(11.38) の求解と (11.39) の証明
赤道波の子午面構造方程式は

$$\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} + \left[\left(\frac{\nu^2}{gh_e} - k^2 - \frac{k}{\nu}\beta\right) - \frac{\beta^2 y^2}{gh_e}\right]\hat{v} = 0 \tag{11.38}$$

である。これは

$$\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} + \left(\varepsilon - \alpha^2 y^2\right)\hat{v} = 0 \tag{ap11.38.1}$$

と等価である。ここで、

$$\varepsilon \equiv \frac{\nu^2}{gh_e} - k^2 - \frac{k}{\nu}\beta, \quad \alpha^2 \equiv \frac{\beta^2}{gh_e}$$

まず、$|y| \to \infty$ における漸近解を考える。すると、

$$\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} - \alpha^2 y^2 \hat{v} = 0, \quad (|y| \to \infty) \tag{ap11.38.2}$$

と近似できる。このとき、$\hat{v} = Ce^{\phi(y)}$ であると仮定する。この仮定解を (ap11.38.2) に代入すると、

$$\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[e^{\phi(y)}\frac{\partial \phi}{\partial y}\right] = e^{\phi(y)}\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + e^{\phi(y)}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2$$

であることに注意して、

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 - \alpha^2 y^2 = 0 \tag{ap11.38.3}$$

が得られる。ここで、$\phi(y)$ が有限の多項式であり [*1]、その最高階数が n であるとする。つまり、$\phi(y) = ay^n$ と仮定する。a は任意定数である。これを (ap11.38.3) に代入すると、

$$an(n-1)y^{n-2} + a^2 n^2 y^{2(n-1)} - \alpha^2 y^2 = 0 \tag{ap11.38.4}$$

となる。$|y| \to \infty$ における上式の各項の大きさを比較する。まず、$n = 0$ のとき、$\alpha = 0$ でなければならないので n には不適当である。$n = 1$ のとき、左辺第 2 項が定数となるので同じく不適当。$n = 2$ のとき、左辺第 1 項が定数となり、残り 2 項が支配的となる [*2]。よって、$n = 2$ が適当である。このとき、(ap11.38.4) は

$$4a^2 - \alpha^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \pm\frac{\alpha}{2}$$

となる。ゆえに、$\phi(y) = \pm\alpha y^2/2$ であるため、$\hat{v}$ の $|y| \Rightarrow \infty$ での漸近解は

$$\hat{v} \simeq C_1 e^{-\alpha y^2/2} + C_2 e^{\alpha y^2/2}$$

となる。しかし、物理的に意味のある解は $|y| \to \infty$ において減衰するモードのみであるため、

$$\hat{v} \simeq C_1 e^{-\alpha y^2/2}$$

[*1] 無限級数関数である可能性は考えない。なぜなら、そのような関数は $|y| \to \infty$ において発散するため、物理的には無意味な解である。

[*2] 以降、$n = 3, 4, \cdots$ ではいずれも左辺第 2 項のみが卓越するので、$a = 0$ にならなければならない。しかし、そうすると $\phi(y) = 0$ となるので最初の仮定に反する。よって、ここでは $n = 2$ が適当である。

がその漸近解となる。ここで、C_1, C_2 は任意定数である。ここで注意すべきは上式は (ap11.38.2) の漸近解であり、(ap11.38.1) の厳密解ではないということである。そこで、(ap11.38.1) の解を

$$\hat{v} = f(y)e^{-\alpha y^2/2}$$

と仮定する。これは、(ap11.38.2) が (ap11.38.1) の $|y| \to \infty$ での漸近極限であるという事実に由来する。つまり、(ap11.38.1) は $|y| \to \infty$ において、上式の漸近解に一致しなければならないので、このような形が仮定できるであることは容易に想像できる。これを (ap11.38.1) に代入すると、

$$\begin{aligned} -\alpha f\left[1-\alpha y^2\right]e^{-\alpha y^2/2} - 2\alpha y e^{-\alpha y^2/2}\frac{\partial f}{\partial y} + e^{-\alpha y^2/2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \left(\varepsilon - \alpha y^2\right) f e^{-\alpha y^2/2} = 0 \\ \Rightarrow \quad -\alpha f\left[1-\alpha y^2\right] - 2\alpha y\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \left(\varepsilon - \alpha^2 y^2\right) f = 0 \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2\alpha y\frac{\partial f}{\partial y} + (\varepsilon - \alpha) f = 0 \end{aligned} \tag{ap11.38.5}$$

