

金星大気のスーパーローテーションにおける  
Thompson のメカニズムの研究

神戸大学 理学部 地球惑星科学科  
流体地球物理学教育研究分野  
宮野加菜

**2017/03/24**



## 要旨

本研究では Thompson(1970) に沿って金星大気のスーパーローテーションについての考察をおこなう。まず Boussinesq 流体の基礎方程式を整理し、Thompson で用いられている支配方程式を導出した。次に、Arakawa Jacobian 法を用いて対流と平均流の運動エネルギーの関係を調べた。まず、Thompson と同じ条件で実験をおこなったが、平均流が十分に加速されなかった。そこで水平粘性を加えると、平均流が十分に加速された。さらに、格子点数、摂動、粘性の条件を変化させて実験をおこなった。

# 目次

第 1 章	序論	3
1.1	研究の動機 . . . . .	3
1.2	スーパーローテーションとは . . . . .	4
1.3	Thompson (1970) のメカニズム . . . . .	5
1.4	本論文の構成 . . . . .	5
第 2 章	支配方程式	7
2.1	Boussinesq 方程式系の導出 . . . . .	7
2.2	Thompson(1970) における支配方程式系式の導出 . . . . .	11
第 3 章	数値計算法	19
3.1	差分法の種類 . . . . .	19
3.2	Arakawa Jacobian 法 . . . . .	21
3.3	Euler 法 . . . . .	26

卒業研究	目次	2
3.4	Runge-Kutta 法 . . . . .	26
3.5	Runge-Kutta-Gill 法 . . . . .	28
第 4 章	数値シミュレーション	30
4.1	実験条件 . . . . .	30
4.2	結果 . . . . .	31
第 5 章	結論	72
謝辞		73
参考文献		74

# 第 1 章

## 序論

### 1.1 研究の動機

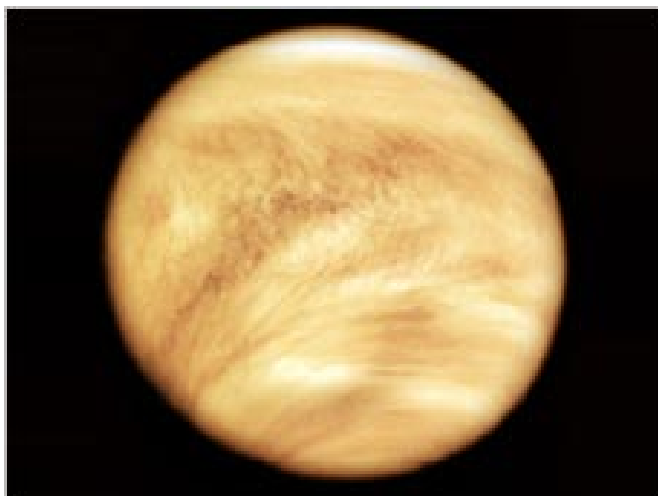


図 1.1.1 アメリカの「パイオニア」による撮影。(提供 : NASA/JPL) .

私は金星大気のスーパーローテーションに興味があり, そのメカニズムについて詳しく知るためにこれまで提唱されてきたうちのひとつである, Thompson(1970) でおこなっている夜昼間対流によるメカニズムのシミュレーションを再現することにした.

## 1.2 スーパーローテーションとは

### 1.2.1 金星について

金星は大きさも平均密度も地球と同じくらいであることから、2つの惑星は双子星と言われてきた。しかし、大気の状態に関しては金星は地球とかなり異なることが観測などにより明らかにされてきた。地球は自転周期が約1日であるのに対して、金星の自転周期は243日(日は地球日、以下同様)である。その自転は地球の自転と逆方向であり、公転の効果も考慮すると、金星の1太陽日(南中から南中までの時間)は117日になる。金星は自転が遅く、1昼夜も大変長い惑星であることになる。そして金星の地表面気圧は92気圧である。

金星大気でおこっている現象には主に3つの顕著な現象が知られている。一つめは地表面や下層大気の高温である。金星の地表面温度は約730Kもある。金星は地球よりも太陽に近いにもかかわらずアルベドが大きいので、太陽光の吸収は地球よりも小さい。それにもかかわらず地表面で高温が維持されているのは、膨大な量の二酸化炭素による温室効果の結果である。二つめは約45~70kmに全天を完全に覆っている雲が存在していることである。この雲は濃硫酸の液滴から成っているが、この雲層が存在することにより太陽光は78%反射され残りも大部分雲層で吸収されてしまう。そのため地表面や下層大気が外から見えなくなっている。三つめの現象が本論文で取り扱うスーパーローテーションである。紫外線で雲を見ると、Y字型を横倒ししたような模様が見える。この模様が4日で金星を一周することが地上からの観測により1960年代に発見された。その後の多くの金星探査機により、風速の鉛直分布が得られた。風光はすべて西向き(東風)で、金星の自転と同方向である。雲頂、高度70km付近では風速は100m/sに達し、金星を約4日で一周することが分かる。金星の自転周期が243日であることから、固体部分の60倍で大気が自転していることになる。これが金星大気のスーパーローテーション(超回転)である。力学的にも気象学的にも大変不思議な現象として考えられてきたが、いまだメカニズムについては議論がおこなわれている。

### 1.2.2 スーパーローテーション生成のいろいろなメカニズム

スーパーローテーションの生成メカニズムは、夜昼間対流によるメカニズム、子午面循環によるメカニズム、重力波によるメカニズムの3つのものが提唱されている。金星は自転も、地面から見た太陽の動きも非常に遅いので、第1次近似としてこれらを見做すと、昼側で温度が高く夜側で温度が低い状態が予想される。この温度分布では昼側で空気が上昇し夜側に向かい、夜側で下降し昼側に戻るような夜昼間対流の存在が期待される。したがってこの対流を前提してスーパーローテーションを導き出そうとするのは自然な発想だろう (松田, 2000)。そこでいくつかの試みがなされたが、ここではその1つである Thompson(1970) のメカニズムを取り上げることにした。

## 1.3 Thompson (1970) のメカニズム

本研究で取り上げた Thompson (1970) のメカニズムについてまとめる。Thompson は対流セルの不安定性によって、夜昼間対流の軸が傾き平均東西流が生成されると提唱した。彼は赤道上の鉛直2次元でのみ議論している。太陽が静止していて、対流が傾いていない状態を基本場としてまず考える (図 1.3.2)。そこに摂動を与えて対流を傾けると、運動量の輸送が起こり平均東西流が生成される。生成された平均東西流によって対流セルはますます同じ方向に傾く (図 1.3.3)。これにより運動量が輸送され、平均東西流もますます加速される。このようにしてスーパーローテーションを説明しようというメカニズムである。

## 1.4 本論文の構成

本論文の構成は以下の通りである。本章である第1章は序章である。第2章では、Boussinesq 流体の方程式系や Thompson(1970) で用いている支配方程式の導出をおこなう。第3章では、本研究に用いる数値計算法について紹介する。第4章では、実験の結果を述べる。第5章は本論文の結論である。



