

## 第5章 大気境界層

**大気境界層** 流れが地表面との相互作用に直接影響される層. とくに本章では乱流運動によって形成される層をいう. 乱流運動によって生成される境界層の深さは, 安定成層の場合, 30 m, 不安定成層の場合, 3 km 以上. 平均的な中緯度では, 境界層は最低でも数キロメートル (大気の質量のおよそ 10%) に広がる.

**粘性底層** 大気境界層の中でも特に鉛直シアーが非常に強い地表面から数ミリメートル以内. ここでは分子粘性による摩擦が大きい.

**接地層** ⇒ (5.3.5).

**エクマン層** ⇒ (5.3.4).

**混合層** ⇒ (5.3.1).

**自由大気** 大気境界層より上空.

粘性底層以外の層では微小スケールの乱流渦が重要となる. この乱流運動は気象観測網のスケールよりはるかに小さい空間的, 時間的変化をする. 風のシアーによって引き起こされる渦と, 地表面での加熱によって引き起こされる対流性の渦は, 上空の運動量を地表面に輸送し, 地表面から上空に (潜・顕) 熱を輸送する. これらは分子粘性による輸送速度より速く, 非常に効果的である.

境界層流の力学的な構造は乱流によってほとんど決まる. よって, 境界層では運動方程式に乱流の効果を導入しなければならない.

### 5.1 大気の擾乱

大気は不規則な乱流運動を含んでいる. 乱流渦は大気を拡散させ, 境界層を越えて運動量や温位のような物理量を混合する (図 5.5). 境界層での乱流渦は水平と鉛直のスケールが同じ大きさになる (渦の最大長さスケールは, 境界層の深さとほぼ同じとなるおよそ  $10^3$  m, 最小の長さスケールは分子粘性による拡散のスケールとほぼ同じとなる  $10^{-3}$  m となる).

乱流は常に解像できないスケール（サブグリッドスケール）を持っている。自由大気において、サブグリッドスケールの効果は（9章で議論するメソスケールの循環を除き）重要ではない。しかし、境界層では、サブグリッドスケールの乱流渦は非常に重要となる。

- 地表面からの熱や水蒸気の輸送を通して、渦は地表面でのエネルギーバランスを支える。
- 地表面への運動量の輸送を通して、渦は運動量バランスを支える。

後者の過程は境界層において、大規模運動の運動量バランスを劇的に変化させるので、地衡風バランスはもはや成り立たない。

### 5.1.1 ブシネスク近似

境界層内での密度変化はおよそ 10 %。これは境界層の力学が非圧縮流体でモデル化できるということを示唆している。しかし、境界層内での対流を表現するには浮力の存在が不可欠である。そこでブシネスク近似を適用する。これは、大気は非圧縮（密度が時間空間変化しない）が、浮力は存在するという近似である。

### 5.1.2 レイノルズ平均

我々が興味のあるスケールは大規模な流れである。境界層内での大規模な流れをモデル化することを考える。しかし、大気は時間・空間的に非常に乱れている（図 5.4,(a),(b)）。測定値が大規模な流れを真に代表するためには、

- 微小なスケールの渦に対して十分長い時間間隔。
- 大規模な流れ場のトレンドは残すだけの短い時間間隔。

で平均しなければならない。レイノルズによって導入されたスキーム<sup>\*1</sup>では、

<sup>\*1</sup>この平均方法をレイノルズ平均と呼ぶ。レイノルズ平均としてもっとも一般的な平均がアンサンブル平均であるが、エルゴード仮説が成り立つと仮定すると、アンサンブル平均は時間平均（空間平均）と等価である。ゆえに、ここではレイノルズ平均を時間平均とみなす。

- 場の変数は、ゆっくり変化する平均場 (上線) と急速に変化する乱流成分 (プライム) とに分離することができるかと仮定する：

$$\theta = \bar{\theta} + \theta', \quad \bar{\theta}' = 0$$

- 変動成分同士の積の平均 (共分散) は一般にゼロにはならない：

$$\overline{w\theta} = \overline{(\bar{w} + w')(\bar{\theta} + \theta')} = \bar{w}\bar{\theta} + \overline{w'\theta'}, \quad \overline{w'\theta'} \neq 0.$$

図 5.4 (b) は各瞬間における流速のスナップショット, (c) はそれを時間平均した分布を表している. この図からもレイノルズ平均が大規模場を表すのに理に適った平均方法であることがわかる. 図 5.2 はある 1 点における水平流速分布の時間変化である. レイノルズ平均における平均量 (上線) と変動量 (プライム) の関係はこの図から明らかであろう.

このスキームを用いると, 大規模な流れ (平均場) の方程式系は

$$\frac{D\bar{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f\bar{v} - \left[ \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right] + \bar{F}_{rx} \quad (5.9)$$

$$\frac{D\bar{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - f\bar{u} - \left[ \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \right] + \bar{F}_{ry} \quad (5.10)$$

$$\frac{D\bar{w}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + g\frac{\bar{\theta}}{\theta_0} - \left[ \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'w'}}{\partial z} \right] + \bar{F}_{rz} \quad (5.11)$$

$$\frac{D\bar{\theta}}{Dt} = -\bar{w} \frac{d\theta_0}{dz} - \left[ \frac{\partial \overline{u'\theta'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'\theta'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'\theta'}}{\partial z} \right] \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (5.13)$$

となる. 四角括弧の共分散項は乱流フラックスである. 境界層においてこの項の大きさは, ほかの項と同じ大きさである. 一方, 自由大気ではこの項は小さいので無視できる.

(5.9) から (5.13) は, 閉じた方程式系ではない (5つの平均場の未知変数  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$ ,  $\bar{\theta}$ ,  $\bar{p}$  に加えて, 未知の乱流フラックスが存在するため). よって, これらの方程式を解くには, クロージャー仮定を用いなければならない (乱流フラックスを平均場の変数で表現する)<sup>\*2</sup>.

<sup>\*2</sup>もっとも簡単には, 未知の乱流フラックスについて記述した方程式を増やせばよいが, 方程式を増やせば増やすほど未知変数の数も増えるので, この方法では方程式を閉じさせることができない (クロージャー問題). そこで, 未知変数を既知変数で表現することで方程式を閉じさせるようにした. この方法がクロージャー仮定である. スキームによって, 閉じさせる方法は様々で Mellor and Yamada (1974) では多くの乱流スキームを未知変数の数でレベル分けしている.

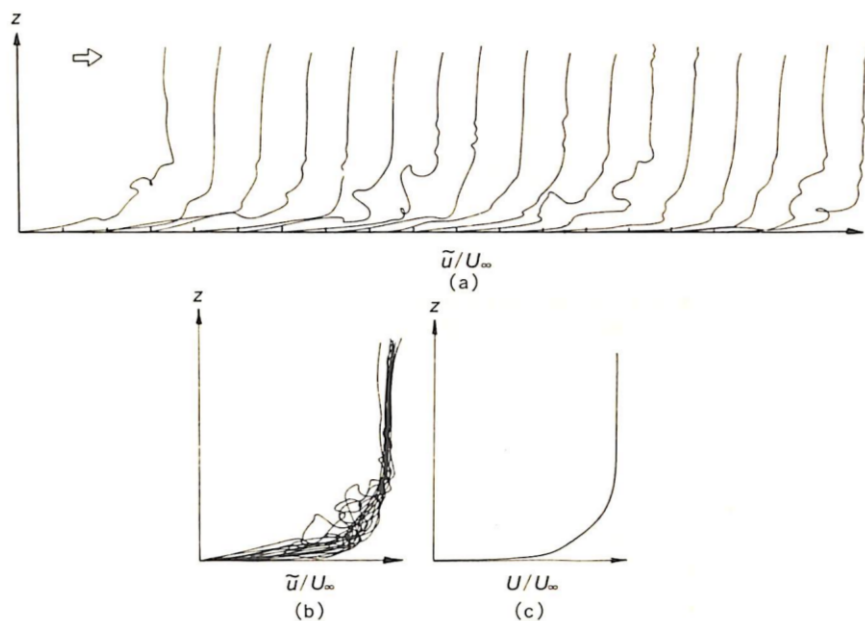


図 5.1: 乱流境界層における流速分布（竹内・近藤, 1981 の図 A.2, オリジナルは Cebeci and Smith, 1974）. (a) 各瞬間における水平流速分布の時間変化（横軸は時間変化）. (b) (a) の各時刻を重ね合わせたもの. (c) (a) を時間平均したもの.  $U_\infty$  は  $z$  が充分高い場所の流速.

