

1.5 非慣性基準座標と「みかけの」力

- 大気の力学法則を定式化する際、「回転している地球に対して静止」している座標系を用いる.
- 慣性運動 = 空間に固定されている座標系に相対的な一様な運動において質点が、何の外力も加わらないとき一様な運動をし続ける. このときの固定された座標系を慣性座標系, 絶対系と呼ぶ.
- 回転している地球に対して一様な運動をしている物体は, 空間に固定された座標系から見ると一様な運動をしてはいない.
⇒ 地球座標系で慣性運動と見える運動は, 実は加速運動.
- 地球座標は非慣性座標系.
- 地球座標のような座標系の加速を含む系では, ニュートンの第2法則の記述において, 「みかけの」力を導入すること.
- これらのみかけの力は座標系の加速によって発生する, 慣性反応項.
⇒ 一様な回転における座標系に対しては, 遠心力とコリオリ力がそれに相当.

1.5.1 求心加速度と遠心力

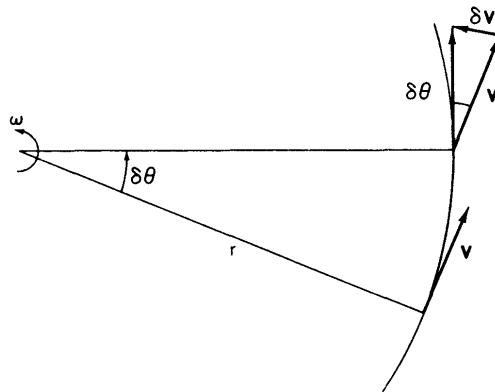


図 1.1: 質量 m のボールがひもでつながれており, 一定の角速度 ω で半径 r の円周を回転している.

- 慣性系の観測者からは, ボールは速さが一定で向きが連続的に変化.
- ボールが δt だけの時間に対して, 角度 $\delta\theta$ を回転する間に発生する速度変化 δV を考える.

- $\delta\theta$: V と $V + \delta V$ の間の角度. $\Rightarrow |\delta V| = |V|\delta\theta$.

- $\delta t \rightarrow 0$ の極限で δV は回転軸の向きを向く.

- これらを考慮すると,

$$\frac{DV}{Dt} = |V| \frac{D\theta}{Dt} \left(-\frac{\mathbf{r}}{r} \right)$$

- また, $|V| = \omega r$, $D\theta/Dt = \omega$ から,

$$\frac{DV}{Dt} = -\omega^2 \mathbf{r}. \quad (1.6)$$

固定された座標系から観測される運動は, 「回転軸の向きに一様に加速」され, 角速度の 2 乗と回転軸からの距離の積に等しい. この加速を求心加速度と呼ぶ.

ボールとともに回転する座標系の観測者から見ると, ボールは動かないが糸によって引っ張られる力が働いている. この回転座標系に対してニュートンの第 2 法則を用いると, 糸の張力と釣り合う付加的な見かけの力, 遠心力を含めなければならない.

$$|\text{遠心力}| = |\text{求心加速度}|, \quad \overrightarrow{\text{遠心力}} = -\overrightarrow{\text{求心加速度}}$$

慣性系 ボールの速度は求心加速度によって常に回転の中心に向かう向きに変化. この変化をもたらす力は糸の張力によるもの.

回転系 ボールの速度は変化しない. 糸の張力は働いているので, これと相殺するためのみかけの力として遠心力が必要.

1.5.2 実効重力

- 地表面に静止している物体は単位質量あたり, $-\Omega^2 R$ という地球の回転軸に向かう求心加速度が働く.
- 赤道と極を除いて, 求心加速度は地球の水平面 (等ジオポテンシャル面) に沿って極に向いている成分がある.
- この成分を支えるために極向きの水平方向の力が必要. これを説明するために, 地表面に静止している物体に対して, 各緯度で等ジオポテンシャル面に沿った重力の極向き成分が存在^{*1}.

^{*1}図 1.2 のように, 完全な球形のとき, 引力は球面に垂直であるため, 極向きの成分は存在しないが, 等ジオポテンシャル面では楕円を仮定するため, 引力の極向き成分が発生する. この極向き成分が求心加速度として認識される.