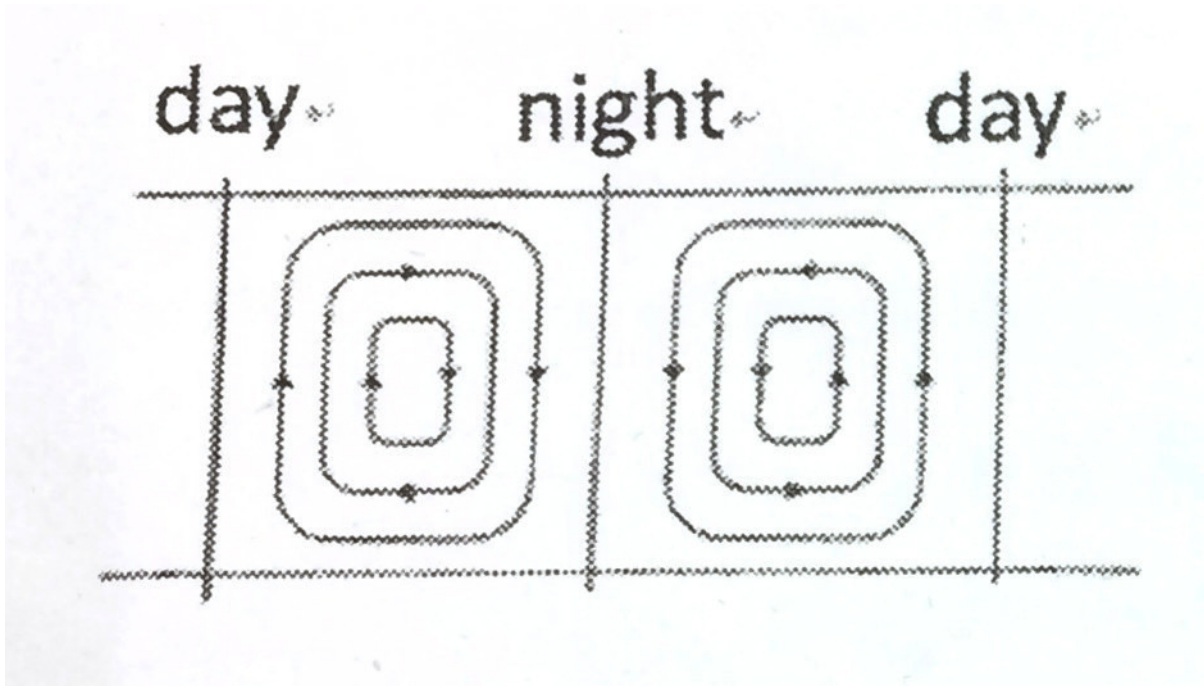


図 1.3.2 Thompson (1970) のメカニズムの概略図. 摂動を与える前.

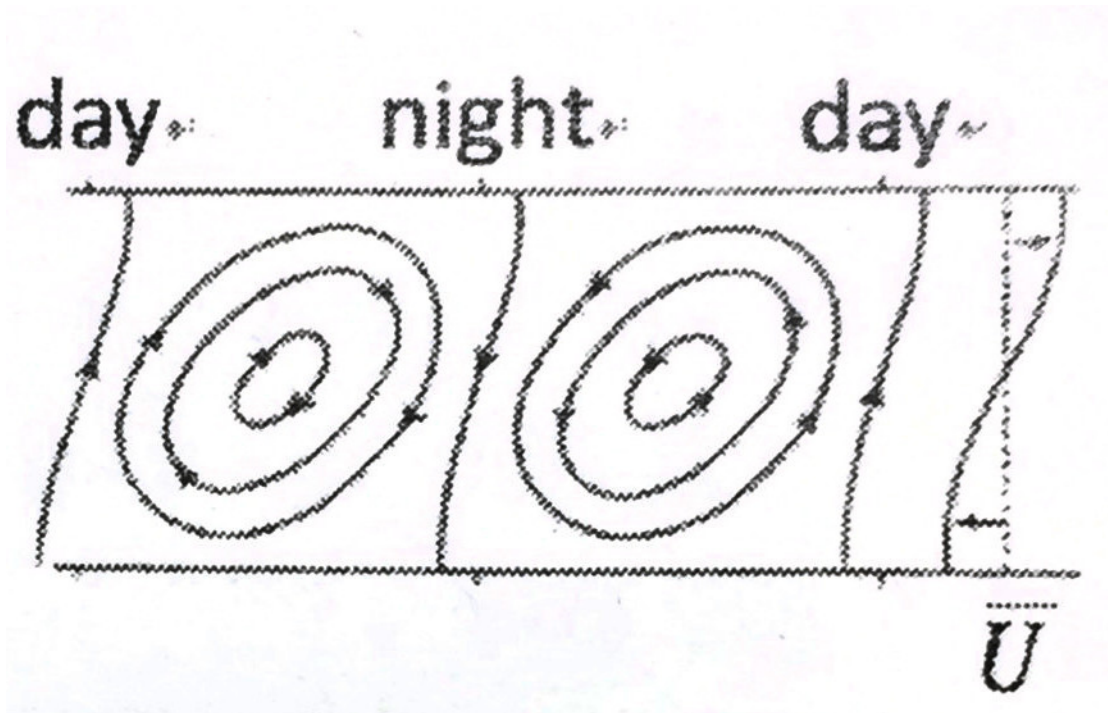


図 1.3.3 Thompson (1970) のメカニズムの概略図. 摂動を与えて対流セルが傾いた状態.

## 第 2 章

# 支配方程式

### 2.1 Boussinesq 方程式系の導出

#### 2.1.1 Boussinesq 流体とは

一般の状態方程式は密度  $\rho$ , 圧力  $P$ , 温度  $T$  との関係として  $\rho = \rho(P, T)$  と書ける. ある基礎状態からのズレが基準状態に比べて小さいとする. 状態方程式を基準状態の周りで Taylor 展開して, 展開の 1 次の項までをとる:

$$\rho = \rho(P_R, T_R) + \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T (P - P_R) + \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P (T - T_R) + \dots \quad (2.1.1)$$

基準状態は添字  $R$  を使って表した.

次に非圧縮であるとして,

$$\frac{1}{\rho_R} \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T = 0 \quad (2.1.2)$$

が成り立つとすると,

$$\rho = \rho(P_R, T_R)[1 - \alpha(T - T_R)] \quad (2.1.3)$$

$$\alpha \equiv -\frac{1}{\rho_R} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \quad (2.1.4)$$

を得る。(2.1.3)の状態方程式に従う流体は Boussinesq 流体と呼ばれる。基準状態からのズレが小さく、音波が重要でない現象に対しては流体を Boussinesq 流体として扱う。ここで  $\alpha$  は体積膨張率である。また  $\rho - \rho_R \equiv \rho', T - T_R \equiv T'$  とする。

## 2.1.2 Boussinesq 流体における基礎方程式

### 連続の式

一般的には,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \text{ 又は } \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.1.5)$$

であるが、非圧縮なので,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.1.6)$$

となる。

### 運動方程式

Newton 流体とは、応力テンソルが速度勾配テンソルの 1 次までで表現できる流体で、水や空気はそのような法則に従っていることが知られている。非圧縮条件(2.1.6)をみたすとき、Navier-Stokes 方程式と呼ばれるこの流体の運動方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g} \quad (2.1.7)$$