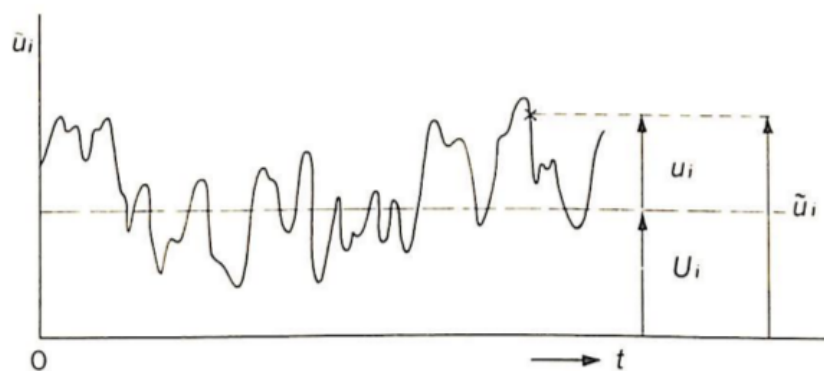


図 5.2: 乱流場における風速の時間変化（竹内・近藤, 1981 の図 A.3）. 瞬間値  $\tilde{u}_i$  は平均値  $U_i$  と変動成分  $u_i$  の線形結合で表現される.

## 5.2 擾乱の力学

乱流渦は常に乱流のエネルギーを小さなスケールに流す傾向にある (downward cascade). 最終的には粘性散逸によってエネルギーは消失する. 乱流の運動エネルギーが統計的平衡状態 (エネルギー生成とエネルギー散逸がバランスした状態) なら, 乱流は連続的に生成されているはずである. 境界層における乱流の主な生成源は地表面付近の風と温度の分布構造に著しく依存する. 不安定であるなら, 対流が発生する. 安定であるなら, シアー乱流が生成する. これらの過程の役割は乱流の運動エネルギーから理解される.

乱流の生成を調べるために, 乱流のエネルギー方程式を求めると,

$$\frac{\overline{D}(TKE)}{Dt} = MP + BPL + TR - \varepsilon. \quad (5.14)$$

ここで,  $TKE \equiv (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})/2$  は単位質量あたりの乱流の運動エネルギー,  $MP$  は力学的な生成,  $BPL$  は浮力の生成と消失,  $TR$  は輸送と圧力による再分配,  $\varepsilon$  は摩擦による散逸をそれぞれ表す.  $\varepsilon$  は常に正.

$$BPL \equiv \overline{w'\theta'} (g/\theta_0)$$

平均流のポテンシャルエネルギーと乱流の運動エネルギーの間のエネルギーの変換を表している (対流).

$$MP \equiv -\overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{v'w'} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \quad (5.15)$$

平均場と乱流場間のエネルギーの変換を表している (シアー乱流).

**不安定な境界層** このときは熱力学的不安定 (対流) が支配的 (図 5.3). 対流性の渦は鉛直速度と温位の変動の間に正の相関をもち, 乱流運動エネルギーと正の熱フラックスの源となる.

**安定な境界層** このときは力学的不安定 (シアー乱流) が「とある条件下」で支配的. シアー乱流は運動量フラックスが平均場の運動量の勾配の反対を向いているとき正となる. ゆえに, 地表面付近の平均風の鉛直シアーが西から東を向いていると ( $\partial \bar{u} / \partial z > 0$ ),  $\overline{u'w'} < 0$  ならば正となる (図??).

静的安定な層において, シアー乱流が存在するには,  $MP$  の大きさが  $BPL$  や  $\varepsilon$  の大きさより「充分」大きくなければならない. この条件はフラックスリチャードソン数で定義される:

$$Rf \equiv -BPL/MP$$

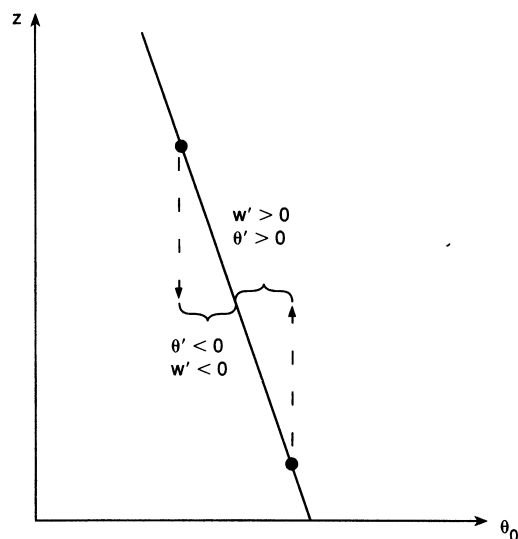


図 5.3: 平均場の温位  $\theta_0(z)$  が高度とともに減少するとき, 上向きあるいは下向きのパーセルの変動に対する鉛直速度と温位擾乱の間の相関.

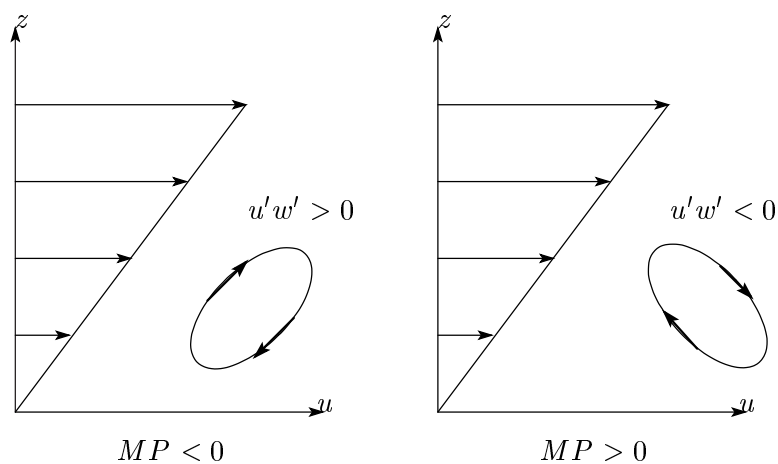


図 5.4: 乱流フラックスと平均場のシアーの関係. 上層ほど風速が強い場合, (左) 下層の大きな運動量を上に運ぶと, 乱流は抑えられる. (右) 上層の大きな運動量を下層に運ぶと乱流が活性化される.

不安定な境界層  $Rf < 0$  であり, 乱流は対流で維持.

安定な境界層  $0 < Rf < 0.25$  となる時のみ, シアー乱流が維持 (観測から<sup>\*3</sup>). これはシアー乱流が対流抑制の 4 倍を超えるときに相当.

$MP$  はシアーに依存するので,  $Rf$  は地表面に十分近いところで大きな値となる. しかし, 静的安定性が増加するにつれて, 正味乱流生成量が正となる層の深さは縮む. 夜間の放射冷却による強い逆転層が存在するとき, 境界層の深さは数十メートル程度となり, 鉛直混合が強く抑えつけられる.

### 5.3 大気境界層運動方程式系

粘性底層より上で水平一様な乱流が存在する場合, 平均流の水平方向の運動方程式 (5.9), (5.10) は

$$\frac{D\bar{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f\bar{v} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \quad (5.16)$$

$$\frac{D\bar{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - f\bar{u} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \quad (5.17)$$

となる. 自由大気における中緯度の総観スケールの運動は近似的に地衡風バランスである. しかし境界層では, 乱流フラックスの項は無視できないので, 境界層では

$$f(\bar{v} - \bar{v}_g) - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} = 0 \quad (5.18)$$

$$-f(\bar{u} - \bar{u}_g) - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} = 0 \quad (5.19)$$

となる. (5.18), (5.19) はクロージャー仮定を用いると,  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  について解ける. 以下, 5.3.1-3 ではいくつかのクロージャー仮定を上式に適用する.

#### 5.3.1 Well Mixed Layer

対流性の境界層が安定層によってキャップされていると, Well Mixed Layer (WML) を形成する (図 5.5). この境界層は一般に, 表面の加熱が強い日中に陸面または, 海面付近の大気が表面の水温より冷たいときの海洋で発生する. 熱帯の海洋は典型的にこのタイプの境界層である.

WML において, 風速と温位は高度一定である (図 5.5). これにより, WML では乱流フラックスは高度で線形に変化するような「平板」として扱うことができる (図 5.6). 簡単

<sup>\*3</sup>この事実は Miles and Howard の定理として理論的にも証明されている.

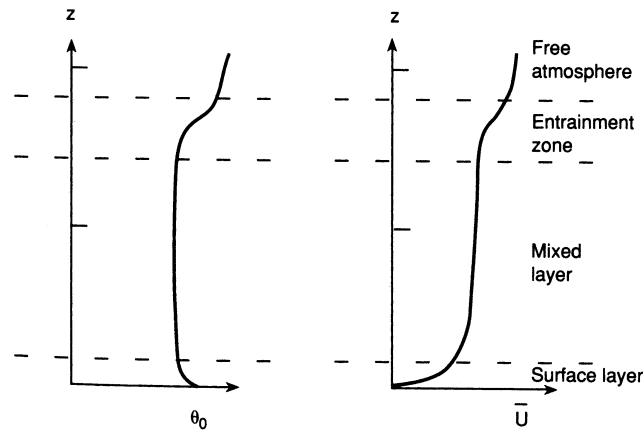


図 5.5: 平均場の温位  $\theta_0$  と平均東西風速  $U$  の十分に混合された境界層における分布. Stull(1988) から許可を頂いて記載.

