の大気境界層を混合層と仮定したときに、SST 偏差が大気に与える強制に対する大気の応答を見る問題である。系は赤道 β 面における浅水定常線形混合層モデル

$$\alpha u - \beta y v + \partial \Phi / \partial x = 0, \tag{11.50}$$

$$\alpha v + \beta y u + \partial \Phi / \partial y = 0, \tag{11.51}$$

$$\alpha \Phi + c_b^2 (1 - \varepsilon)(\partial u / \partial x + \partial v / \partial y) = -\alpha \Gamma \theta_v \tag{11.53}$$

である。方程式 3 つに対して変数 u, v, Φ の 3 つで閉じた系となっている。ここで、SST 偏差は境界層の仮温位の平均場からの摂動という形で与えられている。この方程式は時間発展しない楕円型方程式であるため、反復法などを用いて数値的に求積する。

まず、楕円型方程式にするため、(11.50), (11.51) を用いて u および v についての方程式を求める。まず、(11.51) を (11.50) に代入して v を消去すると、

$$\left(\alpha^2 + \beta^2 y^2\right) u = -\left[\beta y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right], \tag{ap11.50.1}$$

同様に (11.50) を (11.51) に代入して u を消去すると、

$$\left(\alpha^2 + \beta^2 y^2\right) v = \left[\beta y \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right], \tag{ap11.51.1}$$

となる。これらを (11.53) に代入して u, v を消去すると、

$$\begin{aligned}
& c_b^2 (1-\varepsilon) \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2 y^2)} \left(\beta y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2 y^2)} \left(\beta y \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right\} \right] \\
& + \alpha \Phi = -\alpha \Gamma \theta_v \\
\Rightarrow \quad & c_b^2 (1-\varepsilon) \left[-\left\{ \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2 y^2)} \left(\beta y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} + \alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) \right\} + \left\{ \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2 y^2)} \left(\beta y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \beta \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \right\} \right. \\
& + \left. \left\{ \frac{-2\beta^2 y}{(\alpha^2 + \beta^2 y^2)^2} \left(\beta y \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right\} \right] + \alpha \Phi = -\alpha \Gamma \theta_v
\end{aligned}$$

となるので、これを Φ の微分の階数で整理すると、

$$\frac{c_b^2 (1-\varepsilon)}{(\alpha^2 + \beta^2 y^2)} \left[-\alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \beta \frac{\alpha^2 - \beta^2 y^2}{(\alpha^2 + \beta^2 y^2)} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{2\alpha \beta^2 y}{(\alpha^2 + \beta^2 y^2)} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] + \alpha \Phi = -\alpha \Gamma \theta_v \tag{ap11.51.2}$$

となる。さらに、計算しやすいようにいくつか係数を整理すると、

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\beta}{\alpha} \frac{\alpha^2 - \beta^2 y^2}{(\alpha^2 + \beta^2 y^2)} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{2\beta^2 y}{(\alpha^2 + \beta^2 y^2)} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\
& - \frac{\left(\alpha^2 + \beta^2 y^2\right)}{c_b^2 (1-\varepsilon)} \Phi = \frac{\left(\alpha^2 + \beta^2 y^2\right)}{c_b^2 (1-\varepsilon)} \Gamma \theta_v
\end{aligned} \tag{ap11.51.3}$$

となる。この式を Φ について数値解を求める。さらに得られた Φ から (ap11.50.1), (ap11.51.1) を用いることで u, v が得られる。

また, Battisti et al. (1999) で導入されている、対流による境界層と自由大気との混合 (venting) は、外的強制として与えられる SST 偏差に応答する大気境界層での擾乱の振幅を増加させ、その水平スケールを小さくする働きがある。これに対応して、境界層内での収束の分布も振幅が増加し水平スケールは小さくなる。

これを確かめるために、図 11.2 のように、太平洋赤道域に仮想的な SST 偏差をガウシアン状に分布させたときの、境界層内の大気の運動場の応答を (ap11.51.3) に基づいて計算した。その結果は図 11.3 のようになり、左側は領域に一様に対流が発生している状態での境界層上端のジオポテンシャル高度偏差と境界層内の水平収束の分布である。右側は領域に一切の対流が発生していない状態を表す。ここで、SST の偏差領域はどちらの状況でも同じであることに注意。まず、どちらの結果についても、SST の正偏差領域に対応してジオポテンシャル偏差は負となり、そこでは境界層内の水平収束が卓越する分布となる。しかし、ジオポテンシャルと水平収束の振幅は対流の発生している場合の方が大きくなっている。逆にジオポテンシャル偏差と水平収束の水平スケールは、対流が発生していない場合の方が大きくなっている。ここで、水平収束の水平スケールは振幅の最大値の e^{-1} となる地点までの南北幅で定義した。

対流による境界層内の venting から、同じ SST 偏差で強制された場合でも、それに応答するジオポテンシャル偏差を支える水平収束は対流がない場合より対流がある場合の方が大きくならなければならない。そのため、対流が発生している状況では境界層内の水平収束の大きさは大きくなる傾向にある。Battisti et al. (1999) では、この対流による境界層の venting 作用を境界層上端を軟化させる作用であると述べている。つまり、同じ SST 偏差に対して水平収束やジオポテンシャルの変動量は対流がある場合の方が大きいので, 境界層上端面が軟らかいということになる。