である。ここで  $\mathbf{g}$  は  $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$  と表され、 $g$  は重力加速度、 $\mathbf{k}$  は鉛直方向の単位ベクトルである。基準状態を静止、定常状態とすると (2.1.7) は  $\mathbf{v} = 0$  より、

$$0 = -\frac{1}{\rho_R} \nabla P_R + \mathbf{g}. \quad (2.1.8)$$

これは静水圧平衡と呼ばれている。また、

$$\frac{1}{\rho} \nabla P = \frac{1}{\rho_R + \rho'} \nabla (P_R + P') \quad (2.1.9)$$

$$= \frac{1}{\rho_R} \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_R}\right)^{-1} \nabla (P_R + P') \quad (2.1.10)$$

$$= \frac{1}{\rho_R} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_R} + \dots\right) \nabla (P_R + P') \quad (2.1.11)$$

$$\simeq \frac{1}{\rho_R} \nabla P_R + \frac{1}{\rho_R} \nabla P' - \frac{\rho'}{\rho_R} \left(\frac{1}{\rho_R} \nabla P_R\right) \quad (2.1.12)$$

と変形できる. (2.1.10) から (2.1.12) への変形には二項展開を用いた. さらに最後の表式では  $\rho_R \gg \rho'$  を用いた. これより (2.1.7) は,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_R} \nabla P_R - \frac{1}{\rho_R} \nabla P' + \frac{\rho'}{\rho_R} \left( \frac{1}{\rho_R} \nabla P_R \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g} \quad (2.1.13)$$

となる. 静水圧平衡 (2.1.8) を使うと,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_R} \nabla P' + \frac{\rho'}{\rho_R} \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2.1.14)$$

である. 状態方程式 (2.1.3) を用いると,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_R} \nabla P' - \alpha T' \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2.1.15)$$

を得る.  $z$  成分だけ見ると,

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla w = -\frac{1}{\rho_R} \frac{\partial P}{\partial z} + \alpha g T' + \nu \nabla^2 w \quad (2.1.16)$$

である \*1.

### 熱力学方程式

熱力学方程式は一般に,

$$C_v \frac{DT}{Dt} + \frac{P}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} = H + \kappa \nabla^2 T \quad (2.1.17)$$

と書ける.  $c_v, H, \kappa$  はそれぞれ定積比熱, 加熱率, 熱拡散率である. 基準状態 (静止, 定常状態) は水平方向に一様であるから, (2.1.17) は,

$$0 = \kappa \nabla^2 T_R \quad (2.1.18)$$

となる.  $z$  方向に注目すると,

$$\kappa \frac{d^2}{dT_R^2} z = 0 \quad (2.1.19)$$

となるので,  $T_R$  は  $z$  の一次関数であり,

$$T_R = T_0 - \Gamma z \quad (2.1.20)$$

\*1 (2.1.16) 中の  $\alpha g T'$  は浮力項である. 例えば  $T > 0$  (基準よりもあたたかい流体) のとき, 流体粒子を鉛直方向に加速する作用を持つことがわかる.

と表現しておく. ここで  $\Gamma$  は温度減率である. (2.1.20) と非圧縮条件 (2.1.6) より, (2.1.17) は

$$C_v \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (T_R + T') + \mathbf{v} \cdot \nabla (T_R + T') \right\} = H + \kappa \nabla^2 (T_R + T') \quad (2.1.21)$$

$$C_v \left( \frac{\partial T'}{\partial t} + w \frac{dT_R}{dz} + \mathbf{v} \cdot \nabla T' \right) = H + \kappa \nabla^2 T' \quad (2.1.22)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T' - \Gamma w = H + \frac{\kappa}{C_v} \nabla^2 T' \quad (2.1.23)$$

(2.1.23) が Boussinesq 流体の熱力学方程式である.

### まとめ

以上をまとめると, Boussinesq 流体の状態方程式, 連続の式, 運動方程式, 熱力学方程式, 基準状態のみたす式は, それぞれ以下の通りである:

状態方程式

$$\rho' = -\alpha \rho_R T' \quad (2.1.24)$$

連続の式

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.1.25)$$

運動方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_R} \nabla P' - \alpha T' \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2.1.26)$$

熱力学の式

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T' - \Gamma w = H + \frac{\kappa}{C_v} \nabla^2 T' \quad (2.1.27)$$

基準状態のみたす式

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho_R} \nabla P_R + \mathbf{g} = 0 \\ T_R = T_0 - \Gamma z \end{cases} \quad (2.1.28)$$

## 2.2 Thompson(1970) における支配方程式系式の導出

### 2.2.1 基礎方程式

2次元 ( $x, z$  平面) で現象を考える. また, 鉛直方向は静水圧平衡の状態である. 連続の式, 運動方程式はそれぞれ以下の通りである.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.2.29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \text{ 成分: } \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_R} \frac{\partial P'}{\partial x} + \nu_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \nu_H \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ z \text{ 成分: } 0 = -\frac{1}{\rho_R} \frac{\partial P'}{\partial z} - \alpha g T'. \end{array} \right. \quad (*1)$$

ここで,  $\rho, u, w$  はそれぞれ密度,  $x, z$  方向の速度,  $P', T'$  は圧力と温度の摂動である. ここで, (\*1) の右辺の第二項に乱流が起こす粘性作用, 渦粘性を使用し, 分子粘性の項を小さいとして無視した.  $\nu$  は渦粘性係数である. また,  $\mathbf{g}$  は鉛直下向きであり, 静水圧平衡から流速がゼロであることを用いた.

熱力学方程式は,

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + u \frac{\partial T'}{\partial x} + w \frac{\partial T'}{\partial z} - \Gamma w = H + \kappa_v \left( \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} \right) + \kappa_H \left( \frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} \right) \quad (2.2.30)$$

である. (2.2.30) の右辺第二項では, 渦熱拡散係数を使用し, 分子粘性の項を小さいとして無視した. 未知変数は,  $u, w, P', T'$  の4つである.

Thompson(1970) の第三節では, 基礎方程式系は,

$$\left. \begin{array}{rcl} u_t + uu_x + wu_z & = & -Gp_x + E_v u_{zz} + E_H u_{xx} \\ T_t + uT_x + wT_z + \Gamma w & = & H + K_v T_{zz} + K_H T_{xx} \\ u_x + w_z & = & 0 \\ 0 & = & -p_z + T \end{array} \right\} \quad (1)$$

であり, (1) の第三式の非圧縮条件等を使って,

$$\left. \begin{array}{rcl} \Psi_{zzt} + J(\Psi, \Psi_{zz}) & = & GT_x + E_v \Psi_{zzzz} + E_H \Psi_{xxzz} \\ T_t + J(\Psi, T) & = & H + K_v T_{zz} + K_H T_{xx} - \Gamma \Psi_x \end{array} \right\} \quad (2)$$

と書き換えている. (1) から (2) への変形を我々の flame work でおこなう. 流れ関数  $\Psi$  を導入する.  $\Psi$  は, スカラーであり以下の式をみたす.