化のために, 乱流は境界層上端でゼロであると仮定する. 観測から, 地表面の運動量フラックスはバルク形式

$$(\overline{u'w'})_s = -C_d |\overline{\mathbf{V}}| \bar{u}, \quad (\overline{v'w'})_s = -C_d |\overline{\mathbf{V}}| \bar{v}$$

で表現することができる. ここで,  $C_d$  は無次元の抵抗係数であり,  $|\overline{\mathbf{V}}| = (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^{1/2}$  であり, 添字  $s$  は地表面の値 (標準的には風速計の高度での値) を表す. 観測から,  $C_d$  は海洋で  $1.5 \times 10^{-3}$  オーダーであるが, 粗い地面ではそれより数倍大きくなるが示されている.

すると, (5.18), (5.19) は

$$f\mathbf{k} \times \overline{\mathbf{V}} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \bar{p} - \frac{C_d}{h} |\overline{\mathbf{V}}| \overline{\mathbf{V}} \quad (5.23)$$

となる. このバランスは図 5.7 で描かれる. これをまとめると, WML 内では

- 風速は乱流の効果によって, より圧力の小さい方向へ向かう力が存在する.
- 乱流は風速を減少させる傾向にあるので, 乱流フラックスはしばしば境界層摩擦と呼ばれる. ただし, これは分子粘性ではなく, 乱流によって引き起こされるものであることに注意.
- 等圧線を横切る流れは圧力傾度力, コリオリ力, 乱流抵抗の間のバランスによる結果である.
- さらに, 乱流抵抗が徐々に支配的になるにつれて, 等圧線を横切る角度が大きくなる.



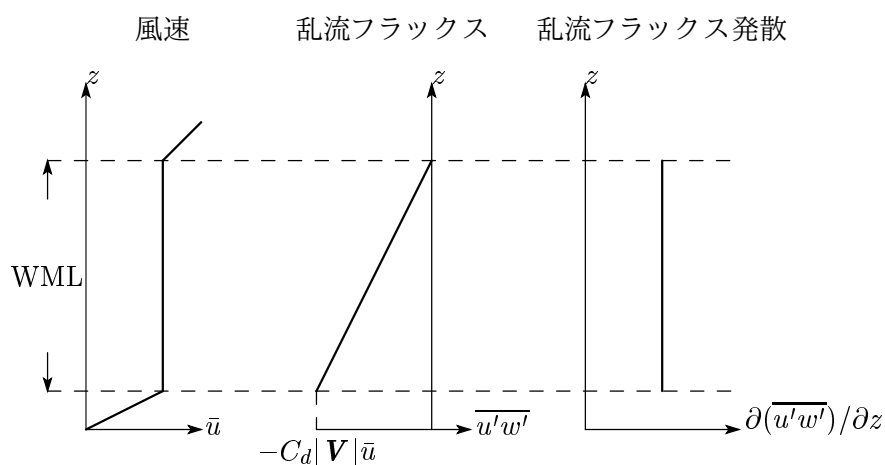


図 5.6: WML における各物理量の鉛直プロファイル. 左から, 大規模場の風速, 乱流フラックス, 乱流フラックスの発散. 乱流フラックスは WML の下端でバルク形式によって求められ, 上端ではゼロとなる. フラックスの発散で見ると, あたかも WML 全体に渡って一定の値をとる「平板」と見ることが出来る.

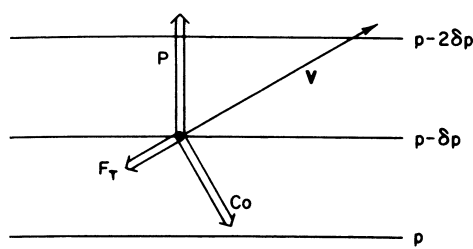


図 5.7: 十分に混合された境界層における力のバランス.  $P$  は圧力傾度,  $Co$  はコリオリ力,  $F_T$  は乱流抵抗を表す.

### 5.3.2 フラックス勾配理論

中立や静的安定な境界層では、風の速さと向きは高度とともに大きく変化する。この場合、簡単な平板モデルは適切ではなく、平均場の変数を用いて乱流の運動量フラックスの鉛直依存性を考慮したクロージャーを作る必要がある。これに対する伝統的なアプローチは、乱流渦が分子拡散と同様の方法で作用すると仮定することである。これは与えられる場のフラックスが平均場の変数の局所的な傾度に比例することで表現される：

$$\overline{u'w'} = -K_m \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right), \quad \overline{v'w'} = -K_m \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right), \quad \overline{w'\theta'} = -K_h \left( \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right).$$

ここで、 $K_m(\text{m}^2\text{s}^{-1})$  を渦粘性係数、 $K_h$  を熱の渦拡散係数と呼ぶ。このクロージャースキームはしばしば、**K** 理論と呼ばれる。

ただし、**K** 理論は多くの制限がある。特に粘性係数の扱いについて、

分子粘性の場合 物性（物体の性質）に依存する。値は物理的な実験から測定される。

渦粘性の場合 流体の流れの性質に依存する。状況に応じて経験的に決定される。

もっとも単純なモデルは渦交換係数が流れについて一定であると仮定されている。この近似は境界層において、非常に不適な近似である。さらに、多くの場合、もっとも活発な渦は境界層の深さと同じくらいの大きさをもっており、運動量フラックスも熱フラックスも平均場の局所的な勾配には比例しない。

### 5.3.3 混合距離理論

渦拡散係数の適切な値を求めるもっとも簡単なアプローチは混合距離理論にもとづくものである。これは古典的な分子運動論による分子粘性の説明の類推からくるものである。

## 混合距離理論

- 鉛直方向に変位する流体パーセルは特徴的な距離  $\xi'$  を移動し、もといた高度の平均的な物理量をこの距離だけ運搬する。
- このパーセルは距離  $\xi'$  移動した先で別のパーセルと衝突し運動量を交換する。
- これは、パーセルの移動による運動量の輸送と移動先での運動量の交換によって周囲の運動量を混合するという仮定である。
- この変位は変位距離  $\xi'$  と平均場の物理量の勾配に比例する乱流を生み出す必要がある。

$$\theta' = -\xi' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}, \quad u' = -\xi' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \quad v' = -\xi' \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}$$

- これは、混合距離が同じ場合、平均場の変化が大きい方が混合量が大きいことに対応。

ここで、上向き（下向き）のパーセルの変位は  $\xi' > 0$  ( $\xi' < 0$ ) である。温位のような保存量に対して、渦のスケールが平均流のスケールと比べて小さく、平均場の勾配が高度で一定であるなら、適切な理論である。しかし、圧力傾度力が渦の変位する間に大きな変化を引き起こすような場合には正当性が弱くなる。

しかし、もし混合距離理論を用いるなら、各乱流フラックスは

$$-\overline{u'w'} = \overline{w'\xi'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \quad -\overline{v'w'} = \overline{w'\xi'} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}, \quad -\overline{\theta'w'} = \overline{w'\xi'} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}. \quad (5.24)$$

次に、平均場の変数を用いて  $w'$  を見積もる。浮力の効果が小さくなるように、大気はほぼ中立だと仮定する。すると、渦の水平スケールは鉛直スケールと同じくらいの大きさになると考えられるので、 $|w'| \sim |\mathbf{V}'|$  となり、

$$w' \approx \xi' \left| \frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial z} \right|$$

とできる。ここで、 $\mathbf{V}'$  および、 $\bar{\mathbf{V}}$  はそれぞれ水平速度場の擾乱と平均を表す。ゆえに、運動量フラックスは

$$-\overline{u'w'} = \overline{\xi'^2} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (5.25)$$

となる。

— 混合距離理論における渦粘性 —

$$K_m = \overline{\xi'^2} |\partial \bar{u} / \partial z| = \bar{l}^2 |\partial \bar{u} / \partial z|$$

このとき、混合距離は

$$l \equiv (\overline{\xi'^2})^{1/2}.$$

これは、平均的な渦の大きさの尺度となる。この結果から、渦の大きさが大きいほど、またシアーが強いほどより大きな乱流混合を引き起こすということが示唆される。

### 5.3.4 エクマン層

フラックスの勾配による近似を用いて (5.18), (5.19) における乱流フラックス項を表し、 $K_m$  の値を一定とすると、古典的なエクマン層方程式

$$K_m \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f(v - v_g) = 0 \quad (5.26)$$

$$K_m \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - f(u - u_g) = 0 \quad (5.27)$$

を得る。ここで、すべての場の変数がレイノルズ平均されているので、上線を除いた。

エクマン層方程式 (5.26), (5.27) を解くと、境界層の風の高度依存性を求められる。簡単化のために、これらの方程式は境界層の全層にわたって適用できると仮定する。また、地衡風は高度に依存しないとする。すると、

$$\begin{aligned} u &= 0, \quad v = 0 \text{ at } z = 0, \\ u &\rightarrow u_g, \quad v \rightarrow v_g \text{ at } z \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5.28)$$

(5.26), (5.27) を解くと北半球に対して

$$u = u_g (1 - e^{-\gamma z} \cos \gamma z), \quad v = u_g e^{-\gamma z} \sin \gamma z \quad (5.31)$$