となる。ただし、ライプニッツの公式から

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 (f e^{ay^2})}{\partial y^2} &= f\frac{\partial^2 (e^{ay^2})}{\partial y^2} + 4aye^{ay^2}\frac{\partial f}{\partial y} + e^{ay^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ &= 2af\left[1+2ay^2\right]e^{ay^2} + 4aye^{ay^2}\frac{\partial f}{\partial y} + e^{ay^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{aligned}$$

であるということに注意する。このとき、$\xi \equiv \sqrt{\alpha} y$ となるように座標変換すると、(ap11.38.5) は

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - 2\xi\frac{\partial f}{\partial \xi} + \left(\frac{\varepsilon}{\alpha} - 1\right) f = 0 \tag{ap11.38.6}$$

となる。ここで、

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \xi} = \sqrt{\alpha}\frac{\partial}{\partial \xi}$$

であり、$f = f(\xi)$ であることに注意する。

(ap11.38.6) はエルミートの微分方程式と呼ばれ、左辺第 3 項の係数の値で関数形が異なる：

正の整数である場合 解はエルミート多項式という、定義域に対して有界な解。

それ以外 解はエルミート関数と呼ばれる不確定特異点をもつ無限級数関数。

物理的に意味のある解は定義域に対して有界な値をもつエルミート多項式である [*3]。よって、(ap11.38.6) の左辺第 3 項は正の整数とならなければならない。つまり、

$$\left(\frac{\varepsilon}{\alpha} - 1\right) = 2n, \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{ap11.38.7}$$

[*3] エルミートの微分方程式の厳密解の導出とその解の考察は次の付録項目参照。

という関係を満たすときのみ、赤道波の子午面構造関数は形をもつことになる。上式の ε, α を元の形で表現すると、

$$\frac{\sqrt{gh_e}}{\beta}\left(\frac{\nu^2}{gh_e} - k^2 - \frac{k}{\nu}\beta\right) = 2n+1, \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{ap11.38.7}$$

となる。これは $n = 0$ を除いて (11.39) に等しい。つまり、エルミートの微分方程式のみからでは $n = 0$ のモードの存在は証明できない。これに関しては Matsuno (1966) 参照。

エルミートの微分方程式の求積とエルミート多項式の概形

ここでは、前の項目で現れたエルミートの微分方程式を詳細に求積し、その解の形を考察する。それは

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2ny = 0 \qquad (n > 0)$$

という変数係数の微分方程式であるため、級数解法を用いて解を求める。まず、この微分方程式の各係数は変数係数であるが、その形から、特異点をもたず、任意の x で通常点となっている。したがって、$x = 0$ まわりで解を展開すると、

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

という形で級数展開が可能となることがわかる。この解を考察する微分方程式に代入すると、

$$\frac{d^2y}{dx^2} \ : 2\cdot 1a_2 + 3\cdot 2\cdot a_3x + \cdots m(m-1)a_m x^{m-2} = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2}$$

$$\frac{dy}{dx} \ : 1a_1 + 2a_2x + \cdots ma_m x^{m-1} = \sum_{m=1}^{\infty} ma_m x^{m-1}$$

という計算ができる。これを代入して、

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} - 2\sum_{m=1}^{\infty} ma_m x^m + 2n\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0$$