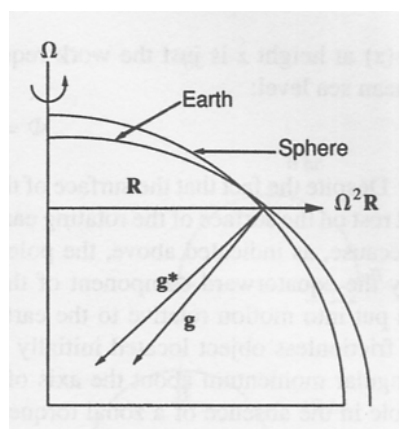


図 1.2: 純粋な万有引力ベクトル g^* と実効重力 g の関係. 理想化した一様な球形の地球に対して, g^* は地球の中心に向かう. 実際は g^* は赤道と極を除いて正確に中心を指してはいない. 実効重力 g は g^* と遠心力の合ベクトルであり, 地球の高度面に垂直である. これは楕円と近似する.

- 言い換えると, 慣性系における観測者の視点からは, ジオポテンシャル面は赤道に向かって上向きに傾斜 (図 1.2 参照).
- 実際に地球の赤道半径は極半径よりおよそ 21 km 長い.
- これを地球とともに回転している座標系から見ると, 等ジオポテンシャル面は万有引力のみの重力加速度 g^* と遠心力 $\Omega^2 R$ (これは単に求心加速度の反作用としての力) の和と常に直交.
- 極を除いて, ジオポテンシャル面で制止している質量 m の物体の重量は, 万有引力 mg^* よりわずかに小さい. なぜなら, 図 1.2 より, 遠心力が万有引力の一部とバランスしているため.
- 重力を

$$g \equiv -gk = g^* + \Omega^2 R \quad (1.7)$$

と定義することで, 万有引力と遠心力の効果を合わせられて便利. k は局所的な鉛直単位ベクトル. 重力加速度 g は定数 (9.81 m s^{-2}).

- 極と赤道を除いて, g は「ジオポテンシャル面に」直交.
- しかし, 真の重力 g^* は「ジオポテンシャル面に」は直交しない.
- 重力はポテンシャル関数 ϕ の勾配を用いて表すことができ, それはちょうど上記したジオポテンシャルとなる.

$$\nabla \phi = -g.$$

- (1.7) から,

$$\Phi = \Phi(z), \quad \frac{d\Phi}{dz} = g$$

であり, 地球の水平面は等ジオポテンシャル面.

- ジオポテンシャルの基準値を平均海面高度に設定すると, 高度 z でのジオポテンシャル $\Phi(z)$ はちょうど平均海面高度から z まで単位質量を持ち上げるのに必要な仕事:

$$\Phi = \int_0^z g dz \quad (1.8)$$

- 地表面が赤道に向かってふくらんでいるのに, 地球の表面に静止している物体は極に向かって「下り坂」を滑ることはない.
⇒ これは, 万有引力の極に向かう成分と遠心力の赤道に向かう成分が釣り合っているため.

しかし, 物体が地球に対して相対的な運動を受けると, このバランスは崩れる.

はじめ, 北極に位置する摩擦のない物体を考える.

- この物体は, 地球の軸について角運動量がゼロ.
- もし, 東西方向のトルクを無視したとき, 物体が極から離れた位置に動かされると, その物体は回転を獲得せずに, 真の重力の水平成分に由来する復元力を受ける.
⇒ 極での物体には遠心力が働いていないので, 少しでも極から離れると, 等ジオポテンシャル面に沿って極向きに万有引力を受ける (これが復元力).
- この復元力は地表面に静止している物体に対する遠心力の水平成分に大きさが等しく向きが逆となる.
- 極からの距離を R とすると, 微小変位に対する水平復元力は $-\Omega^2 R$ で, 慣性系から見た物体の加速度は

$$\frac{d^2 R}{dt^2} + \Omega^2 R = 0. \quad (1.9)$$

- この物体の動き:
 - 固定された座標系における観測者 ⇒ 極を通過する直線のように見える
 - 地球とともに回転している観測者 ⇒ 半日で閉じた円周を回るように見える.
⇒ その周期は $\frac{2\pi}{\Omega}$ (図 1.3). また, 地球上の観測者から見ると, 物体は決まった割合でその運動の方向の「右」に駆動されるように見える.