となる。ここで、 $\gamma = (f/2K_m)^{1/2}$  である。

この解はエクマンスパイラルという有名なものである<sup>\*4</sup>。解 (5.31) の構造は図 5.8 の太い実線で描かれた曲線で示される。 $z = \pi/\gamma$  となるとき、風は地衡風の値 ( $u_g$ ) に平行になり、ほぼ等しい大きさとなる。この高度をエクマン層の上端として表し、 $De \equiv \pi/\gamma$  として層の深さを定義するのが便利である。

観測から、風は地表面の上空およそ 1 km で、地衡風の値に近づくことが示されている。 $De = 1 \text{ km}$ ,  $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  とすると、 $K_m \approx 5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  となる。(5.25) から、 $|\delta \mathbf{V} / \delta z| \sim$

<sup>\*4</sup>エクマン層内における各高度での力の釣り合いについては付録参照。

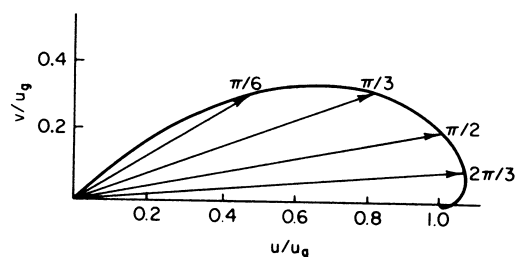


図 5.8: エクマンスパイラルの解における風成分のホドグラフ. 矢印はエクマン層におけるいくつかの層に対する速度ベクトルを表し, 螺旋の曲線は速度の変化を高度の関数として追跡したもの. 曲線上に書かれた点は  $\gamma z$  の値を示している. この値は高度の無次元の尺度である.

$5 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$  という特徴的な境界層の鉛直シアーに対して,  $K_m$  はおよそ 30 m である. この混合距離は境界層の深さに比べて小さい. もし混合距離の概念が使用できるとすると, このような状況が最も理に適っている.

エクマン層の定性的な特徴は WML の特徴と同じである. つまり, 圧力の低い方向に向かう境界層の風成分をもち, 圧力傾度力, コリオリ力, 乱流抵抗がバランスしている. ただし, このような理想的なエクマン層は, 実際滅多に観測されない. 理由の一つに, 乱流フラックスが平均場の運動量の勾配に単に比例しているわけではないということがある. しかし, フラックスの勾配によるモデルがたとえ正しかったとしても, 渦粘性係数一定の仮定は正しくない. 現実には  $K_m$  は地面付近の高度で急速に変化する. これは, エクマン層の解が地表面までは使えないことを示唆している.

### 5.3.5 接地層

エクマン層モデルの不十分な点のいくつかは, 接地層を大気境界層の他の部分と区別すると克服できる. 境界層全体の 10% にも満たない接地層は, 乱流渦による鉛直方向の運動量輸送によって完全に維持される. このとき, 接地層まわりの各物理量は以下のようになる.

各物理量のオーダー

物理量	表式	大きさ	単位
地表面の乱流フラックス	$u_*^2 = \overline{(u'w')}_s$	0.1	$\text{m}^2 \text{s}^{-2}$
摩擦速度	$u_*$	0.3	$\text{m s}^{-1}$
コリオリ・圧力傾度	$fV_g$	0.1	$\text{m s}^{-2}$
接地層での乱流フラックスの発散	$\delta(u_*^2)/\delta z$	$\leq 10^{-3}$	$\text{m s}^{-2}$
地表面と高度 10 m での乱流フラックス差	$\delta(u_*^2)$	$\leq 10^{-2}$	$\text{m}^2 \text{s}^{-2}$
高度 10 m での乱流フラックス	$\overline{(u'w')}_s$	0.09	$\text{m}^2 \text{s}^{-2}$

これらから、第一近似に対して、大気の下層数メートルにおける乱流フラックスはその地表面での値と同じであると仮定できる。よって、(5.25) を用いて

$$K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = u_*^2 \quad (5.32)$$

となる。エクマン層の解に  $K_m$  を適用したときには、境界層を通して、一定の値であると仮定した。しかし、地表面付近では、鉛直の渦スケールが地表面までの距離によって制限されているので、混合距離に対して  $l = kz$  とする。ここで、 $k$  はカルマン定数と呼ばれる普遍定数であり、それは実験的に  $k \approx 0.4$  という決まった値をもつ。この場合、 $K_m = (kz)^2 |\partial \bar{u} / \partial z|$  である。(5.32) にこの式を代入し、その平方根をとると、

$$\partial \bar{u} / \partial z = u_* / (kz) \quad (5.33)$$

となる。 $z$  について積分すると、対数表記された風の分布

$$\bar{u} = (u_* / k) \ln(z / z_0) \quad (5.34)$$

を得る。ここで、粗度高度  $z_0$  は  $z = z_0$  で  $\bar{u} = 0$  となるように選ばれる積分定数である。粗度高度  $z_0$  は地表面の物理的な特徴に大きく依存して変化する。草原に対する典型的な値は 1-4 cm の範囲である。(5.34) の導出には多くの仮定が用いられているが、多くの観測研究から対数分布が接地層で観測される風と一致していることが示されている。

### 5.3.6 修正エクマン層

エクマン層の解は接地層に適用できない。大気境界層に対するもっともらしい表記は、エクマン螺旋と対数分布を合わせることで得られる。このアプローチでは、渦粘性係数は定数として扱われるが、(??) は接地層より上の領域でのみ適用され、エクマン層の底面での速度とシアは、接地層の上端の速度とシアに一致する。その結果、修正されたエクマン螺旋は修正前のエクマン螺旋より観測にいくらか一致する。しかし、一般に大気境界層で観測される風はエクマン螺旋のパターンから大きく離れている。特に、エクマン層近似が最も適している、静的安定度が中立に近い定常な順圧の状況においてさえ、エクマンスパイラルは滅多に観測されない。

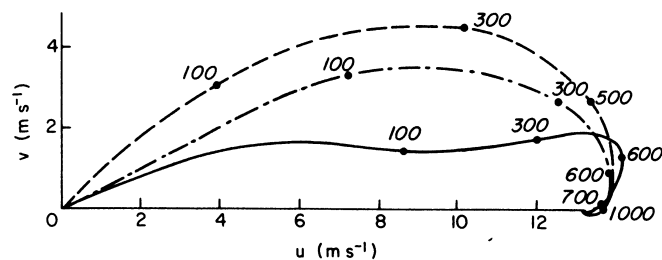


図 5.9: Jacksonville, Florida ( $\cong 30^\circ\text{N}$ ) で 1968 年, 4 月 4 日に観測された平均風のホドグラフ (実線) と  $De \cong 1200 \text{ m}$  で計算したエクマン螺旋 (破線) と修正エクマン螺旋 (一点鎖線) の比較. 高度はメートル. (Brown 1970 から許可を得て掲載. AMS の許可を得て再製作)

それは、エクマン層の風分布が一般に中立大気に対して不安定であることを示している。この不安定の結果発達する循環は境界層の深さと同じくらいの大きさの水平、鉛直スケールを有している。したがって、簡単なフラックス勾配の関係でそれらをパラメータ化することは不可能である。しかし、これらの循環は一般に鉛直にかなりの運動量を輸送する。その正味の結果は、通常境界層の風とエクマン螺旋の特徴からの地衡風との間の角度の減少となる。典型的に観測される風のホドグラフは図 5.9 で示した。詳細な構造はエクマン螺旋からはるかに離れているが、鉛直に積分した境界層内の水平質量輸送は未だに、圧力の小さい方を向いている。次節で示すように、この事実は総観規模やそれより大きい規模の運動に対して第一に重要となる。

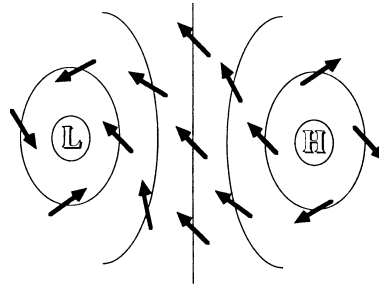


図 5.10: 北半球における高・低気圧の中心と関連する系統的な地表面風のパターン (矢印). 等圧線は細線で示されている. また, L, H はそれぞれ低気圧, 高気圧の中心を示している. Stull (1988).

## 5.4 2次循環とスピンドウ

エクマン層での水平風は圧力の小さい方向に向く. これは低気圧性循環での収束と高気圧性循環での発散 (図 5.10) に対応する. さらに連続の式から境界層と自由大気を行き来する鉛直運動が必要となる. この鉛直方向の運動の大きさを見積もるためには, 境界層内での水平収束・発散の大きさを見積もればよい. なぜなら, これらは連続の式でつながっているからである.