という多項式の級数式が得られる。これを x の多項式と考え、同類項の係数を計算すると、a_0 からそれぞれ、

$$\begin{aligned}
x^0 &: 2a_2 + 2na_0 = 0 \\
x^1 &: 6a_3 - 2a_1 + 2na_1 = 0 \\
x^2 &: 12a_4 - 4a_2 + 2na_2 = 0 \\
x^3 &: 20a_5 - 6a_3 + 2na_3 = 0 \\
&\quad \vdots \\
x^{m-1} &: (m+1)ma_{m+1} - 2(m-1)a_{m-1} + 2na_{m-1} = 0 \\
x^m &: (m+2)(m+1)a_{m+2} - 2ma_m + 2na_m = 0
\end{aligned}$$

という関係式が得られる。a_0, a_1 を任意定数とすると、

$$a_2 = -na_0, \quad a_3 = \frac{1}{3}(1-n)\,a_1$$

という式が求められる。これを添え字が偶数と奇数の場合で分けて考えると、偶数の場合、

$$a_4 = \frac{1}{12}(4-2n)\,a_2,\ \cdots,\ a_{m+2} = \frac{1}{(m+2)(m+1)}(2m-2n)\,a_m \quad (m = 2, 4, \cdots)$$

となり、a_m についての漸化式を解くと、

$$\begin{aligned}
a_{m+2} =& \frac{1}{(m+2)(m+1)}(2m-2n)\,a_m \\
=& \frac{1}{(m+2)(m+1)}(2m-2n)\frac{1}{m(m-1)}\{2(m-2)-2n\}\,a_{m-2} \\
&\vdots \\
=& \frac{(2m-2n)(2m-2n-4)\cdots(4-2n)}{(m+2)(m+1)\cdots 4\cdot 3}a_2
\end{aligned}$$

ここで、$a_2 = -na_0$ を用いると、

$$= \frac{(2m-2n)(2m-2n-4)\cdots(4-2n)(-n)}{(m+2)(m+1)\cdots 4\cdot 3}a_0$$

となる。ここで、式を見やすくするために、分母子に 2 をかけると、

$$= \frac{(2m-2n)(2m-2n-4)\cdots(4-2n)(-2n)}{(m+2)!}a_0$$

よって、a_m については、

$$a_m = (-1)^{m/2}\frac{(2n+4-2m)\cdots(2n-4)(2n)}{m!}a_0, \quad (m = 2, 4, \cdots) \qquad \text{(ap11.39.1)}$$

となる。ただし、n に負号がつくことを避けるため、$(-1)^{m/2}$ とした。
　奇数の場合

$$a_5 = \frac{1}{20}(6-2n)\,a_3,\ \cdots,\ a_{m+2} = \frac{1}{(m+2)(m+1)}(2m-2n)\,a_m \quad (m = 3, 5, \cdots)$$

となるので、これも漸化式として解くと、

$$\begin{aligned}
a_{m+2} =& \frac{1}{(m+2)(m+1)}(2m-2n)\frac{1}{m(m-1)}\{2(m-2)-2n\}\,a_{m-2} \\
&\vdots \\
=& \frac{(2m-2n)(2m-2n-4)\cdots(6-2n)}{(m+2)(m+1)\cdots 5\cdot 4}a_3
\end{aligned}$$

ここで、$a_3 = \dfrac{1}{3}(1-n)\,a_1$ を用いると、

$$=\frac{(2m-2n)(2m-2n-4)\cdots(6-2n)(1-n)}{(m+2)(m+1)\cdots 5\cdot 4\cdot 3}a_1$$

となる。ここで、式を見やすくするために、分母子に 2 をかけると、

$$=\frac{(2m-2n)(2m-2n-4)\cdots(6-2n)(2-2n)}{(m+2)!}a_1$$

となり、a_m については

$$a_m = (-1)^{(m-1)/2}\frac{(2n+4-2m)\cdots(2n-6)(2n-2)}{m!}a_1, \quad (m=3,5,\cdots) \tag{ap11.39.2}$$

よって、求める解は

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = \text{奇数級数和} + \text{偶数級数和}$$