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}, w = \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (2.2.31)$$

上式は連続の式をみたすので, 未知変数の数を減らすことができる. まず (\*1) を  $z$  で偏微分して, (2.2.30) を用いると,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) + w \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho_R} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial P'}{\partial z} \right) + \nu \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (2.2.32)$$

となる. また (\*2) を  $x$  で偏微分すると,

$$0 = -\frac{1}{\rho_R} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial P'}{\partial z} \right) - \alpha g \frac{\partial T'}{\partial x} \quad (2.2.33)$$

上式を (2.2.32) に代入すると,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) + w \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \alpha g \frac{\partial T'}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (2.2.34)$$

$\Psi$  を使うと, (2.2.34) は

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) = -\alpha g \frac{\partial T'}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) \quad (2.2.35)$$

となる. ここで Jacobian を使うと,

$$J \left( \Psi, \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) = -\frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) \quad (2.2.36)$$

であるから, (2.2.35) は,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) + J \left( \Psi, \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) = -\alpha g \frac{\partial T'}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right). \quad (2.2.37)$$

以上をまとめると, Thompson(1970) で扱う基礎方程式系はそれぞれ以下の通りである:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) + J \left( \Psi, \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) = -\alpha g \frac{\partial T'}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) \quad (2.2.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} T' + J \left( \Psi, \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) - \Gamma w = H + \kappa \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} \quad (2.2.39)$$

また未知変数は,  $\Psi, T'$  の 2 つである. (2.2.38) は  $x$  方向の運動方程式を  $z$  で偏微分したものから,  $z$  方向の運動方程式を  $x$  で偏微分したものを引いた結果である.  $y$  方向を軸方向とした渦度に関する方程式 (渦度方程式) と呼ばれる\*2.

### 2.2.2 平均流の運動方程式

(1) 式の 1 つめの式と, 連続の式より

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -G \frac{\partial P}{\partial x} + E \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} & (2.2.40) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 & (2.2.41) \end{cases}$$

これらより,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial z}(uw) = -G \frac{\partial P}{\partial x} + E \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2.2.42)$$

ここで, 緯度円 (長さ  $L$ ) にわたるある物理量  $A$  の平均値を  $\bar{A}$  と表す:

$$\bar{A} = \frac{1}{L} \int_0^L A dx. \quad (2.2.43)$$

さらに, 流速を平均場とそれからのズレに分解する:

$$u = \bar{u} + u', \quad (2.2.44)$$

$$w = w'. \quad (2.2.45)$$

(2.2.44), (2.2.45) より,  $\overline{u'} = \overline{w'} = 0$  であることに注意する. (2.2.40) は,

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{u} + \frac{\partial}{\partial t} u' = -\frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}\bar{u} + 2\bar{u}u' + u'u') - \frac{\partial}{\partial z} (\bar{u}w' + u'w') - G \frac{\partial P}{\partial x} + E \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} + E \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} \quad (2.2.46)$$

となる. ここである物理量  $A$  の  $x$  微分を平均すると,

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial A}{\partial x}} &= \frac{1}{L} \int_0^L \frac{\partial A}{\partial x} dx \\ &= \frac{1}{L} \{A(L) - A(0)\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.47)$$

\*2 Thompson の論文中には水平粘性の項が書かれていないが, ここでは記述しておくことにする.



であることを用いて, (2.2.46) の両辺を  $x$  方向に平均すると,

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{u} = -\frac{\partial}{\partial z} \overline{u'w'} + E \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}, \quad (2.2.48)$$

を得る. (2.2.48) は平均流  $\bar{u}$  に関する運動方程式である. 平均流は右辺第一項の運動量フラックスの収束と第二項の渦粘性の作用により変化する.

### 2.2.3 (1) 式の導入

特徴的な  $u$  のスケールを  $U$ , スケールされた新しい  $u$  の変数 (無次元) を  $u_*$  として他の変数に対しても同様に表すと以下のようになる:

$$\begin{aligned} u &= U u_*, \\ w &= W w_*, \\ t &= \mathcal{T} t_*, \\ x &= L x_*, \\ z &= D z_*, \\ T &= \Delta T T_*, \\ P &= \tilde{P} p_* \end{aligned}$$

これらを支配方程式に代入する. 静水圧平衡の式 (\*2) より,

$$0 = -\frac{1}{\rho_R} \frac{\tilde{P}}{D} \frac{\partial p_*}{\partial z_*} - \alpha g \Delta T T.$$

上式から,

$$\frac{\tilde{P}}{\rho_R} = g D \Delta T \alpha$$

を得る.  $\alpha$  を  $T_0^{-1}$  と見積もると, 圧力のスケール  $\tilde{P}$  は,

$$\frac{\tilde{P}}{\rho_R} = \frac{g D \Delta T}{T_0}$$

となる. これを静水圧平衡の式に代入する:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho_R} \frac{\partial P'}{\partial z} + \alpha g T' &= 0, \\ -\frac{1}{D} \frac{g D \Delta T}{T_0} \frac{\partial P}{\partial z_*} + \alpha g \Delta T T_* &= 0, \\ -\frac{\partial P}{\partial z_*} + T &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.49)$$

連続の式より,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{U}{L} \frac{\partial u_*}{\partial x_*} + \frac{W}{D} \frac{\partial w_*}{\partial z_*} &= 0. \end{aligned}$$

各項の大きさが等しいので,

$$\begin{aligned} \frac{U}{L} &= \frac{W}{D} \\ W &= \frac{U}{L} D \end{aligned}$$

となり,  $W$  のスケールが求まる. また,

$$\frac{\partial u_*}{\partial x_*} + \frac{\partial w_*}{\partial z_*} = 0. \quad (2.2.50)$$

次に,  $x$  方向の運動方程式に代入すると以下ようになる:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho_R} \frac{\partial P'}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ \frac{U}{T} \frac{\partial u_*}{\partial t_*} + \frac{U^2}{L} u_* \frac{\partial u_*}{\partial x_*} + \frac{WU}{D} w_* \frac{\partial u_*}{\partial z_*} &= -\frac{g D \Delta T}{T_0 L} \frac{\partial P}{\partial x_*} + \frac{U \nu}{D^2} \frac{\partial^2 u_*}{\partial z_*^2}, \\ \frac{\partial u_*}{\partial t_*} + u_* \frac{\partial u_*}{\partial x_*} + w_* \frac{\partial u_*}{\partial z_*} &= -\frac{g D \Delta T}{T_0} \frac{L}{U^2} \frac{\partial P}{\partial x_*} + \frac{U \nu}{D^2} \frac{L}{U^2} \frac{\partial^2 u_*}{\partial z_*^2}, \\ &= -G \frac{\partial P_*}{\partial x_*} + E \frac{\partial^2 u_*}{\partial z_*^2}. \end{aligned} \quad (2.2.51)$$

ここで  $\mathcal{T} = \frac{L}{U}$ ,  $G = \frac{gD\Delta T}{T_0U^2}$ ,  $E = \frac{\nu\mathcal{T}}{D^2}$  とした. 最後に熱力学方程式に代入する:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial T'}{\partial t} + u \frac{\partial T'}{\partial x} + w \frac{\partial T'}{\partial z} - \Gamma w = J + \kappa \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2}, \\
& \frac{\Delta T}{\mathcal{T}} \frac{\partial T_*}{\partial t_*} + \frac{U\Delta T}{L} u_* \frac{\partial T_*}{\partial x_*} + \frac{W\Delta T}{D} w_* \frac{\partial T_*}{\partial z_*} - \Gamma W w_* = \dot{j} + \frac{\Delta T \kappa}{D^2} \frac{\partial^2 T_*}{\partial z_*^2}, \\
& \frac{\partial T_*}{\partial t_*} + u_* \frac{\partial T_*}{\partial x_*} + w_* \frac{\partial T_*}{\partial z_*} - \frac{\Gamma W L}{\Delta T U} w_* = \frac{L \dot{j}}{U \Delta T} + \frac{\kappa}{D^2} \frac{L}{U} \frac{\partial^2 T_*}{\partial z_*^2}, \\
& \frac{\partial T_*}{\partial t_*} + u_* \frac{\partial T_*}{\partial x_*} + w_* \frac{\partial T_*}{\partial z_*} - \Gamma w_* = H + K \frac{\partial^2 T_*}{\partial z_*^2}. \quad (2.2.52)
\end{aligned}$$

ここで  $\frac{\Gamma D}{\Delta T U} = \Gamma$ ,  $\frac{L \dot{j}}{U \Delta T} = H$ ,  $\frac{\kappa \mathcal{T}}{D^2} = K$  とした\*3.