まず, 境界層の深さにわたって, 平均化された連続の式 (5.13) を積分すると,

$$w(De) = - \int_0^{De} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz \quad (5.36)$$

が得られる ( $w(0) = 0$ ).  $De = \pi/\gamma$  は 5.3.4 節でのエクマン層の深さである. 計算を簡単にするために,  $v_g = 0$  と仮定する<sup>\*5</sup>. エクマン層の場合, (5.31) から (5.36) は

$$w(De) = - \int_0^{De} \frac{\partial v}{\partial y} dz = - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \int_0^{De} v dz \right] \quad (5.36')$$

となる. なぜなら,  $u \propto u_g$  であるので,  $\partial u/\partial x = 0$  だからである. このとき, エクマン層の任意の高度で微小断面積  $\delta x \delta z$  あたりに等圧線を横切る質量輸送 (単位時間あたりにある断面積を通過する質量) は図 5.11 のように,

$$\rho_0 v \delta x \delta z$$

<sup>\*5</sup>これは,  $u_g$  が  $x$  に依存しないことと等価である. なぜなら,  $u_g$  が  $x$  に依存しない ( $u_g = u_g(y)$ ) ということは, 地衡風の関係 ( $u_g \propto \partial p/\partial y$ ) で結びついている圧力が  $x$  に依存しない ( $p = p(y)$ ) ということになるので, 圧力の  $x$  方向の勾配に比例する  $v_g$  はゼロ ( $v_g \propto \partial p/\partial x = 0$ ) となるということである. これは,  $x$  方向への気圧傾度がゼロであることを示す. つまり, 等圧線は  $x$  方向に平行に伸びている. このとき, 等圧線を横切る流れというのは, 簡単に  $v$  方向への質量の流入出で記述できる.



で与えられることに注意する. 単位幅 ( $\delta x = 1$ ) の流体柱に対するエクマン層全層正味の質量輸送  $M$  は  $\rho_0 v$  を鉛直に単純に積分した結果に等しい. つまり,

$$M = \int_0^{De} \rho_0 v dz = \int_0^{De} \rho_0 u_g \exp(-\pi z/De) \sin \pi z/De dz \quad (5.35)$$

で与えられる.

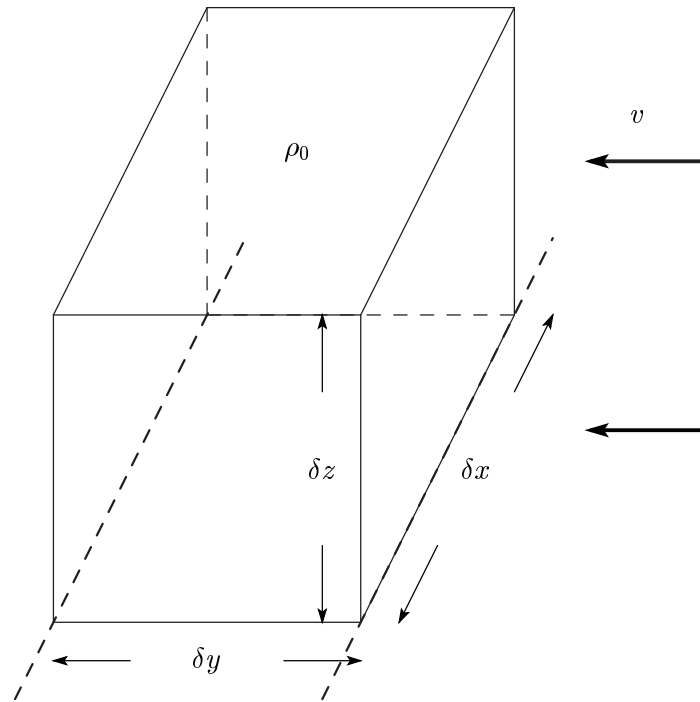


図 5.11: エクマン層内における等圧線を横切る質量輸送.

すると, (5.36') と (5.35) から, エクマン層上端での質量輸送が

$$\rho_0 w(De) = -\frac{\partial M}{\partial y} \quad (5.37)$$

で与えられるということがわかる. つまり, 境界層から自由大気へ出る質量は, 境界層全層の等圧線を横切る質量と等しくなる. (5.35) を積分すると<sup>\*6</sup>, (5.37) に代入することで,

$$w(De) = \zeta_g \left( \frac{1}{2\gamma} \right) = \zeta_g \left| \frac{K_m}{2f} \right|^{1/2} \left( \frac{f}{|f|} \right) \quad (5.38)$$

となる<sup>\*7</sup> ことがわかる<sup>\*8</sup>. ここで,  $1 + e^{-\pi} \approx 1$  と仮定した. すると, 境界層上端での鉛直

<sup>\*6</sup>積分の際に,

$$\int_0^{De} \exp(-\pi z/De) \sin \pi z/De dz = \frac{De}{2\pi} (1 + e^{-\pi})$$

であることを用いた.

<sup>\*7</sup> $-\partial u_g / \partial y = \zeta_g$  が地衡風渦度であることに注意する.

<sup>\*8</sup> (原文脚注) この公式が南北半球で適用できるようにコリオリパラメータの絶対値に対するコリオリパラメータの比が含まれていることに注意.

速度は地衡風渦度に比例するという重要な結果が得られる。これにより、乱流フラックスの効果は、乱流混合によって強制された2次循環によって自由大気と関係づけられる(境界層の吸い込み)。これは回転流体のみに発生する重要な性質の1つである。 $\zeta_g \sim 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ ,  $f \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ,  $De \sim 1 \text{ km}$  となる典型的な総観規模のシステムでは、(5.38) で与えられる鉛直速度は数ミリメートル毎秒のオーダーとなる。

同様の境界層吸い込みはティーカップがかき混ぜられるときに生成される循環の減衰と関係がある(図 5.12)。

**領域 1** カップの底と側面から離れたところ(自由大気)では、動径方向の圧力勾配が回転流体の遠心力と近似的に旋衡流バランスしている(地衡風バランス)。渦度は  $\zeta_g$ 。

**領域 2** 底面付近では、粘性によって運動はゆっくりとなり、遠心力は動径方向の圧力勾配とバランスしない。渦度は  $\zeta_E (< \zeta_g)$ 。

1. これにより、動径方向の内向き流れがカップの底付近で発生する。お茶がかき混ぜられれば、この内向きの流れによって、カップの底で茶葉は中心付近にかき集められるように見える。流れに沿った渦度は  $\zeta_E (< \zeta_g)$ 。
2. 連続の式から、底の境界層では上向きの運動が必要になる。境界層上端での上向き流れの渦度は  $\zeta_E (< \zeta_g)$ 。
3. これは内部領域に広がり、遅い動径方向外向きの流れとなる。この遅い外向きの流れは近似的に角運動量を保存する。角運動量が保存されているので、外に広がるに連れて渦度はさらに小さくなる。流れに沿った渦度は時間とともに (5.39) の減衰係数で減少していく。 $\zeta'_E (< \zeta_E < \zeta_g)$ 。
4. 内部領域での角運動量はおもともと大きいので、外向き流れによって底からやってきた小さな角運動量の流体が内部領域を置き換えることになる。これにより、内部領域での渦度は  $\zeta_g \rightarrow \zeta'_E$ 。内部領域の渦度は減少している。

このプロセスは単なる拡散よりもはるかに速い時間で渦度をスピンドウンさせる。重要な点は角運動量が保存されるのは自由大気のみであって、底では内向きにかき集められる際、角運動量は摩擦によって消費されることである。渦度の減衰する理由は同じであるが、内部領域の渦度を減衰させるには、底から乱流でじわじわ減らせるより、2次循環によってかき混ぜた方が効率的ということである。

2次循環が大気の渦をスピンドウンさせるのにかかる特徴的な時間は、順圧流体の場合には簡単に表現できる。総観規模の運動に対して、順圧渦度方程式 (4.24) は近似的に

$$\frac{D\zeta_g}{Dt} = -f \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = f \frac{\partial w}{\partial z} \quad (5.39)$$

と表現される。ここで、発散項について、 $f$  と比較して  $\zeta_g$  は無視し、 $f$  の緯度方向の変化も無視した。地衡風渦度が順圧大気に対して、高度に依存しないので、(5.39) はエクマン層の

上端 ( $z = De$ ) から対流圏界面 ( $z = H$ ) まで簡単に積分でき,

$$\frac{D\zeta_g}{Dt} = +f \left[ \frac{w(H) - w(De)}{(H - De)} \right] \quad (5.40)$$

を得る.  $w(De)$  について, (5.38) を代入し,  $w(H) = 0$  で,  $H \gg De$  と仮定すると, (5.40) は

$$\frac{D\zeta_g}{Dt} = - \left| \frac{fK_m}{2H^2} \right|^{1/2} \zeta_g \quad (5.41)$$

と表記できる. この方程式を時間について積分すると,

$$\zeta_g(t) = \zeta_g(0) \exp(-t/\tau_e) \quad (5.42)$$

となる. ここで,  $\zeta_g(0)$  は  $t = 0$  での地衡風渦度の値であり,  $\tau_e \equiv H|2/(fK_m)|^{1/2}$  は渦度の初期の値が  $e^{-1}$  まで減少するときの時間である.

この  $e$  倍の時間スケールは順圧スピンドウン時間と呼ばれる.  $H \equiv 10$  km,  $f = 10^{-4}$  s $^{-1}$ ,  $K_m = 10$  m $^2$  s $^{-1}$  とすると,  $\tau_e \approx 4$  日程度である. ゆえに, 中緯度の順圧流体の総観スケール擾乱について, 特徴的なスピンドウン時間は数日となる. この時間スケールを粘性拡散の時間スケールと比べてみる.