という形で求めればよい。そこで、上で求めたそれぞれの係数について、偶数については $m=2k$、奇数については $m=2k+1$ でどちらも $k=1$ から定義すると、

$$\begin{aligned} y(x) =& a_0\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(2n-4k+4)\cdots(2n-4)(2n)}{(2k)!}\,x^{2k}\right\} \\ &+ a_1\left\{x+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(2n-4k+2)\cdots(2n-6)(2n-2)}{(2k+1)!}\,x^{2k+1}\right\} \end{aligned}$$

となる。ここで、上の級数を次のような関数で定義する。

$$u(x) \equiv 1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(2n-4k+4)\cdots(2n-4)(2n)}{(2k)!}\,x^{2k}, \tag{ap11.39.3}$$

$$v(x) \equiv x+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(2n-4k+2)\cdots(2n-6)(2n-2)}{(2k+1)!}\,x^{2k+1}. \tag{ap11.39.4}$$

このとき、これらの関数の関係は $x=0$ におけるロンスキアンが

$$W(u,v) = \begin{vmatrix} u(0) & v(0) \\ u'(0) & v'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

となることから、一次独立な関係となる。よって、エルミートの微分方程式の一般解として充分である。n が非整数の場合はこれらの無限級数関数の線形結合が一般解となる。

次に、n が正の整数に限定して解を考察する。$u(x), v(x)$ の級数をもう一度検討すると、

$$u(x) = 1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(2n-4k+4)\cdots(2n-4)(2n)}{(2k)!}\,x^{2k}$$

である。これは、n のとる値で多項式の最高次数が決まる形になっている。例として $n=2$ とすると、このときの $u(x)$ は

$$u(x) = 1 - \frac{2n}{2!}x^2$$

となる。これは最高次数が 2 次の多項式となる。このことからも、n の値は、この関数の最高次数に一致していることがわかる。

一般化して、$n = 2m$ という偶数値を取るなら、

$$u(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(4m-4k+4)\cdots(4m-4)(4m)}{(2k)!}\, x^{2k}$$

となり、

$$(4m-4(k-1))\cdots(4m-4)(4m)$$

の積のいずれかでゼロとなるのは明らかである。それが $2m = 2(k-1)$ であったなら、x^{2k} 以上の級数項がゼロになるので、結果として $x^{2(k-1)} = x^{2m} = x^n$ が最高次数となるからである。したがって、n が偶数値をとるなら、多項式 $u(x)$ は n を最高次数とする多項式関数になる。このとき、$v(x)$ の振る舞いについても考えておく。$v(x)$ は

$$v(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2n-4k+2)\cdots(2n-6)(2n-2)}{(2k+1)!}\, x^{2k+1}$$

という級数関数で与えられており、先ほどと同様に $n = 2m$ とすると、

$$v(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(4m-4k+2)\cdots(4m-6)(4m-2)}{(2k+1)!}\, x^{2k+1}$$

という形になり、分子部分でゼロになる要素は存在しない。つまり、関数 $v(x)$ は n が偶数値のときには無限級数関数になる。

上と全く同じ考え方で、n が奇数のときを考えると、$u(x)$ の級数部分の分子ではゼロになる要素がないので、無限級数となり、逆に $v(x)$ では $n = 2m+1$ として

$$v(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(4m-4k+4)\cdots(4m-4)(4m)}{(2k+1)!}\, x^{2k+1}$$

となり、分子の

$$(4m-4(k-1))\cdots(4m-4)(4m)$$

という部分のいずれかでゼロとなる。具体的に $4m-4(k-1)$ でゼロになったとすると、

$$2m+1 = 2(k-1)+1 \quad \Rightarrow \quad 2m+1 = 2k-1 = n$$

なので、x^{2k+1} 以上の項の係数がゼロで消え、その前の $x^{2(k-1)+1} = x^{2m+1} = x^n$ の項を最高次数とする多項式に帰着できる。これらの関数の性質をまとめると、次のようになる。

エルミートの微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2ny = 0 \qquad (n > 0)$$

の一般解は n が**正の非整数**であるとき、

$$y(x) = au(x) + bv(x), \quad (a, b = \text{任意定数}).$$

ここで、$u(x), v(x)$ はそれぞれ、

$$u(x) \equiv 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2n-4k+4)\cdots(2n-4)(2n)}{(2k)!} x^{2k}$$

$$v(x) \equiv x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2n-4k+2)\cdots(2n-6)(2n-2)}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