(2.2.51), (2.2.52), (2.2.50), (2.2.49) より (1) 式が導出できた.

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{\partial u_*}{\partial t_*} + u_* \frac{\partial u_*}{\partial x_*} + w_* \frac{\partial u_*}{\partial z_*} &= -G \frac{\partial p_*}{\partial x_*} + E \frac{\partial^2 u_*}{\partial z_*^2} \\
& \frac{\partial T_*}{\partial t_*} + u_* \frac{\partial T_*}{\partial x_*} + w_* \frac{\partial T_*}{\partial z_*} - \Gamma w_* &= H + K \frac{\partial^2 T_*}{\partial z_*^2} \\
& \frac{\partial u_*}{\partial x_*} + \frac{\partial w_*}{\partial z_*} &= 0 \\
& -\frac{\partial P_*}{\partial z_*} + T &= 0
\end{aligned} \right\} \quad (2.2.53)$$

$$\left. \begin{aligned}
& u_t + uu_x + ww_z &= -Gp_x + Eu_{zz} \\
& T_t + uT_x + wT_z + \Gamma w &= H + KT_{zz} \\
& u_x + w_z &= 0 \\
& 0 &= -p_z + T
\end{aligned} \right\} \quad (1)$$

\*3 Thompson はおそらく  $-\frac{\Gamma D}{\Delta T U} = \Gamma$  としたので符号が異なっている.

### 2.2.4 エネルギー方程式の導出

ここで考察している系のエネルギー方程式を導出する．まず  $u$  と  $x$  方向の運動方程式をかける：

$$u \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = u \left( G \frac{\partial p}{\partial x} \right) + E u u_{zz},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} u^2 \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} u^2 \right) + w \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} u^2 \right) = -G \frac{\partial}{\partial x} (p u) + G p \frac{\partial u}{\partial x} + E u u_{zz}.$$

連続の式  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$  を用いると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} u^2 \right) + \nabla \cdot \left\{ \left( \frac{1}{2} u^2 \right) \mathbf{v} \right\} + G \frac{\partial}{\partial x} (p u) = G p \frac{\partial u}{\partial x} + E u u_{zz}. \quad (2.2.54)$$

次に  $w$  と  $z$  方向の運動方程式をかける：

$$0 = w \left( -\frac{\partial p}{\partial z} + T \right)$$

$$0 = -w \frac{\partial p}{\partial z} + w T$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial z} (p w) + p \frac{\partial w}{\partial z} + w T \quad (2.2.55)$$

(2.2.54)+ $G$ (2.2.55) とすると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} u^2 \right) + \nabla \cdot \left\{ \left( \frac{1}{2} u^2 + G p \right) \mathbf{v} \right\} = G w T + E u u_{zz}. \quad (2.2.56)$$

(2.2.50) =  $T \times$  (熱力学方程式) とすると、再び連続の式を使って、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} T^2 \right) + \nabla \cdot \left( \frac{1}{2} T^2 \mathbf{v} \right) - \Gamma w T = H T + \kappa T T_{zz}$$

を得る．

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} u^2 \Gamma - \frac{1}{2} T^2 G \right) + \nabla \cdot \left[ \left\{ \left( \frac{1}{2} u^2 + G p \right) \Gamma - \frac{1}{2} T^2 G \right\} \mathbf{v} \right] = H T + \kappa T T_{zz} + E u u_{zz} \quad (2.2.57)$$

$$\xi \equiv \frac{1}{2}(\Gamma u^2 - GT^2) \quad \text{:エネルギー密度}$$

$$\mathcal{E} = \int \int \frac{1}{2}(\Gamma u^2 - GT^2) dx dz \quad \text{:全エネルギー}$$

$H = K = E = 0$  のとき (2.2.57) を全領域で積分する:

$$\frac{d}{dt}E + \int \int dx dz \nabla \cdot (\tilde{E}\mathbf{v}) = 0$$

$$\tilde{E} = \frac{1}{2}(\Gamma u^2 - GT^2) + G(\Gamma p)$$

ガウスの発散定理を用いると,

$$\int \int dx dz \nabla \cdot (\tilde{E}\mathbf{v}) = \int \tilde{E}\mathbf{v} d\mathbf{S} = 0. \quad (2.2.58)$$

最後の表式は  $x$  方向に周期境界条件, 領域の上下端 ( $z = 0, \pi$ ) で  $w = 0$  の条件から得られる. よって, 全エネルギーは保存する:

$$\frac{dE}{dt} = 0.$$

## 第 3 章

# 数値計算法

### 3.1 差分法の種類

数値計算では無限小を扱うことが出来ないので、微分を差分で近似する。素朴な差分近似の方法には、前方差分、後方差分、中央差分の 3 つがある。ここでは、

$$f'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (3.1.1)$$

を例として考える。Taylor の定理より、

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{1}{2!}f''(x)(\Delta x)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(x)(\Delta x)^3 + \dots \quad (3.1.2)$$

$$f(x - \Delta x) = f(x) - f'(x)\Delta x + \frac{1}{2!}f''(x)(\Delta x)^2 - \frac{1}{3!}f^{(3)}(x)(\Delta x)^3 + \dots \quad (3.1.3)$$

となる。

前方差分

(3.1.2) より、

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f''(x)\frac{\Delta x}{2!} - f^{(3)}(x)\frac{(\Delta x)^2}{3!} - f^{(4)}(x)\frac{(\Delta x)^3}{4!} - \dots \quad (3.1.4)$$

$$\simeq \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (3.1.5)$$

と近似する. ここで (3.1.5) の近似には  $|\Delta x| \ll 1$  であるという条件を用いた. この差分法ではある格子点における微分値の評価に, その格子点値とその前方の格子点値を用いるやり方で前方差分とよばれる. この差分法の近似の精度を吟味する. 差分近似した式 (3.1.5) から微分式 (3.1.4) を引いたものを切断誤差  $\epsilon$  とよぶ. 前方差分の切断誤差は,

$$\epsilon = f''(x) \frac{\Delta x}{2!} + f^{(3)}(x) \frac{(\Delta x)^2}{3!} + f^{(4)}(x) \frac{(\Delta x)^3}{4!} + \dots \quad (3.1.6)$$

となり, 差分近似の精度を切断誤差  $\epsilon$  における  $\Delta x$  の最低次数とすると, 前方差分近似の精度は  $\mathcal{O}(\Delta x)$  である.