粘性拡散の時間スケールは拡散方程式

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} = K_m \frac{\partial^2 \zeta_g}{\partial z^2} \quad (5.43)$$

から見積もることができる. 線形純拡散方程式の解は時間変化と空間変化の積で表現でき, 時間変化に関しては

$$\zeta_g \propto \exp \left[ -\frac{K_m t}{H^2} \right]$$

という関係をもつ. もし,  $\tau_d$  を拡散の時間スケール,  $H$  を拡散の特徴的な鉛直スケールとすると, (5.42) と同様の方法で

$$\tau_d \sim H^2/K_m$$

と求められる. ゆえに,  $H$ ,  $K_m$  に先の値を代入すると, 拡散の時間スケールはおよそ 100 日となる.

すなわち, 対流がないとき, スピンドウン過程は渦拡散よりはるかに効果的に渦度を減衰させるメカニズムとなる. しかし積乱雲の対流があるような場合は, スピンドウンで渦度が減衰するよりも早く熱と運動量の乱流輸送を生成する. ハリケーンのようなシステムでは境界層の吸い込みと積乱雲による対流は一緒に考えられなければならない.

大気の場合, (地衡風バランスと旋衡流バランスの違いは除いて) スピンドウン過程はティーカップで述べたものと同様である. 境界層の抵抗による 2 次循環の役割は, 内部領域で外向きの動径速度を生成することである. この 2 次循環は低気圧の外側を向くので, 境

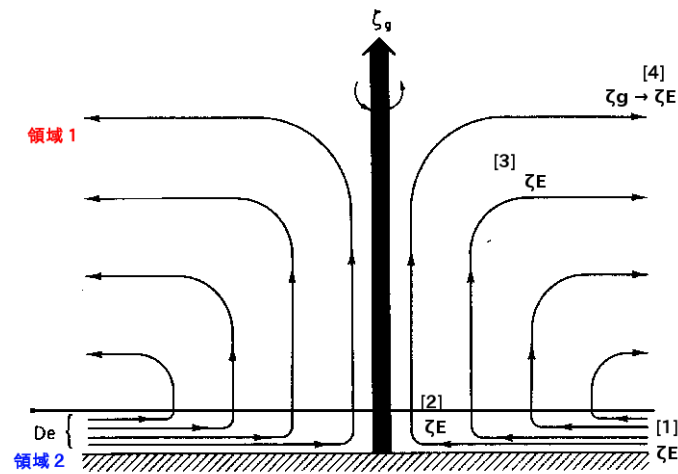


図 5.12: 順圧大気における低気圧性渦に対する大気境界層の摩擦収束によって強制される 2 次循環の流線. 循環は渦の深さいっぱい広がる. コーヒーカップでの議論にも適用できるように原図を一部改変.

境界層から自由大気に出た渦は徐々に広がる. ケルビンの循環定理から循環は保存されるので, 同位角方向の速度 (渦度) は時間とともに減衰する.

**2 次循環**という言葉の定義は 1 次循環 (この場合, 渦の同位角方向の循環) に重なる循環のことである. 境界層の場合, 粘性が 2 次循環と関連している. しかし, 温度の移流や非断熱加熱のような, 他の過程ものに示すように 2 次循環を引き起こす. 図 5.13 は低気圧性回転を伴う渦における 2 種類の強制による異なった 2 次循環のパターンを表している. 同図の上は境界層における吸い込みによって駆動される 2 次循環を, 下は自由大気における非断熱加熱によって強制される 2 次循環である.

安定成層した傾圧大気の場合, 解析は複雑であるが, 定性的には容易に理解できる. 安定成層は鉛直方向の運動を抑えるように作用する. 結果として, 内部の 2 次循環は静的安定度に比例する割合で高度とともに減少するであろう. これは, 安定成層した場での 2 次循環は自由大気の上層にある渦に影響をほとんど与えないことを意味している. 図 5.14 で示されるような, 鉛直方向に大きく変化する 2 次循環は, エクマン層のすぐ上で渦度を急速にスピンドウさせる<sup>\*9</sup>. これによって, 以下のような効果が生まれる (詳細は図 5.14).

- 2 次循環が渦中心で上昇気流, 境界層上端付近で外向きの流れとなる (a).
- 場は安定成層しているため, 上昇気流によって境界層上端付近で断熱冷却される (b).
- これは渦中心付近の境界層上端で温位が減少することに対応する (寒気核の形成) (a).

<sup>\*9</sup>なぜなら, スピンドウ時間が 2 次循環の到達する高度に依存しているからである. 安定成層した場では 2 次循環の到達高度が傾圧な場合の 1/10 となっているので, スピンドウする時間は 10 倍速くなる (1/10 倍のスピンドウ時間になる).

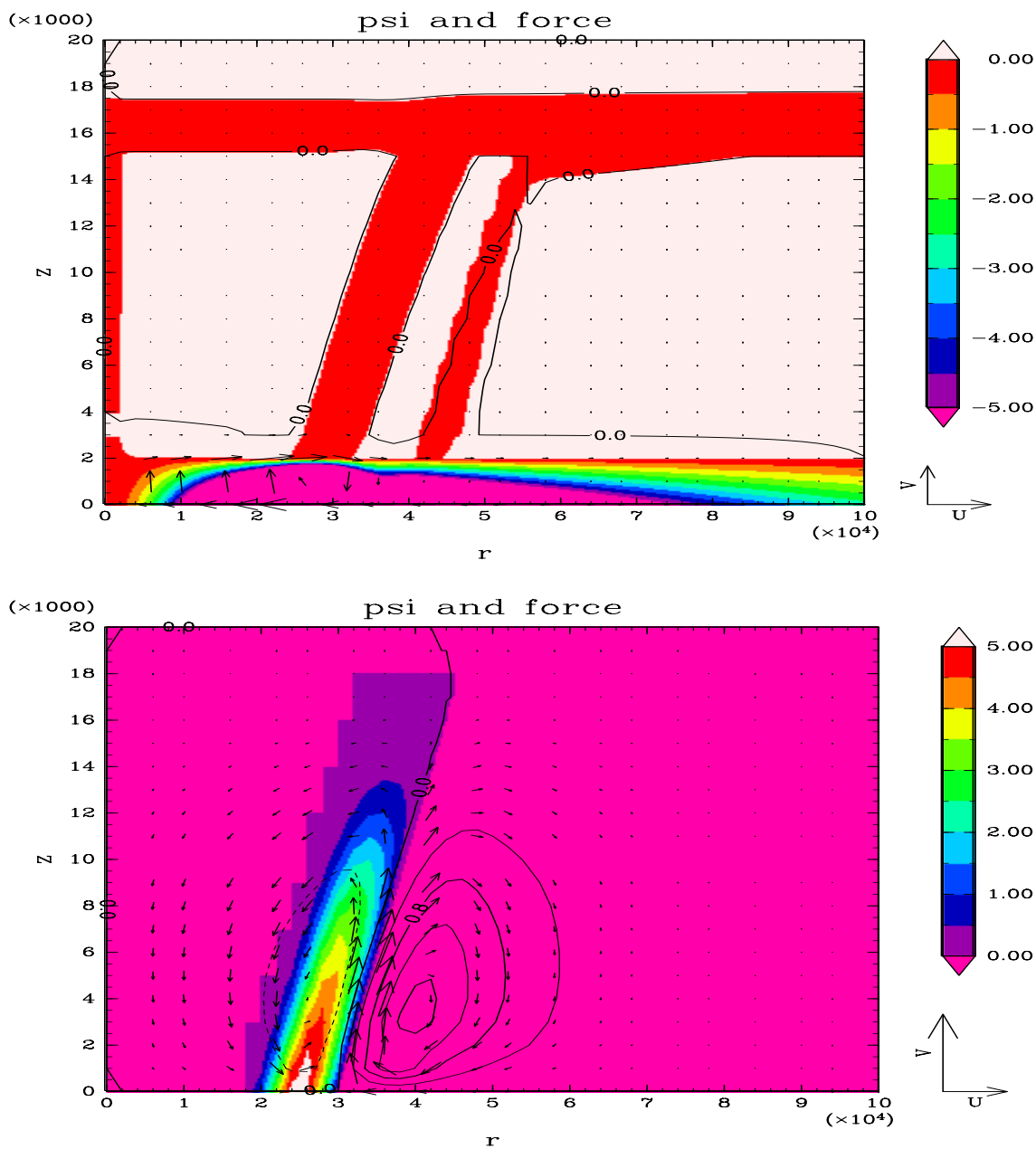


図 5.13: 台風のような渦における非断熱加熱と海面摩擦で駆動される 2 次循環の空間分布. 上が海面摩擦, 下が非断熱加熱を表す. 矢印は 2 次循環の向きと大きさを, 等値線は質量流線関数を, カラーは上が海面摩擦抵抗の大きさの分布, 下が非断熱加熱の分布を示す.