で定義される無限級数関数である。

n が正の整数のとき、

$$y(x) = aH_n(x) + bQ_n(x), \quad (a, b = \text{任意定数})$$

となる。ただし、H, Q は

$$H_n(x) \equiv \begin{cases} \dfrac{u(x)}{u(1)} & (l\text{ が偶数}) \\ \dfrac{v(x)}{v(1)} & (l\text{ が奇数}) \end{cases}, \quad Q_n(x) \equiv \begin{cases} u(1)v(x) & (l\text{ が偶数}) \\ -v(1)u(x) & (l\text{ が奇数}) \end{cases}$$

という定義式で表される。このとき、$H_n(x)$ は最高次数 n 次の多項式関数となる。

そこで、これらの関数を以下のように定義する。

$$H_n(x) \equiv \begin{cases} \dfrac{u(x)}{u(1)} & (n\text{ が偶数}) \\ \dfrac{v(x)}{v(1)} & (n\text{ が奇数}) \end{cases} \tag{ap11.39.5}$$

この関数 $H_n(x)$ を**エルミートの多項式**という。ここで、右辺をそれぞれ $u(1), v(1)$ で割っているのは、$H_n(1) = 1$ と規格化するためである。こうすると、$H_n(x)$ は最高次数 n 次の多項式関数となる。n が偶数のとき、$u(x)$ は多項式であるが、$v(x)$ は無限級数である。このことを表すために、もう 1 つの関数として、以下のような形を定義する。

$$Q_n(x) \equiv \begin{cases} u(1)v(x) & (l\text{ が偶数}) \\ -v(1)u(x) & (l\text{ が奇数}) \end{cases} \tag{ap11.39.6}$$

こうすると、$Q_n(x)$ は無限級数関数になる。係数が n のエルミート方程式の一般解は先に求めており、それによると、

$$y(x) = a_0u(x) + a_1v(x)$$

は上の H, Q を用いて、

$$y(x) = \begin{cases} a_0 u(1) H_n(x) + \dfrac{a_1}{u(1)} Q_n(x) & (l \text{ が偶数}) \\ -\dfrac{a_0}{v(1)} Q_n(x) + a_1 v(1) H_n(x) & (l \text{ が奇数}) \end{cases}$$

と、どちらも定数と H, Q の線形和で表現できる。以上より、n が整数のときのエルミート方程式の一般解は

$$y(x) = aH_n(x) + bQ_n(x) \qquad (a, b = \text{任意定数})$$

となる。ここまででエルミートの微分方程式の解の振る舞いが得られた。

次にエルミート多項式の振る舞いを考える。この微分方程式は n が整数の場合、有限べき級数関数（多項式）と無限級数関数の線型結合を一般解にもつ。このとき、有限多項式をエルミート多項式という。ここではまず、エルミート多項式の具体的な形を求める。級数解法によって得られた関数形はエルミートの微分方程式の節に示してある。ここで、級数解法で求めたエルミートの微分方程式の解における係数の漸化式は、a_0 については (ap11.39.1) 式、a_1 については (ap11.39.2) 式で示される。まず、(ap11.39.1) 式について、a_{m+2} から表記すると、

$$a_{m+2} = (-1)^{m/2+1} \frac{(2n-2m)\cdots(2n-4)(2n)}{(m+2)\,!}\, a_0$$

である。これは係数の形から $2(n-m) = 0$ となるときに $a_{m+2} = 0$ となるので、a_m までの有限多項式となる。これを a_m について表記すると、

$$\begin{aligned} a_m &= (-1)^{m/2} \frac{(2n-2(m-2))\cdots(2n-4)(2n)}{m\,!}\, a_0 \\ &= (-1)^{m/2} \frac{2^{m/2}(n-(m-2))\cdots(n-2)(n)}{m\,!}\, a_0 \\ &= (-1)^{m/2} \frac{2^{m/2} n\,!!}{m\,!\,(n-m)\,!!}\, a_0 \end{aligned}$$