#### 後方差分

(3.1.3) より,

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + f''(x) \frac{\Delta x}{2!} - f^{(3)}(x) \frac{(\Delta x)^2}{3!} + f^{(4)}(x) \frac{(\Delta x)^3}{4!} - \dots \quad (3.1.7)$$

$$\simeq \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (3.1.8)$$

と近似する. つまりこの差分法ではある格子点における微分値の評価に, その格子点値とその後方の格子点値を用いるやり方で後方差分とよばれる. この近似の切断誤差  $\epsilon$  は,

$$\epsilon = -f''(x) \frac{\Delta x}{2!} - f^{(3)}(x) \frac{(\Delta x)^2}{3!} - f^{(4)}(x) \frac{(\Delta x)^3}{4!} + \dots \quad (3.1.9)$$

となるので, 後方差分近似の精度は  $\mathcal{O}(\Delta x)$  となる.

#### 中央差分

(3.1.2) から (3.1.3) をひき,  $2\Delta x$  で割り, 整理して,

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} - f^{(3)}(x) \frac{(\Delta x)^2}{3!} - f^{(5)}(x) \frac{(\Delta x)^4}{5!} - \dots \quad (3.1.10)$$

$$\simeq \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (3.1.11)$$

と近似する. このようにある格子点における微分値の評価にその格子点の両側の格子点値を用いる方法を中央差分という. 切断誤差  $\epsilon$  は,

$$\epsilon = f^{(3)}(x) \frac{(\Delta x)^2}{3!} + f^{(5)}(x) \frac{(\Delta x)^4}{5!} + \dots \quad (3.1.12)$$

となるので, 中央差分近似の精度は  $\mathcal{O}(\Delta x^2)$  となる.

以上より,  $|\Delta x| \ll 1$  のとき, 中央差分近似の誤差がもっとも精度が良いことがわかる. よって本研究では偏微分方程式を解く際の空間に関する微分に中央差分を用いた.

## 3.2 Arakawa Jacobian 法

この研究で解いている方程式系 (2.2.35), (2.2.38) には Jacobian が含まれている. Jacobian は,

$$\int_S aJ(a, b)dx dy = 0 \quad (3.2.13)$$

$$\int_S bJ(a, b)dx dy = 0 \quad (3.2.14)$$

を満足するという性質があるので, 数値計算においても支配方程式系を離散化<sup>\*1</sup>したときに (3.2.13), (3.2.14) に相当する式が満たされている必要がある. (2.2.38) の渦度方程式を再掲する:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) + J(\Psi, \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}) = -\alpha g \frac{\partial T'}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) \quad (3.2.15)$$

(3.2.15) の移流項を,

$$\begin{aligned} J(\Psi, \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}) &= J(\Psi, \eta) = \frac{1}{3} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \\ &+ \frac{1}{3} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \Psi \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \Psi \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \right] \\ &+ \frac{1}{3} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

<sup>\*1</sup> 離散化とは, もともと連続であるべき  $t$  をとびとびの値  $t_0, t_1, \dots, t_n$  にとり, 微分を,

$$\left( \frac{dx}{dt} \right)_{t=t_k} \doteq \frac{x_{h+1} - x_k}{h}$$

のような差分商でおきかえることである.



と変形する. ここで  $\eta \equiv \partial^2 \Psi / \partial z^2$  と定義した. そして (3.2.16) の右辺の項で,

$$\begin{aligned} J_{i,j}^L &= \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ J_{i,j}^C &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \Psi \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \Psi \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \\ J_{i,j}^R &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

とにおいてそれぞれ中央差分で近似したものを  $\tilde{J}_{i,j}^L, \tilde{J}_{i,j}^C, \tilde{J}_{i,j}^R$  とすると,

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{i,j}^L &= \frac{1}{4\Delta x \Delta z} [(\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j})(\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j-1}) - (\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1})(\eta_{i+1,j} - \eta_{i-1,j})] \\ \tilde{J}_{i,j}^C &= \frac{1}{4\Delta x \Delta z} [\Psi_{i+1,j}(\eta_{i+1,j+1} - \eta_{i+1,j-1}) - \Psi_{i-1,j}(\eta_{i-1,j+1} - \eta_{i-1,j-1}) \\ &\quad - \Psi_{i,j+1}(\eta_{i+1,j+1} - \eta_{i-1,j+1}) + \Psi_{i,j-1}(\eta_{i+1,j-1} - \eta_{i-1,j-1})] \\ \tilde{J}_{i,j}^R &= \frac{1}{4\Delta x \Delta z} [\eta_{i,j+1}(\Psi_{i+1,j+1} - \Psi_{i-1,j+1}) - \eta_{i,j-1}(\Psi_{i+1,j-1} - \Psi_{i-1,j-1}) \\ &\quad - \eta_{i+1,j}(\Psi_{i+1,j+1} - \Psi_{i+1,j-1}) + \eta_{i-1,j}(\Psi_{i-1,j+1} - \Psi_{i-1,j-1})] \end{aligned}$$

となる. そして (3.2.16) より,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} \approx \frac{1}{3} \left( \tilde{J}_{i,j}^L + \tilde{J}_{i,j}^C + \tilde{J}_{i,j}^R \right) \quad (3.2.17)$$

と近似する. 以上の方法が Arakawa Jacobian 法である.

この方法が本当に (3.2.13) と (3.2.14) をみたしているか確かめてみる. まず (3.2.13) について確認する.

$$\int \int \psi \frac{\partial \eta}{\partial t} dx dz + \int \int \psi \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) dx dz = 0 \quad (3.2.18)$$

(3.2.18) の左辺第 2 項は,

$$\int \int \Psi \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) dx dz \simeq \sum_{i,j} \Psi_{i,j} \frac{1}{3} \left( \tilde{J}_{i,j}^L + \tilde{J}_{i,j}^C + \tilde{J}_{i,j}^R \right) \quad (3.2.19)$$

と変形できる.  $\Psi_{i,j} \tilde{J}_{i,j}^L$ ,  $\Psi_{i,j} \tilde{J}_{i,j}^C$ ,  $\Psi_{i,j} \tilde{J}_{i,j}^R$  に  $4\Delta x \Delta z$  をかけると, それぞれ,

$$\begin{aligned}
(4\Delta x \Delta z) \Psi_{i,j} \tilde{J}_{i,j}^L &= \Psi_{i,j} (\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j}) (\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j-1}) \\
&\quad - \Psi_{i,j} (\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}) (\eta_{i+1,j} - \eta_{i-1,j}) \\
&= \Psi_{i,j} \Psi_{i+1,j} \eta_{i,j+1} - \Psi_{i,j} \Psi_{i-1,j} \eta_{i,j-1} \\
&\quad - \Psi_{i,j} \Psi_{i-1,j} \eta_{i,j+1} + \Psi_{i,j} \Psi_{i-1,j} \eta_{i,j-1} \\
&\quad - \Psi_{i,j} \Psi_{i,j+1} \eta_{i+1,j} + \Psi_{i,j} \Psi_{i,j+1} \eta_{i-1,j} \\
&\quad + \Psi_{i,j} \Psi_{i,j-1} \eta_{i+1,j} - \Psi_{i,j} \Psi_{i,j-1} \eta_{i-1,j}
\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