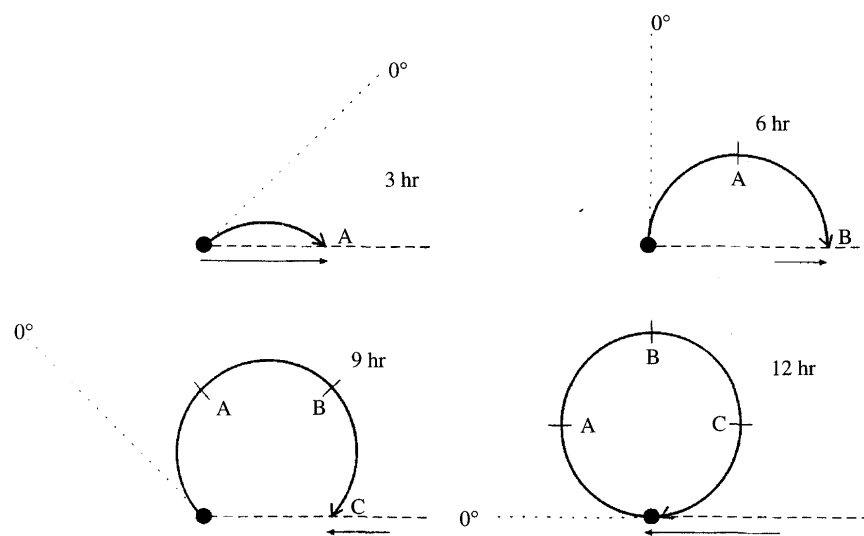


図 1.3: $t = 0$ で経度 0° の子午面に沿って北極から打ち出された摩擦のない物体の運動を一定時間間隔で固定座標系と回転座標系から見たもの. 固定座標系では, 物体は万有引力の水平成分による復元力から, 直線に沿って前後に振動. 周期は 24 時間. 回転座標系では, 運動は等速で 12 時間で時計回りに完全な円周を描く.

1.5.3 コリオリ力と曲率の効果

- 遠心力は地球に静止している物体に働く力.
- 地球上で運動している物体に働くみかけの力が別に必要.

初めに緯度 ϕ で東西方向に速度 u で移動している単位質量の物体が緯度, 高度ともに変化するとする.

- 物体の変化とともに, 自身の角運動量を保存する.
 \Rightarrow 物体の回転軸に対する距離 R が緯度, 高度変化すると, 絶対角速度 $\Omega + u/R$ が変化する.
- Ω は一定なので, 東西方向の相対速度が変化.
 \Rightarrow 物体はあたかも東西方向に力が働くように見える.
- この力の式は, 最初の距離 R での全角運動量と変位後の距離 $R + \delta R$ での全角運動量が等しいことから得られる.

$$\left(\Omega + \frac{u}{R}\right) R^2 = \left(\Omega + \frac{u + \delta u}{R + \delta R}\right) (R + \delta R)^2$$

ここで, δu は変位後の東西方向の相対速度の変化. 右辺を展開し, 2 次以上の微小項を無視すると, δu について,

$$\delta u = -2\Omega\delta R - \frac{u}{R}\delta R.$$

- a を地球の半径, ϕ を緯度とすると, $R = a \cos \phi$ であるから, 時間変化 δt で割って $\delta t \rightarrow 0$ の極限をとると,

– $\delta R = -\sin \theta \delta y$ (図 1.4) となるような子午面変位の場合 \Rightarrow

$$\left(\frac{Du}{Dt}\right) = \left(2\Omega \sin \phi + \frac{u}{a} \tan \phi\right) \frac{Dy}{Dt} = 2\Omega v \sin \phi + \frac{uv}{a} \tan \phi \quad (1.10a)$$

– $\delta R = +\cos \phi \delta z$ となるような鉛直変位の場合 \Rightarrow

$$\left(\frac{Du}{Dt}\right) = -\left(2\Omega \cos \phi + \frac{u}{a}\right) \frac{Dz}{Dt} = -2\Omega w \cos \phi - \frac{uw}{a} \quad (1.10b)$$

ここで, $v = Dy/Dt$, $w = Dz/Dt$ はそれぞれ北向きおよび鉛直上向きの速度成分.

- (1.10a), (1.10b) の右辺第 1 項が子午面および鉛直運動に対するコリオリ力の東西成分.
- 同式右辺第 2 項はメトリック項 (曲率項) で, 地球表面の曲率によって発生する.

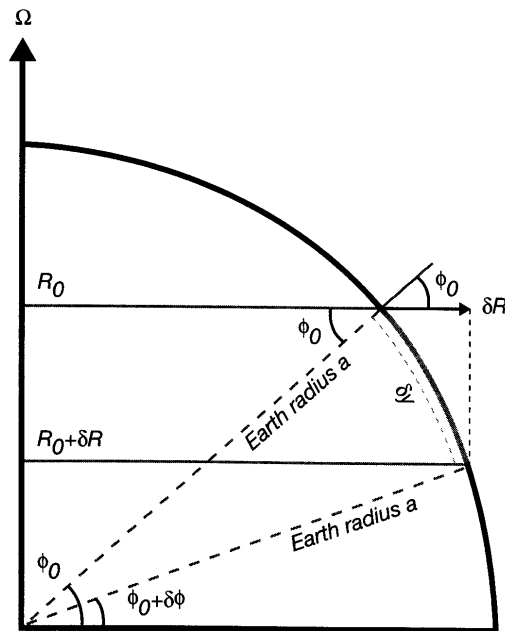


図 1.4: 赤道に向かう変位に対する δR と $\delta y = a\delta\phi$ の関係.