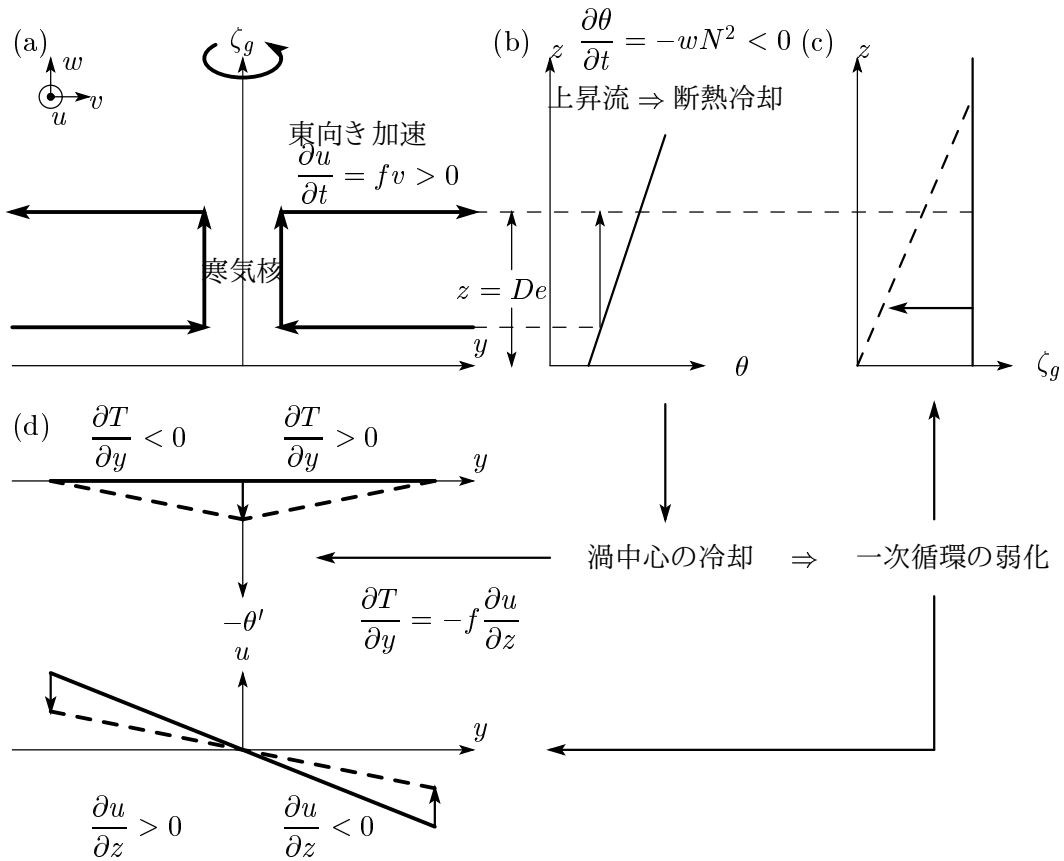


図 5.14: 安定成層した傾圧大気における低気圧性循環に対する大気境界層の摩擦収束によって強制される2次循環の流線とそのスピンドウンメカニズム. (a) 太い矢印は2次循環の流線の水平鉛直分布, (b) 実線は渦中心付近での温位の鉛直分布, 矢印は上昇気流, (c) 実線はスピンドウン前の渦中心付近での渦度鉛直分布, 破線はスピンドウンしている間での渦度鉛直分布, (d) 境界層内における温位の水平平均からの偏差の水平分布 (上) と東西風の水平分布 (下), とともに実線がスピンドウン前, 破線がスピンドウン時を表す.

- 境界層上端の渦中心付近で水平平均からの温位アノマリが負偏差となる。これは水平方向に温位勾配を生成する (d; 上).
- 温度風の関係から境界層上端付近で地衡風循環が弱化する (d; 下).
- 境界層上端付近での地衡風渦度は急速に減衰する (c).
- この温位変化による渦の弱化は境界層上端での運動方程式での東向き加速と対応する (a).

ゆえに、傾圧大気における2次循環は2つの目的をもつ。

1. 外向き水平風は、コリオリ力の作用によって、渦の同位角方向の速度を変化させる。
2. 上向き鉛直風は、断熱冷却と温度風バランスによって常に同位角方向の速度の鉛直シアと動径方向の温度勾配を支える。

この一連のプロセスが傾圧場における渦のスピンドウン過程を定性的に説明している。

## 付録

## エクマン層内における力のバランス

図 1 はエクマン層内におけるホドグラフにいくつかの高度での力の向きを示した図である。この図から得られる、混合層との違いは乱流摩擦が混合層の場合と異なり、速度ベクトルの反対方向を向いていないという点である。混合層の場合は摩擦は必ず速度ベクトルの反対方向を向いていたので、そこでの速度は必ず地衡流より小さくなっていった。しかし、エクマン層では摩擦は必ずしも速度ベクトルと反対方向を向くとは限らないので、エクマン層上端付近では地衡流よりいくらか速度が大きくなっている。特に、エクマン層上端では速度は地衡流より大きいので、コリオリ力は圧力傾度と摩擦とバランスし、摩擦はこのとき、圧力傾度と同じ方向を向く（速度ベクトルに直交する方向を向く）。これは、混合層とエクマン層で乱流摩擦の効果を表す定式化が異なるからである。

図 2 はエクマン層内における各速度成分と摩擦力の鉛直分布を示したものである。この図から、エクマン層での摩擦力と速度の関係がさらに明確になる。混合層での摩擦力と異なり、エクマン層内での各高度における摩擦力はその高度における速度に比例しているわけではない。また高度によっては速度と同じ向きに摩擦力が働いている箇所も存在している。

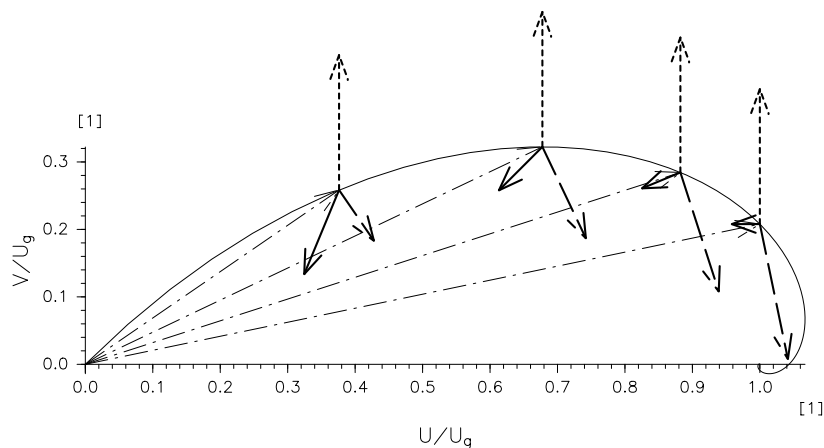


図 1: エクマン層における各高度での力のバランス。細い実線がエクマン層内でのホドグラフ。1 点鎖線矢印が各高度での速度ベクトル。太い 3 本のベクトルはそれぞれ各高度での 3 つの力を示しており、実線が摩擦力、破線がコリオリ力、点線が圧力傾度力である。

## 海洋におけるエクマンパンピング

エクマン層における水平風の運動方程式は定常、順圧なら (5.26), (5.27) とまったく同じである。ただし、海洋では海面を  $z = 0$  にとり、海底は  $z \rightarrow -\infty$  にとる。また、エクマン層ではフラックス勾配理論をもとに乱流フラックスが定式化されており、渦粘性係数は空間



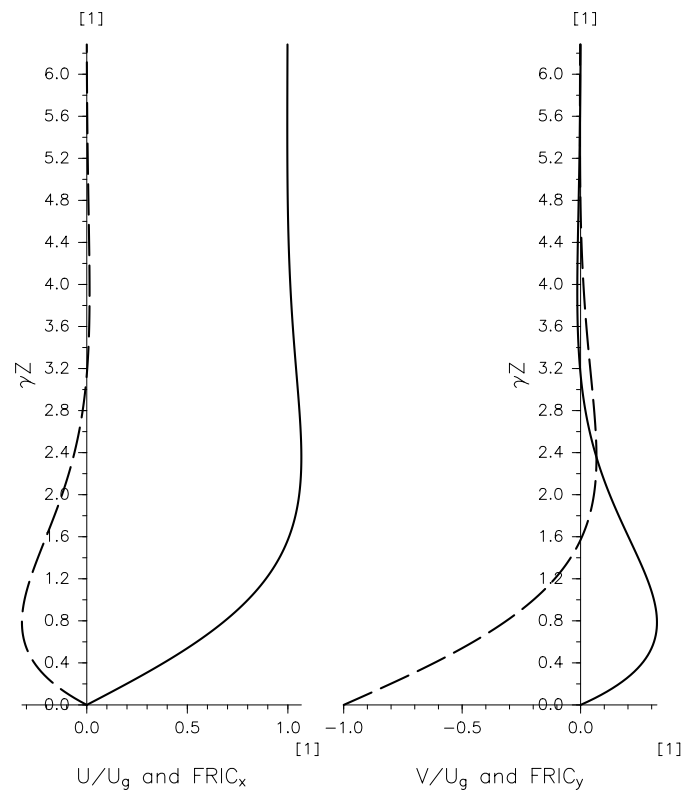


図 2: エクマン層における速度と摩擦力の各成分の鉛直分布. 高度はエクマン層高度で, 速度は地衡風で, 摩擦力は渦粘性係数とエクマン層高度でそれぞれ規格化されている. 左が東西方向, 右が南北方向の鉛直分布を表し, 実線が速度, 破線が摩擦力を表す.