$$\begin{aligned}
(4\Delta x \Delta z) \Psi_{i,j} \tilde{J}_{i,j}^C &= \Psi_{i,j} \Psi_{i+1,j} (\eta_{i+1,j+1} - \eta_{i+1,j-1}) - \Psi_{i,j} \Psi_{i-1,j} (\eta_{i-1,j+1} - \eta_{i-1,j-1}) \\
&\quad - \Psi_{i,j} \Psi_{i,j+1} (\eta_{i+1,j+1} - \eta_{i-1,j+1}) + \Psi_{i,j} \Psi_{i,j-1} (\eta_{i+1,j-1} - \eta_{i-1,j-1}) \\
&= \Psi_{i,j} \Psi_{i+1,j} \eta_{i+1,j+1} - \Psi_{i,j} \Psi_{i+1,j} \eta_{i+1,j-1} \\
&\quad - \Psi_{i,j} \Psi_{i-1,j} \eta_{i-1,j+1} + \Psi_{i,j} \Psi_{i-1,j} \eta_{i-1,j-1} \\
&\quad - \Psi_{i,j} \Psi_{i,j+1} \eta_{i+1,j+1} + \Psi_{i,j} \Psi_{i,j+1} \eta_{i-1,j+1} \\
&\quad + \Psi_{i,j} \Psi_{i,j-1} \eta_{i+1,j-1} - \Psi_{i,j} \Psi_{i,j-1} \eta_{i-1,j-1}
\end{aligned} \tag{3.2.21}$$

$$\begin{aligned}
(4\Delta x \Delta z) \Psi_{i,j} \tilde{J}_{i,j}^R &= \Psi_{i,j} \eta_{i,j+1} (\Psi_{i+1,j+1} - \Psi_{i-1,j+1}) - \Psi_{i,j} \eta_{i,j-1} (\Psi_{i+1,j-1} - \Psi_{i-1,j-1}) \\
&\quad - \Psi_{i,j} \eta_{i+1,j} (\Psi_{i+1,j+1} - \Psi_{i+1,j-1}) + \Psi_{i,j} \eta_{i-1,j} (\Psi_{i-1,j+1} - \Psi_{i-1,j-1}) \\
&= \Psi_{i,j} \eta_{i,j+1} \Psi_{i+1,j+1} - \Psi_{i,j} \eta_{i,j+1} \Psi_{i-1,j+1} \\
&\quad - \Psi_{i,j} \eta_{i,j-1} \Psi_{i+1,j-1} + \Psi_{i,j} \eta_{i,j-1} \Psi_{i-1,j-1} \\
&\quad - \Psi_{i,j} \eta_{i+1,j} \Psi_{i+1,j+1} + \Psi_{i,j} \eta_{i+1,j} \Psi_{i+1,j-1} \\
&\quad + \Psi_{i,j} \eta_{i-1,j} \Psi_{i-1,j+1} - \Psi_{i,j} \eta_{i-1,j} \Psi_{i-1,j-1}
\end{aligned} \tag{3.2.22}$$

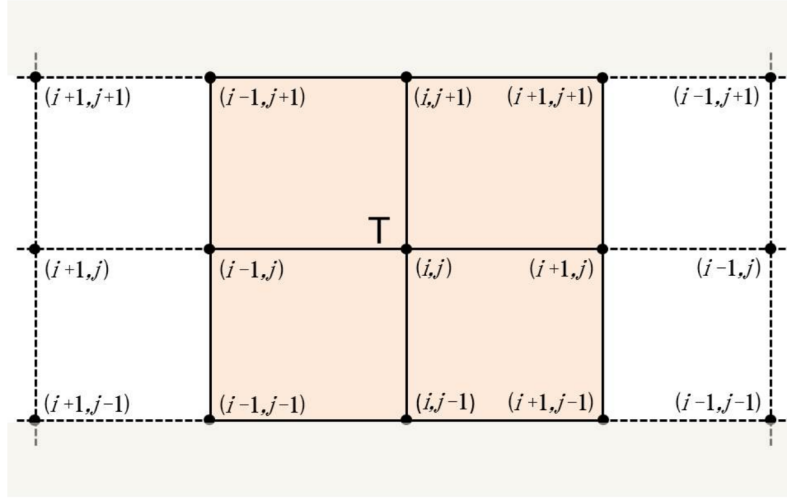
である. ここでわかりやすさのため, 図 A.2 のような 9 つの格子点を持つ領域  $T$  を考える. ただし, 紙面から見て領域  $T$  の左右は周期的境界, 上下は格子点が存在しないものとする.

仮に領域  $T$  の中央の格子点を  $(i, j) = (5, 5)$  とすると, (3.2.20) より,

$$\begin{aligned}
\Psi_{5,5} \tilde{J}_{5,5}^L &= \Psi_{5,5} \Psi_{6,5} \eta_{5,6} - \Psi_{5,5} \Psi_{6,5} \eta_{5,4} - \Psi_{5,5} \Psi_{4,5} \eta_{5,6} + \Psi_{5,5} \Psi_{4,5} \eta_{5,4} \\
&\quad - \Psi_{5,5} \Psi_{5,6} \eta_{6,5} + \Psi_{5,5} \Psi_{5,6} \eta_{4,5} + \Psi_{5,5} \Psi_{5,4} \eta_{6,5} - \Psi_{5,5} \Psi_{5,4} \eta_{4,5}
\end{aligned} \tag{3.2.23}$$

となる. (3.2.21) より格子点  $(6, 5)$  では,

$$\begin{aligned}
\Psi_{6,5} \tilde{J}_{6,5}^C &= \Psi_{6,5} \Psi_{4,5} \eta_{4,6} - \Psi_{6,5} \Psi_{4,5} \eta_{4,4} - \Psi_{6,5} \Psi_{5,5} \eta_{5,6} + \Psi_{6,5} \Psi_{5,5} \eta_{5,4} \\
&\quad - \Psi_{6,5} \Psi_{6,6} \eta_{5,6} + \Psi_{6,5} \Psi_{6,6} \eta_{5,6} + \Psi_{6,5} \Psi_{6,4} \eta_{4,4} - \Psi_{6,5} \Psi_{6,4} \eta_{5,4}
\end{aligned} \tag{3.2.24}$$

図 3.2.1 9つの格子点を持つ領域  $T$ .