- 同様の議論で、コリオリ力の子午面成分が得られる。
 - 物体が東向きに運動するということを考える。すると、物体は地球より速く回転し遠心力が増加する。
 - 回転軸から物体までの位置ベクトルを R とすると、静止状態での物体より、

$$\left(\Omega + \frac{u}{R}\right)^2 R - \Omega^2 R = \frac{2\Omega u R}{R} + \frac{u^2 R}{R^2}$$

だけ遠心力が増加。

- 右辺はみかけの力を表し、ベクトル R に（回転軸に垂直な方向に）働く。

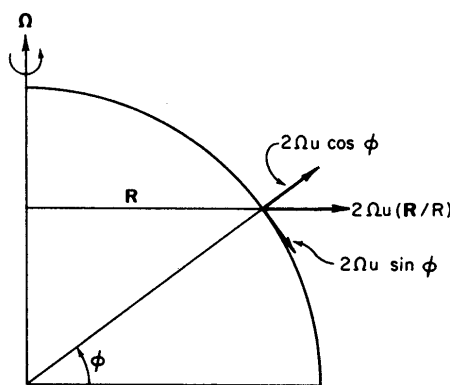


図 1.5: 子午面に沿った相対運動に由来するコリオリ力の各成分.

- これらの力の子午面、鉛直成分は図 1.5 のように、

$$\left(\frac{Dv}{Dt}\right) = -2\Omega u \sin \phi - \frac{u^2}{a} \tan \phi, \tag{1.11a}$$

$$\left(\frac{Dw}{Dt}\right) = 2\Omega u \cos \phi + \frac{u^2}{a} \tag{1.11b}$$

右辺第 1 項は東西方向の運動に対するコリオリ力の子午面、鉛直成分。第 2 項は曲率項。

- $|u| \ll \Omega R$ となるような、総観規模の運動に対して、(1.10a), (1.11a) の最終項は無視できる。
- よって、相対的な水平運動は

$$\left(\frac{Du}{Dt}\right)_{C_o} = 2\Omega v \sin \phi = fv, \tag{1.12a}$$

$$\left(\frac{Dv}{Dt}\right)_{C_o} = -2\Omega u \sin \phi = -fu \tag{1.12b}$$

という、「運動の向きに垂直な水平加速度」を生成する。

- $f \equiv 2\Omega \sin \phi$ はコリオリパラメータ. 添字 C_o はコリオリ力に由来する加速度部分であることを示す.
 - 例えば水平方向東向きに運動している物体はコリオリ力によって赤道方向にそらされる.
 - 一方, 西向きに運動する物体は極向きにそらされる.
 - このそりは,

北半球 \Rightarrow 運動の右向き, 南半球 \Rightarrow 運動の左向き

にはたらく.

- (1.11b) では, コリオリ力の鉛直成分は重力よりはるかに小さいので, このときのコリオリ力の効果は物体が東西に移動することで物体のみかけの重量が微小に変化することのみ.
- (1.12a), (1.12b) は

$$\left(\frac{D\mathbf{V}}{Dt} \right)_{C_o} = -f\mathbf{k} \times \mathbf{V} \quad (1.14)$$

というようにベクトル形式で書ける. $\mathbf{V} \equiv (u, v)$ は水平速度, \mathbf{k} は鉛直単位ベクトルを示す.

- $-\mathbf{k} \times \mathbf{V}$ は \mathbf{V} の右手に 90° 回転したベクトルなので, (1.14) は, コリオリ力のそりの性質を明確に表している.
 - \Rightarrow コリオリ力は運動の方向のみを変化させ, 運動の速度は変化させない.
- コリオリ力は地球の自転に比べて周期が非常に短い時間スケールの運動では無視できる.
 - \Rightarrow コリオリ力は 1 つ 1 つの積雲の力学には重要ではない.
 - \Rightarrow 総観規模のシステムのようなより長い時間スケールの現象を理解するのに必要不可欠.
 - \Rightarrow また長距離ミサイルや大砲の弾道を計算するとき考慮される.

例として, 弾道ミサイルが北緯 43 度 (この緯度では $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$) で東向きに発射されるとする. ミサイルが水平速度 $u_0 = 1000 \text{ m s}^{-1}$ で 1000 km 移動するときのコリオリ力による軌道のずれを求め.