となる。ここで、$n - m = 2r$ という形を考えると、上式は

$$a_{n-2r} = (-1)^{n/2-r} \frac{2^{n/2-r} n\,!!}{(n-2r)\,!\,(2r)\,!!}\, a_0$$

$(2r)\,!! = 2^r r\,!$ と、$n\,!! = \dfrac{n\,!}{(n-1)\,!!}$ という関係を用いると、

$$\begin{aligned} &= (-1)^{n/2-r} \frac{2^{n/2-2r} n\,!}{(n-2r)\,!\,r\,!\,(n-1)\,!!}\, a_0 \\ &= \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n/2}(n-1)\,!!} (-1)^{-r} \frac{2^{n-2r} n\,!}{(n-2r)\,!\,r\,!}\, a_0 \end{aligned}$$

となる。これを用いると、級数関数は

$$u(x) = a_0 \left[1 + \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n/2}(n-1)\,!!} \sum_{r=0}^{n/2-1} (-1)^r \frac{2^{n-2r} n\,!}{(n-2r)\,!\,r\,!}\, x^{n-2r} \right]$$

となる [*4]。$(-1)^{-r} = (-1)^r$ であることに注意。ここで注目すべきは、級数演算に入っていない $r = \dfrac{n}{2}$ つまり、x^0 の係数である。上の a_{n-2r} に当てはめると、

$$a_{n-2r=0} = \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n/2}(n-1)\,!!}(-1)^{n/2}\frac{2^0 n\,!}{(0)\,!\,(n/2)\,!}\;a_0$$

このとき、$\left(\dfrac{n}{2}\right)! = 2^{-n/2}\,n\,!!$ であることを用いると、

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2^{n/2}(n-1)\,!!}\frac{n\,!}{2^{-n/2}\,n\,!!}\;a_0\\ &= a_0\end{aligned}$$

となり、$r = \dfrac{n}{2}$ についても級数和に組み込むことができるような形に変形できたことになる。最終式への変形は $n\,! = n\,!!\,(n-1)\,!!$ を用いた。よって、

$$u(x) = a_0\frac{(-1)^{n/2}}{2^{n/2}(n-1)\,!!}\sum_{r=0}^{n/2}(-1)^r\frac{2^{n-2r}n\,!}{(n-2r)\,!\,r\,!}\;x^{n-2r}$$

が得られる。ここで、n は偶数であるので、総和の上限値 $\dfrac{n}{2}$ はガウスの記号を用いて、$\left[\dfrac{n}{2}\right]$ と表現することが可能である。つまり、

$$\frac{n}{2} = \left[\frac{n}{2}\right]$$

という関係を持つことになる。以下では、計算の便宜上まだ導入はしないが、この関係が成り立つことは認める。この式に関して、総和の外に出ている係数は n のみに依存する係数であるため、K_n と表記する。すると、上式は

$$u(x) = a_0K_n\sum_{r=0}^{n/2}(-1)^r\frac{2^{n-2r}n\,!}{(n-2r)\,!\,r\,!}\;x^{n-2r} \qquad \text{(ap11.39.7)}$$

となる。関数の規格化を行う際, 分野によって流儀が異なるので、ここでは上記のままで止めておく。岩波数学公式集などでは多項式の最高次数で規格化しているので、それに従えば

$$K_n = 2^{-n}$$

などになる。蓬田 (2007) などでは直交化で得られる定積分の値から $1/\sqrt{2^n n\,!}$ を与えている。

ここまでは、a_0 の漸化式にしたがう係数で構成される級数関数、つまり、a_{2n} についてのエルミート多項式の定義であった。同様のことを a_1 の漸化式にしたがう係数についても考えると、(ap11.39.2) から、a_{m+2} について、

$$a_{m+2} = (-1)^{(m+1)/2}\frac{(2n-2m)\cdots(2n-6)(2n-2)}{(m+2)!}\;a_1, \quad (m = 3, 5, \cdots)$$