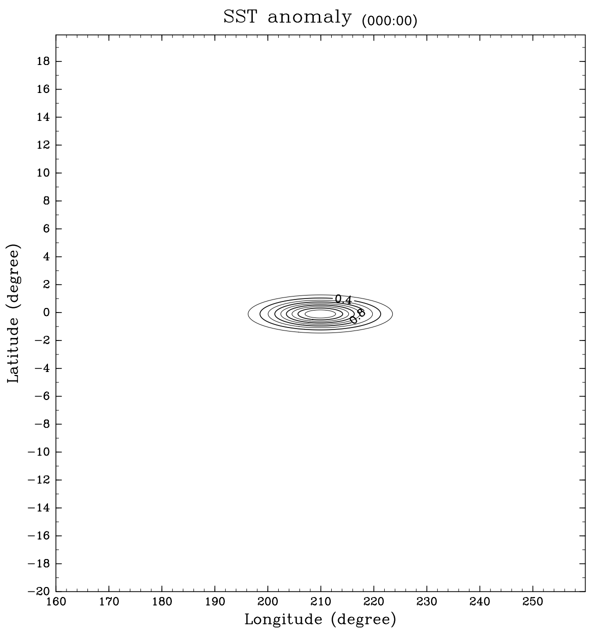

図 11.2: 赤道太平洋において与えられた、エルニーニョを想定した理想的な SST 偏差。

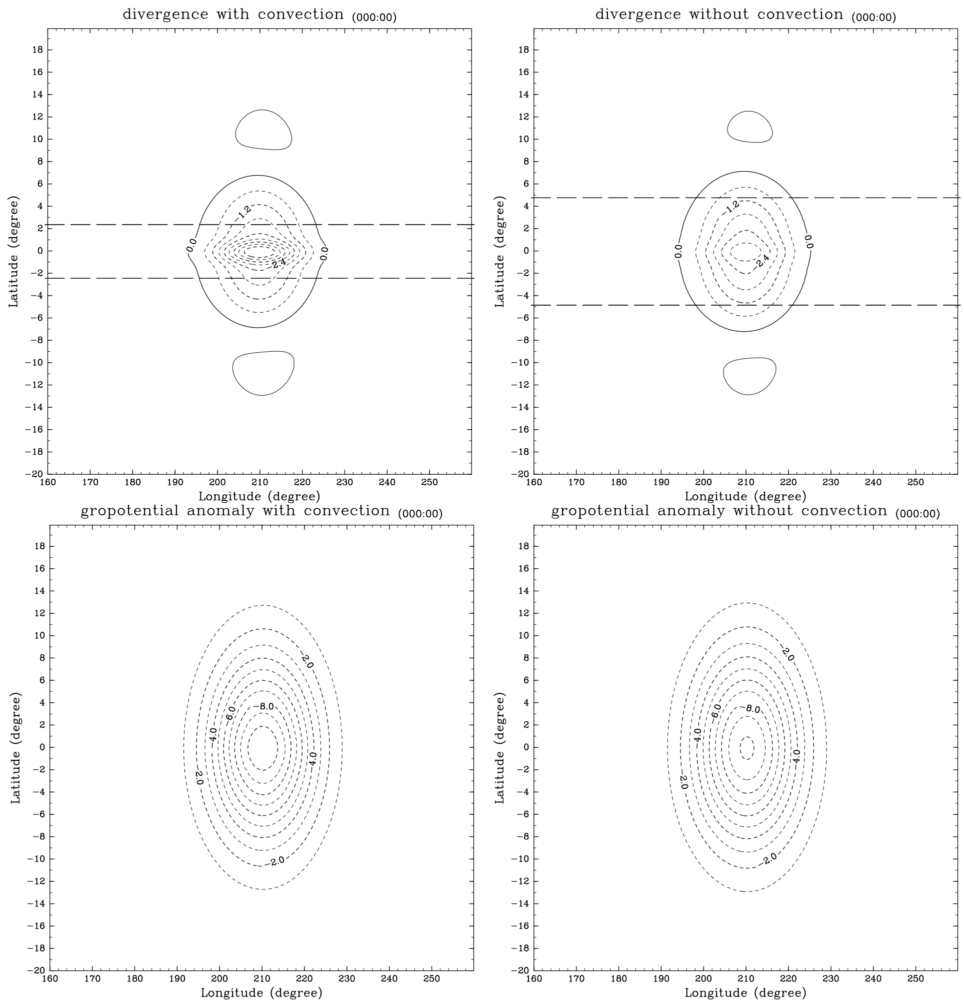

図 11.3: (ap11.51.3) 式に基づいて計算された理想的な SST 偏差に対する大気の応答。左側は対流による境界層混合がある場合、右はない場合の計算結果を示し、上は境界層内の水平発散、下はジオポテンシャル偏差の水平分布を示す。また、破線は収束の水平スケール (南北幅) 表す。単位はそれぞれ $\mathrm{m^2\ s^{-2}}$, $\times 10^{-6}\mathrm{s^{-1}}$.