時間に関して (1.12b) を積分し,

$$v = -fu_0t. \quad (1.13)$$

f, u_0 を定数とする. 時間で (1.13) を積分すると,

$$\int_0^t v dt = \int_{y_0}^{y_0+\delta y} dy = -fu_0 \int_0^t t dt$$

より, 全変位は

$$\delta y = -f u_0 t^2 / 2 = -50 \text{ km}.$$

ゆえに, ミサイルはコリオリの効果によって 50 km 南にそらされる.

1.5.4 角運動量一定の振動

点 (x_0, y_0) にはじめ静止状態の物体が $t = 0$ で速度 V をもち, x 軸に沿って突然進められるとする.

- このとき, (1.12a), (1.12b) から速度の時間発展は,

$$u = V \cos ft, \quad v = -V \sin ft.$$

- $u = Dx/Dt$, $v = Dy/Dt$ から, 時間に関して積分すると, 時刻 t での物体の位置は

$$x - x_0 = \frac{V}{f} \sin ft, \quad y - y_0 = \frac{V}{f} (\cos ft - 1). \quad (1.15a, b)$$

緯度での f の変化は無視^{*2}.

- (1.15a), (1.15b) は, f が正となる北半球で

$$\tau = 2\pi R/V = 2\pi/f = \pi/(\Omega \sin \phi) \quad (1.1)$$

という周期で, 点 $(x_0, y_0 - V/f)$ を中心に半径 $R = V/f$ の円周を時計回り (台風と反対回り) に回転.

- 重力の影響下で地表面での物体の平衡点から水平に変位したものはその平衡点のまわりを振動する. その周期は緯度に依存し, 緯度 30° では 1 恒星日, 極では半恒星日に等しい周期となる.
- 一定の角運動量振動 (しばしば「慣性振動」と誤解されて表現される) は, 海洋でよく観測されるが, 大気では見られない.

1.6 静止大気の構造

任意の点における大気の熱力学状態は, その点での圧力, 温度, 密度 (比容) で決まり, これらの変数は状態方程式によってそれぞれ別の変数と関係をもつ. $p, T, \rho, \alpha (\equiv \rho^{-1})$ をそれぞれ, 圧力, 温度, 密度, 比容とすると, 乾燥大気についての状態方程式は,

$$p\alpha = RT, \quad \text{あるいは, } p = \rho RT \quad (1.17)$$

ここで, R は乾燥大気の気体定数 ($R = 287 \text{ JK}^{-1}\text{kg}^{-1}$).

^{*2}導出は付録参照.

1.6.1 静水圧平衡

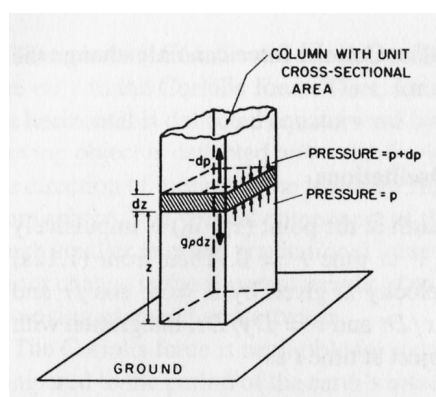


図 1.6: 静水圧平衡に対する力のバランス.

- 大気の運動を無視すると, 重力は鉛直圧力勾配とバランスする.

$$dp/dz = \rho g \quad (1.18)$$

- 静水圧平衡は現実大気の圧力の鉛直分布のよい近似.
- ただし, スコールラインやトルネードのような非常に小さいスケールのシステムに対してのみ, 静水圧平衡からのズレを考慮.
- 大気の高さ z から上端までについて (1.18) を積分すると,

$$p(z) = \int_z^{\infty} \rho g dz \quad (1.1)$$

であるから,

任意の点での圧力 = その点より上にある単位断面積の大気柱の重量

- ゆえに, 平均海面高度での気圧 $p(0) = 1013.25$ hPa はすべての大気の柱の単位面積あたりの平均重量.
- ジオポテンシャルを用いた静力学関係式は, (1.8) から, $d\Phi = g dz$, (1.17) から $\alpha = RT/p$ なので,

$$g dz = d\Phi = -(RT/p) dp = -RT d \ln p. \quad (1.20)$$

- これより, 圧力に対するジオポテンシャルの変化は温度のみに依存.
- (1.20) を鉛直方向に積分し, 測高公式を得る.

$$\Phi(z_2) - \Phi(z_1) = g_0(Z_2 - Z_1) = R \int_{p_2}^{p_1} T d \ln p \quad (1.21)$$

$Z \equiv \Phi(z)/g_0$ はジオポテンシャル高度. $g_0 \equiv 9.80665$ m s⁻² は, 平均海面高度での全球平均重力加速度.