[*4] r を用いる前の m での級数関数では、総和演算子の開始冪が $m = 2$ となっていたことに注意。

である。これは係数の形から $2(n-m)=0$ となるときに $a_{m+2}=0$ となるので、a_m までの有限多項式となる。これを a_m について表記すると、

$$\begin{aligned}
a_m &= (-1)^{(m-1)/2}\frac{(2n-2(m-2))\cdots(2n-6)(2n-2)}{m\,!}\,a_1 \\
&= (-1)^{(m-1)/2}\frac{2^{(m-1)/2}(n-m+2)\cdots(n-3)(n-1)}{m\,!}\,a_1 \\
&= (-1)^{(m-1)/2}\frac{2^{(m-1)/2}(n-1)\,!!}{m\,!\,(n-m)\,!!}\,a_1
\end{aligned}$$

となる。ここで、$n-m=2r$ という形を考えると [*5]、上式は

$$a_{n-2r} = (-1)^{(n-1)/2-r}\frac{2^{(n-1)/2-r}(n-1)\,!!}{(n-2r)\,!\,(2r)\,!!}\,a_1 \tag{ap11.39.8}$$

あとは、先と同様に階乗の計算などをコテコテやっていくだけなので、

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{(n-1)/2}2^{(n-1)/2}(-1)^{-r}\frac{2^{-r}(n-1)\,!!}{(n-2r)\,!\,2^r r\,!}\,a_1 \\
&= (-1)^{(n-1)/2}\frac{2^{(n-1)/2}}{n\,!!}(-1)^r\frac{2^{-2r}n\,!}{(n-2r)\,!\,r\,!}\,a_1 \\
&= (-1)^{(n-1)/2}\frac{2^{-(n+1)/2}}{n\,!!}(-1)^r\frac{2^{n-2r}n\,!}{(n-2r)\,!\,r\,!}\,a_1
\end{aligned}$$

となる。これを用いると、級数関数は

$$v(x) = a_1\left[x + (-1)^{(n-1)/2}\frac{2^{-(n+1)/2}}{n\,!!}\sum_{r=0}^{(n-3)/2}(-1)^r\frac{2^{n-2r}n\,!}{(n-2r)\,!\,r\,!}x^{n-2r}\right]$$

となる [*6]。ここで注目すべきは、級数演算に入っていない $r=\dfrac{(n-1)}{2}$ つまり、x^1 の係数である。計算の都合上、上の a_{n-2r} と同値である (ap11.39.8) に当てはめると、

$$a_{n-2r=1} = (-1)^0\frac{2^0(n-1)\,!!}{1\,!\,(n-1)\,!!}\,a_1 = a_1$$

となり、$r=\dfrac{(n-1)}{2}$ についても級数和に組み込むことができるような形に変形できたことになる。よって、

$$v(x) = a_1(-1)^{(n-1)/2}\frac{2^{-(n+1)/2}}{n\,!!}\sum_{r=0}^{(n-1)/2}(-1)^r\frac{2^{n-2r}n\,!}{(n-2r)\,!\,r\,!}x^{n-2r}$$

[*5] a_0 と a_1 で同じ形においてよいのかと思うが、これは心配ない。なぜなら、どちらも $n-m=0$ となり、m は 2 ずつふえていくので、$n-m$ は絶対に偶数となる。したがって、r は必ず整数となる。

[*6] r を用いる前の m での級数関数では、総和演算子の開始冪が $m=3$ となっていたことに注意。

が得られる。n のみで構成される係数をまとめると、

$$v(x) = a_1 K_n' \sum_{r=0}^{(l-1)/2} (-1)^r \frac{2^{n-2r} n\,!}{(n-2r)\,!\,r\,!} x^{n-2r}$$

となる。ここで、n は奇数であるので、総和の上限値 $\dfrac{n-1}{2}$ はガウスの記号を用いて、$\left[\dfrac{n}{2}\right]$ と表すことが可能である。よって、上式は

$$v(x) = a_1 K_n' \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^r \frac{2^{n-2r} n\,!}{(n-2r)\,!\,r\,!} x^{n-2r}$$