一様である. 大気と海洋で異なる点は境界条件である.

	上端接続点	上端境界条件	下端接続域	下端境界条件
大気	自由大気	$\mathbf{V} = \mathbf{V}_g$	地表面	$\mathbf{V} = \mathbf{0}$
海洋	大気下端	$\boldsymbol{\tau}_o = -\boldsymbol{\tau}_a$	内部領域	$\mathbf{V} = \mathbf{V}_g$

ここで,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{V}_g$  は水平速度ベクトルと地衡流ベクトル,  $\boldsymbol{\tau}_a$ ,  $\boldsymbol{\tau}_o$  はそれぞれ大気から海面に与えられる風応力と海面が大気から受け取る風応力である. また, 速度ベクトルと応力ベクトルの各成分は

$$\mathbf{V} = (u, v), \quad \boldsymbol{\tau}_a = (\tau_x, \tau_y)$$

と表記する. 風応力がすべて海面での流れを駆動するのみに用いられるとすると, これらの 2 つの力は向きが異なり大きさが等しいことになる. ただし, 大気と海洋では密度が異なるので, 応力は乱流フラックスに密度をかけた値で定義する<sup>\*10</sup>. すると, 海洋が大気から受け取る風応力  $\boldsymbol{\tau}_o$  はフラックス勾配理論による定式化を用いて

$$\boldsymbol{\tau}_o = -\rho_0 K \left( \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

<sup>\*10</sup>つまり,  $\boldsymbol{\tau} = \rho \overline{u'_i u'_j}$  で応力を定義する.

と表現できる。ここで、 $\rho_0$  は海洋の密度、 $K$  は海洋の渦粘性係数である。よって、海面での境界条件は

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\tau_a}{\rho_0 K}, \quad z = 0$$

と表現できる。

(5.26), (5.27) の一般解は (??) を解いて

$$V = A \exp[(1+i)\gamma z] + B \exp[-(1+i)\gamma z] + V_g$$

である。ここで、

$$V \equiv u + iv, \quad V_g \equiv u_g + iv_g, \quad \gamma \equiv (f/2K)^{1/2}$$

とした。このとき、上下境界条件を複素数で表記すると、

$$V = V_g, \quad z \rightarrow -\infty,$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\tau_a}{\rho_0 K}, \quad z = 0$$

となる。ここで、風応力の複素数表記を  $\tau_a = \tau_x + i\tau_y$  とした。

下端境界条件から  $B = 0$  は明らかである。上端境界条件は上式を  $z$  で微分し、 $z = 0$  を代入すると得られる。上式の  $z$  微分は

$$\frac{\partial V}{\partial z} = A(1+i)\gamma \exp[(1+i)\gamma z]$$

なので<sup>\*11</sup>、 $A$  について

$$A(1+i)\gamma = \frac{\tau_a}{\rho_0 K} \Rightarrow A = \frac{\tau_a}{2\rho_0 K \gamma} (1-i)$$

という関係式が得られる。これらから海洋の表層におけるエクマン層の解は

$$V = \frac{\tau_a}{2\rho_0 K \gamma} (1-i) \exp[(1+i)\gamma z] + V_g$$

となる。各速度成分で表記すると、

$$\begin{aligned} u &= \frac{e^{\gamma z}}{2\rho_0 K \gamma} \{ \tau_x [\cos(\gamma z) + \sin(\gamma z)] + \tau_y [\cos(\gamma z) - \sin(\gamma z)] \} + u_g \\ v &= \frac{e^{\gamma z}}{2\rho_0 K \gamma} \{ \tau_y [\cos(\gamma z) + \sin(\gamma z)] + \tau_x [\sin(\gamma z) - \cos(\gamma z)] \} + v_g \end{aligned} \quad (\text{ex5.6.1})$$

となる。これが海洋表層のエクマン層の解である。問題では今、風応力は  $x$  方向にのみ作用しているので、

$$\tau_x = \tau_w, \quad \tau_y = 0$$

を (ex5.6.1) に代入すると、

$$\begin{aligned} u &= \frac{\tau_w e^{\gamma z}}{2\rho_0 K \gamma} [\cos(\gamma z) + \sin(\gamma z)] + u_g \\ v &= \frac{\tau_w e^{\gamma z}}{2\rho_0 K \gamma} [\sin(\gamma z) - \cos(\gamma z)] + v_g \end{aligned} \quad (\text{ex5.6.2})$$

<sup>\*11</sup>地衡流  $V_g$  は鉛直方向に一様であることに注意。

となる。これが求めるべき解である。この解をホドグラフで示したものが図??である。

本文で定義されているエクマン層の深さ  $De$  はエクマン螺旋が初めて上端境界での速度ベクトルが反転する高度なので、 $De = \pi/\gamma$  で求めることができる。問題で与えられている各値を用いると、その深さは

$$De = \frac{\pi}{\gamma} = \pi \left( \frac{2K}{f} \right)^{1/2} \approx 14.089 \text{ m}$$

となる。

図3はこの結果をホドグラフに示したものである。この図から、海面での正味のエクマン輸送は風応力の右側  $45^\circ$  に形成されることがわかる。また、大気境界層と同じく、螺旋状のホドグラフを形成する。エクマン層下端では地衡流に一致するので、正味の輸送量はゼロに近づく。

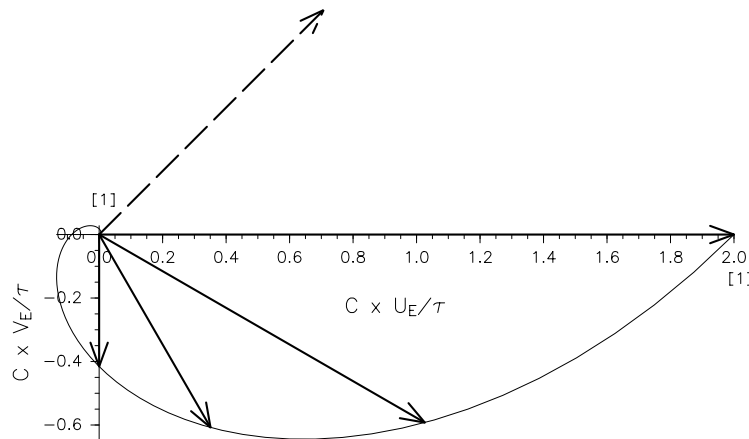


図 3: 海洋表層のエクマン層における地衡流成分を除いた正味のエクマン層輸送のホドグラフ。実線が各高度での流速ベクトルの軌跡、実線矢印が各深度での流速、破線が海面での風応力ベクトルをそれぞれ表す。ただし、各流速ベクトルは風応力を含めた係数で規格化されており、応力ベクトルも自身の大きさで規格化されている。 $C = 2\rho_0 K \gamma$ 。

さらに (ex5.6.1) をベクトル表記すると、

$$\mathbf{V} = \frac{e^{\gamma z}}{2\rho_0 K \gamma} \{ \boldsymbol{\tau}_a [\cos(\gamma z) + \sin(\gamma z)] - (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\tau}_a) [\cos(\gamma z) - \sin(\gamma z)] \} + \mathbf{V}_g$$

となる。このとき、単位幅の流体側面を通過する質量輸送は上式の両辺に密度を乗し、 $z$  について積分することで求めることができる。ただし、地衡流による質量輸送の成分はエクマン層内以外の内部領域にも存在するので、求めたい質量輸送は  $\mathbf{V} - \mathbf{V}_g$  の成分のみである。つまり、

$$\int_{-\infty}^0 \rho_0 (\mathbf{V} - \mathbf{V}_g) dz = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{\gamma z}}{2K \gamma} \{ \boldsymbol{\tau}_a [\cos(\gamma z) + \sin(\gamma z)] - (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\tau}_a) [\cos(\gamma z) - \sin(\gamma z)] \} dz$$

の右辺を求めればよいことになる。ただし、鉛直方向の積分区間が  $z = -De$  ではなく  $z \rightarrow -\infty$ なのは、エクマン層以深での質量輸送が非常に小さいので無視できるという事実

に基づいている。ここで、積分値：

$$\int_{-\infty}^0 e^{\gamma z} \cos(\gamma z) dz = - \int_{-\infty}^0 e^{\gamma z} \sin(\gamma z) dz = \frac{1}{2\gamma}$$

を用いると、エクマン層での質量輸送は

$$\int_{-\infty}^0 \rho_0 (\mathbf{V} - \mathbf{V}_g) dz = - \frac{\mathbf{k} \times \boldsymbol{\tau}_a}{2K\gamma^2}$$

となる。ここで、 $\gamma^2$  は  $f$  に比例するので、北半球と南半球でエクマン輸送の方向が反対となることに注意する。つまり、エクマン層での全質量は北半球では海面での風応力ベクトルの右側  $90^\circ$  に輸送されることが示される。

このような海洋表層におけるエクマン層の更なる詳細な解説は Pedlosky (1987) の 4,5 章が詳しい。