- 対流圏および、下部成層圏では、 Z は幾何高度 z と数値的にはほぼ同じ。
- Z を用いると、測高公式は

$$Z_T \equiv Z_2 - Z_1 = \frac{R}{g_0} \int_{p_2}^{p_1} T d \ln p. \quad (1.22)$$

Z_T は圧力面 p_2, p_1 の間の大気層の厚さ

- ある 1 つの層の平均温度を

$$\langle T \rangle = \int_{p_2}^{p_1} T d \ln p \left[\int_{p_2}^{p_1} d \ln p \right]^{-1}$$

と定義し、ある層の平均スケールハイトを $H \equiv R \langle T \rangle / g_0$ とすると、(1.22) から

$$Z_T = H \ln(p_1/p_2). \quad (1.23)$$

- ある層の厚さは、その層の平均温度に比例する。
- 圧力は暖かい層より冷たい層の方が高度とともに、急激に減少する。
- 温度 T の等温大気において、ジオポテンシャルハイトが地表面気圧によって規格化された圧力の自然対数に比例する。

$$Z = -H \ln(p/p_0). \quad (1.24)$$

p_0 は $Z = 0$ での圧力。

- (1.24) を

$$p(Z) = p(0)e^{-Z/H}$$

と直すと、等温大気での圧力はスケールハイトごとに e^{-1} という率でジオポテンシャル高度とともに指数関数的に減少。

1.6.2 鉛直座標系としての圧力

静力学関係式 (1.18) から、ある一価の関係が圧力と高度の間に存在。
 \Rightarrow 高度の代わりに独立な鉛直座標系として圧力を用いることが可能。
 このとき、大気の熱力学状態は $\Phi(x, y, p, t)$, $T(x, y, p, t)$ の場によって指定。

例として、(1.1) の気圧傾度力の水平成分を考える。鉛直座標として高度を用いた気圧傾度力から、鉛直座標として圧力座標を用いた表現に書き換える。

高度から圧力座標系への水平圧力傾度力の変換は図 1.7 から

$$\left[\frac{(p_0 + \delta p) - p_0}{\delta x} \right]_z = \left[\frac{(p_0 + \delta p) - p_0}{\delta z} \right]_x \left(\frac{\delta z}{\delta x} \right)_p$$

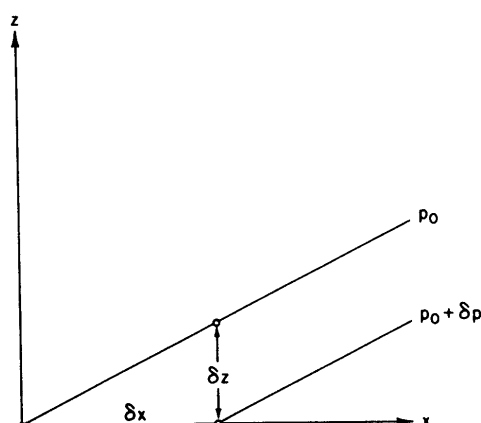


図 1.7: x, z 平面における圧力面の傾斜.

$\delta z \rightarrow 0$ の極限では,

$$\left[\frac{(p_0 + \delta p) - p_0}{\delta z} \right]_x \rightarrow \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right)_x$$

となる. ここで, $\delta p > 0$ に対して, $\delta z < 0$ であるので, 負号が含まれる.

$\delta x, \delta z \rightarrow 0$ という極限をとると,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_z = - \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_p$$

を得る^{*3}. ここで, 静力学平衡 (1.18) を代入すると,

$$-\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_z = -g \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_p = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_p \quad (1.25)$$

また,

$$-\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_z = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_p \quad (1.26)$$

- 圧力座標系では水平方向の圧力傾度力は等圧面でのジオポテンシャルの勾配で測られる.
- 圧力座標系の明瞭な長所は, 密度が圧力傾度力に陽に現れないこと.

1.6.3 一般化された鉛直座標

- 圧力あるいは高度の単調な一価関数は鉛直座標系として用いることができる.

^{*3} (原文脚注) この表式において, 右辺の負号は重要である.

- 多くの気象予報数値モデルでは、地表の圧力によって規格化された圧力 [$\sigma \equiv p(x, y, z, t)/p_0(x, y, t)$] が鉛直座標系として用いられる。
 ⇒ この座標系は、地表面圧力が変化しても地面が座標の基底 ($\sigma \equiv 1$) となるので、この σ 座標系は大きな地形の変化がある領域で便利。

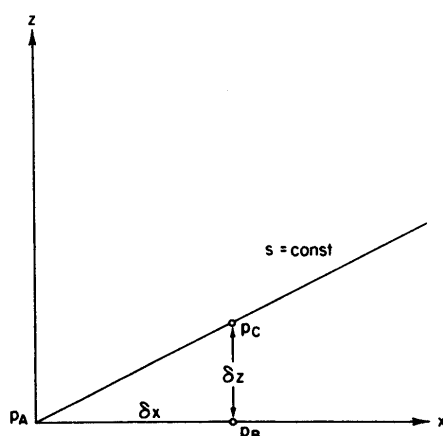


図 1.8: 圧力傾度力の s 座標系への変換.