であることがわかる。このとき、エルミート多項式を

$$v(x) \equiv a_1 H_n(x)$$

と定義する。この形に注目すると、総和演算子の中は $u(x)$ の形と一致していることがわかる。以上より、n が奇数のときのエルミート多項式は

$$v(x) = H_n(x) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^r \frac{2^{n-2r} n\,!}{(n-2r)\,!\,r\,!} x^{n-2r}$$

である。この形からわかるように、エルミート多項式は n の偶奇に関わらず同じ関数形となる。以上より、n 次のエルミート多項式は

$$H_n(x) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^r \frac{2^{n-2r} n\,!}{(n-2r)\,!\,r\,!} x^{n-2r}$$

となる。

以上でエルミート多項式を導出したが、注意しなければならないことは、エルミートの微分方程式の一般解は、n が整数のときに多項式となり、非整数であれば無限級数関数 $u(x)$ と $v(x)$ の線型結合が一般解となり、多項式表現はできないということである。また、n が偶数のときと奇数のときで $u(x)$ と $v(x)$ のどちらかのみがエルミート多項式になるので、n が整数であっても、その一般解は 1 つのエルミート多項式と 1 つの無限級数関数の線型結合となることに注意が必要である。

最後に、図 11.2 が低次のエルミート多項式 $H_n(x)$ を定義域 $-1 \geq x \geq 1$ の範囲で描いたものである。この図から、エルミート多項式の次数がゼロ線を横切る数 (節数) に対応しているということが明らかである。なお、低次のエルミート多項式は元の多項式

$$\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^r \frac{2^{n-2r} n\,!}{(n-2r)\,!\,r\,!} x^{n-2r}$$

から、

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

というような多項式で表記できる。

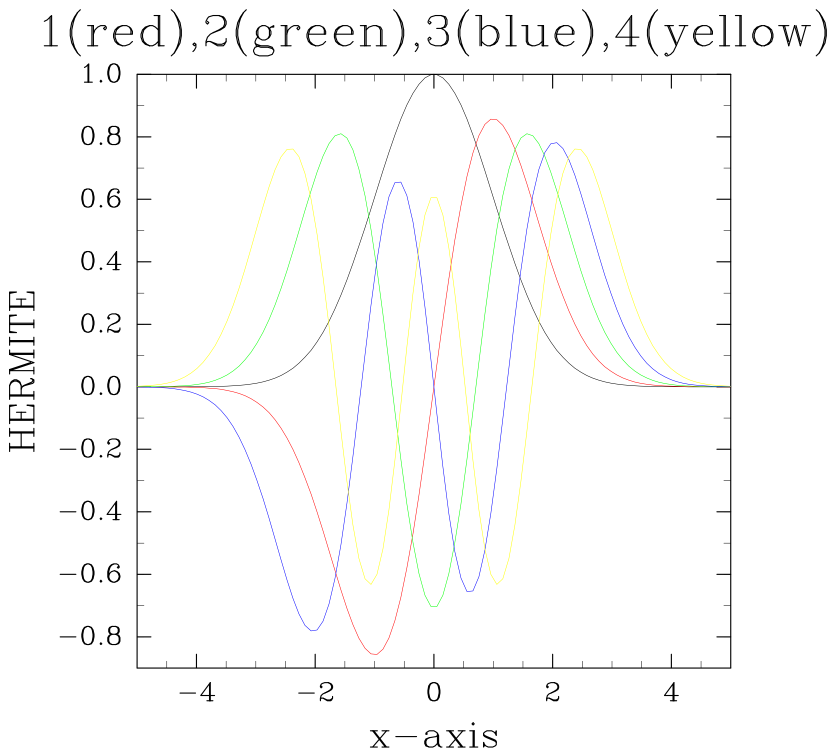

図 11.2: エルミート多項式 (黒線が 0 次, 赤線が 1 次, 緑線が 2 次, 青線が 3 次, 黄線が 4 次).