先の例を応用して、水平方向の圧力傾度に対する一般的な表式を求める。ここで、高度の一価単調関数な一般の鉛直座標 $s = s(x, y, z, t)$ を用いる。

図 1.8 より水平距離 δx に対して、等 s 面に沿った圧力の差分は、

$$\frac{p_C - p_A}{\delta x} = \frac{p_C - p_B}{\delta z} \frac{\delta z}{\delta x} + \frac{p_B - p_A}{\delta x}$$

で z と関係する。 $\delta x, \delta z \rightarrow 0$ の極限をとると、

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_s = \frac{\partial p}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_s + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z \quad (1.27)$$

$\partial p/\partial z = (\partial s/\partial z)(\partial p/\partial s)$ から、(1.27) を別の形式

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_s = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z + \frac{\partial s}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_s \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right) \quad (1.28)$$

に表記できる。

のちの章で、(1.27), (1.28) 式のように、力学方程式をいくつかの異なった鉛直座標系に対して変換する。

付録：(1.15a,b) 導出

(1.12) 式は

$$\frac{Du}{Dt} = fv, \quad \frac{Dv}{Dt} = -fu$$

となる。第 1 式を時間で微分すると、

$$\frac{D^2u}{Dt^2} = f \frac{Dv}{Dt}.$$

第 2 式を上式の右辺に代入し、

$$\frac{D^2u}{Dt^2} = -f^2u.$$

この一般解は、

$$u = A \cos ft + B \sin ft.$$

これを (1.12) 第 1 式に代入すると、

$$v = \frac{1}{f} \frac{Du}{Dt} = -A \sin ft + B \cos ft.$$

ここで、 A, B はそれぞれ任意係数。初期条件は $t = 0$ で $u = V, v = 0$ なので、これらの係数は

$$A = v, \quad B = 0.$$

よって、

$$u = V \cos ft, \quad v = -V \sin ft.$$

また、物体の位置 x, y とその速度 u, v は

$$\frac{Dx}{Dt} = u, \quad \frac{Dy}{Dt} = v$$

という関係をもつので、先に求めた u, v を代入すると、

$$\frac{Dx}{Dt} = V \cos ft, \quad \frac{Dy}{Dt} = -V \sin ft.$$

それぞれ時間で積分すると、

$$x = \frac{V}{f} \sin ft + C, \quad y = \frac{V}{f} \cos ft + D.$$

位置の初期条件は $t = 0$ で $x = x_0, y = y_0$ なので、上式から

$$x - x_0 = \frac{V}{f} \sin ft, \quad y - y_0 = \frac{V}{f} (\cos ft - 1).$$

よって、(1.15a,b) 式が得られる。

1.5.2 における地球の長短軸半径の差の導出

遠心力を考慮した実効重力加速度は、(1.7) 式より

$$\mathbf{g} \equiv -g\mathbf{k} = \mathbf{g}^* + \Omega^2 \mathbf{R}$$

である。この重力加速度を用いて定義されたジオポテンシャル Φ は

$$\nabla \Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = -\mathbf{g} \quad (1.5.2a)$$

という関係式を満たす。また、図 1.6 および、(1.7) 式から、

$$\nabla \Phi = -\mathbf{g} = \frac{GM}{r^3} \mathbf{r} - \Omega^2 \mathbf{R} \quad (1.5.2b)$$

という関係がある。(1.5.2a), (1.5.2b) から、

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = \frac{GM}{r^3} \mathbf{r} - \Omega^2 \mathbf{R} \quad (1.5.2c)$$

となる。ここで、 r は地球の中心からの位置ベクトルであり、その大きさは r に等しい。また、

$$|\mathbf{R}| = r \cos \theta, \quad \mathbf{R} = (|\mathbf{R}| \cos \theta, -|\mathbf{R}| \sin \theta)$$

である。これを用いると、(1.5.2c) 式は

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = \left(\frac{GM}{r^2} - \Omega^2 r \cos^2 \theta, \Omega^2 r \sin \theta \cos \theta \right) \quad (1.5.2d)$$

となる。よって、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{GM}{r^2} - \Omega^2 r \cos^2 \theta, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \Omega^2 r \sin \theta \cos \theta$$

という微分方程式の解が、 Φ となる。第 1 式から

$$\Phi = -\frac{GM}{r} - \frac{\Omega^2 r^2}{2} \cos^2 \theta + \phi(\theta), \quad \phi(\theta) = \theta \text{ のみの任意定数} \quad (1.5.2e)$$

が、第 2 式から

$$\Phi = -\frac{\Omega^2 r^2}{4} \cos 2\theta + \phi(r), \quad \phi(r) = r \text{ のみの関数} \quad (1.5.2f)$$

となる。計算の便宜上、(1.5.2e) 式を

$$\Phi = -\frac{GM}{r} - \frac{\Omega^2 r^2}{4} \cos 2\theta - \frac{\Omega^2 r^2}{4} + \phi(\theta) \quad (1.5.2g)$$

と書き換えておく。(1.5.2f), (1.5.2g) 式から、

$$\Phi = -\frac{GM}{r} - \frac{\Omega^2 r^2}{4} \cos 2\theta - \frac{\Omega^2 r^2}{4} + \text{const.}$$

であることがわかる。地球表面を等ジオポテンシャル面と仮定したとき、極半径を a 、赤道半径を b とすると、等ジオポテンシャル面では

$$\Phi(\text{極}) = \Phi(\text{赤道})$$

という関係が成り立つ。極では $\theta = \frac{\pi}{2}$ 、赤道では $\theta = 0$ であるので、

$$\Phi(\text{極}) = \Phi\left(a, \frac{\pi}{2}\right), \quad \Phi(\text{赤道}) = \Phi(b, 0)$$

という値をもつ。具体的にこれらを計算すると、

$$-\frac{GM}{a} = -\frac{GM}{b} - \frac{\Omega^2 b^2}{2}$$

という関係が得られる。求めるのは赤道半径 b と極半径 a の差であるので、上式を

$$b - a = \frac{cb}{1+c}, \quad c \equiv \frac{\Omega^2 b^3}{2GM}$$

とすると、その値は、

$$b - a \approx 10.96 \text{ km}$$

となる。ここで、計算に用いた値として、赤道半径を 6370 km, 万有引力定数を $6.673 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$, 地球の質量を $(1.9891/3.32946) \times 10^{25} \text{ kg}$, 地球の自転角速度を $7.292 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$ として計算した。

(1.27), (1.28) 式的全微分による導出

鉛直座標系として、 $s = s(x, y, z, t)$ となる変数をとる。このとき、 p の全微分は、

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{x,y,z} dt + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{y,z,t} dx + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{x,z,t} dy + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{x,y,t} dz$$

である。 z と s は互いに一価の関数の関係にあるので、

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{x,y,s} dt + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y,s,t} dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x,s,t} dy + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)_{x,y,t} ds$$

でなければならない^{*21}。これを dp の式に代入すると、

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{x,y,z} dt + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{y,z,t} dx + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{x,z,t} dy + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{x,y,t} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{x,y,s} dt + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y,s,t} dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x,s,t} dy + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)_{x,y,t} ds \right]$$

^{*21}よく、オイラー系では、 $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ という表現をみかけるが、これは、 $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y,z,t}$ という意味を表しており、 z が一定のもとで z の x 方向の変化を計算しようとしているので、恒等的にゼロとなる。しかし今は、 $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y,s,t}$ という z に対応するが、 z とは異なる座標系を一定にしての z の変化を計算しているので、恒等的にゼロになるとは限らないことに注意。

となる。 t, y, s が一定のとき、上式から

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{t,y,s} = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{y,z,t} + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{x,y,t} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y,s,t}$$

が得られる。また、先の dp の式について、 t, x, s が一定のときは

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{t,x,s} = \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{x,z,t} + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{x,y,t} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x,s,t}$$

が成り立つ。ベクトル形式で表現すると、これらの式から

$$\nabla_{t,s}p = \nabla_{t,z}p + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{x,y,t} \nabla_{t,s}z$$

となることがわかる。ここで、

$$\nabla_{??} = \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{??}, \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{??} \right\}$$

である。?? には、任意の高度座標系が入る。また、原文と同様に、 $\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial s}$ という関係を用いると、

$$\nabla_{t,s}p = \nabla_{t,z}p + \left(\frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial s}\right)_{x,y,t} \nabla_{t,s}z$$

となる^{*22}。これらの関係式は、微分する変数が p 以外でも成立することに注意。

^{*22}ここではあえて、 $\frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial s}$ に x, y, t を一定として偏微分すると表記したが、 s と z は互いに一価の関数どおしであるので、これらの変換は x, y, t を一定にして行うということが暗黙の認識となっている。原文で x, y, t を一定にして計算するという添え字表記が省略されているのは、そのためであろうと考えられる。