となり, 格子点  $(4,5)$  では,

$$\begin{aligned} \Psi_{4,5} \tilde{J}_{4,5}^C &= \Psi_{4,5} \Psi_{5,5} \eta_{5,6} - \Psi_{4,5} \Psi_{5,5} \eta_{5,4} - \Psi_{4,5} \Psi_{6,5} \eta_{6,6} + \Psi_{4,5} \Psi_{6,5} \eta_{6,4} \\ &\quad - \Psi_{4,5} \Psi_{4,6} \eta_{5,6} + \Psi_{4,5} \Psi_{4,6} \eta_{6,6} + \Psi_{4,5} \Psi_{4,4} \eta_{5,4} - \Psi_{4,5} \Psi_{4,4} \eta_{6,4}, \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

格子点  $(5,6)$  では,

$$\Psi_{5,6} \tilde{J}_{5,6}^C = -\Psi_{5,6} \Psi_{6,6} \eta_{6,5} + \Psi_{5,6} \Psi_{4,6} \eta_{6,5} + \Psi_{5,6} \Psi_{5,5} \eta_{6,5} - \Psi_{5,6} \Psi_{5,5} \eta_{4,5}, \quad (3.2.26)$$

格子点  $(5,4)$  では,

$$\Psi_{5,4} \tilde{J}_{5,4}^C = \Psi_{5,4} \Psi_{6,4} \eta_{6,5} - \Psi_{5,4} \Psi_{4,4} \eta_{4,5} - \Psi_{5,4} \Psi_{5,5} \eta_{6,5} + \Psi_{5,4} \Psi_{5,5} \eta_{4,5}, \quad (3.2.27)$$

である. (3.2.23) の右辺第 1, 2 項は (3.2.24) の右辺第 3, 4 項と, (3.2.23) の右辺第 3, 4 項は (3.2.25) の右辺第 1, 2 項と, (3.2.23) の右辺第 5, 6 項は (3.2.26) の右辺第 3, 4 項と, (3.2.23) の右辺第 7, 8 項は (3.2.27) の右辺第 3, 4 項と相殺する. ここには掲載しないが, 他の格子点でも同様のことが成り立つ. よって領域  $T$  の (3.2.20) と (3.2.21) の和は 0 になる.

次に (3.2.23) より, 格子点  $(5,5)$  では,

$$\begin{aligned} \Psi_{5,5} \tilde{J}_{5,5}^R &= \Psi_{5,5} \eta_{5,6} \Psi_{6,6} - \Psi_{5,5} \eta_{5,6} \Psi_{4,6} - \Psi_{5,5} \eta_{5,4} \Psi_{6,4} + \Psi_{5,5} \eta_{5,4} \Psi_{4,4} \\ &\quad - \Psi_{5,5} \eta_{6,5} \Psi_{6,6} + \Psi_{5,5} \eta_{6,5} \Psi_{6,4} + \Psi_{5,5} \eta_{4,5} \Psi_{4,6} - \Psi_{5,5} \eta_{4,5} \Psi_{4,4} \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

となる. 格子点  $(6,6)$  では,

$$\Psi_{6,6} \tilde{J}_{6,6}^R = -\Psi_{6,6} \eta_{6,5} \Psi_{4,6} + \Psi_{6,6} \eta_{6,5} \Psi_{5,5} + \Psi_{6,6} \eta_{4,6} \Psi_{4,5} - \Psi_{6,6} \eta_{5,6} \Psi_{5,5}, \quad (3.2.29)$$

格子点 (4,6) では,

$$\Psi_{4,6} \tilde{J}_{4,6}^R = -\Psi_{4,6} \eta_{4,5} \Psi_{5,5} + \Psi_{4,6} \eta_{4,5} \Psi_{6,5} + \Psi_{4,6} \eta_{5,6} \Psi_{5,5} - \Psi_{4,6} \eta_{6,6} \Psi_{6,5}, \quad (3.2.30)$$

格子点 (6,4) では,

$$\Psi_{6,4} \tilde{J}_{6,4}^R = \Psi_{6,4} \eta_{6,5} \Psi_{4,5} - \Psi_{6,4} \eta_{6,5} \Psi_{5,5} - \Psi_{6,4} \eta_{4,4} \Psi_{4,5} + \Psi_{6,4} \eta_{5,4} \Psi_{5,5}, \quad (3.2.31)$$

格子点 (4,4) では,

$$\Psi_{4,4} \tilde{J}_{4,4}^R = \Psi_{4,4} \eta_{4,5} \Psi_{5,5} - \Psi_{4,4} \eta_{4,5} \Psi_{6,5} - \Psi_{4,4} \eta_{5,4} \Psi_{5,5} + \Psi_{4,4} \eta_{6,4} \Psi_{6,5}, \quad (3.2.32)$$

である. (3.2.28) の右辺第 1,5 項は (3.2.29) の右辺第 2,4 項と, (3.2.28) の右辺第 2,7 項は (3.2.30) の右辺第 1,3 項と, (3.2.28) の右辺第 3,6 項は (3.2.31) の右辺第 2,4 項と, (3.2.28) の右辺第 4,8 項は (3.2.32) の右辺第 1,3 項と相殺する. ここには掲載しないが, 他の格子点でも同様のことが成り立つ. よって領域  $T$  の (3.2.22) は 0 になる. 以上より, (3.2.19) は,

$$\iint \Psi \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) dx dz = 0 \quad (3.2.33)$$

となり, (3.2.17) のように近似するとエネルギーが確かに保存されている. また,  $\tilde{J}_{i,j}^L$  と  $\tilde{J}_{i,j}^C$  の和でもエネルギーを保存していること,  $\tilde{J}_{i,j}^R$  のみでもエネルギーを保存していることが分かった.

次に (3.2.14) について確かめる.

$$\iint \eta \frac{\partial \eta}{\partial t} dx dz + \iint \eta \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) dx dz = 0 \quad (3.2.34)$$

(3.2.34) の左辺第 2 項は,

$$\iint \eta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) dx dz \simeq \sum_{i,j} \eta_{i,j} \frac{1}{3} \left( \tilde{J}_{i,j}^L + \tilde{J}_{i,j}^C + \tilde{J}_{i,j}^R \right) \quad (3.2.35)$$

と変形できる. そしてエネルギーの保存の確認でおこなったのと同様にすると, (3.2.35) は,

$$\iint \eta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) dx dz = 0 \quad (3.2.36)$$

となる. よって (3.2.17) のように近似するとエンストロフィーが確かに保存されている. ただし, エネルギーの場合と違って,  $\tilde{J}_{i,j}^L$  と  $\tilde{J}_{i,j}^R$  の和でもエンストロフィーを保存している. また  $\tilde{J}_{i,j}^C$  のみでもエンストロフィーを保存している.

### 3.3 Euler 法

常微分方程式を,

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (3.3.37)$$

とする. 微分の定義より,

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad (3.3.38)$$

これが  $f(x, t)$  と等しい. 次に  $\Delta t$  が非常に小さいとき, (3.3.38) の右辺は  $\{x(t + \Delta t) - x(t)\} / \Delta t$  と近似できることから,

$$f(x, t) \simeq \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad (3.3.39)$$

すなわち,

$$x(t + \Delta t) \simeq x(t) + \Delta t \cdot f(x, t) \quad (3.3.40)$$

が成り立つので,  $x(t)$  が分かれば (3.3.40) より  $x(t + \Delta t)$  が分かる. よって初期値  $x(0)$  を与えて, 漸化式 (3.3.40) を順に計算すれば  $x(t)$  が得られる,  $x$  を  $t$  の関数としてのグラフに書くことができる. (3.3.40) に従って常微分方程式を解く方法を Euler 法という.

### 3.4 Runge-Kutta 法

Euler 法は 1 段法<sup>\*2</sup>と呼ばれ, 次のような長所がある:

- (1) 初期条件だけあればよく, その他の出発値は不要である.
- (2) 安定性条件を満たすようなステップ幅  $h$  が選べる.

<sup>\*2</sup>  $x_{k+1}$  を求めるために, 1 つ前の  $x_k$  だけあればよい方法.

(3) 途中でステップ幅  $h$  を変更することが出来る.

一方, 短所として離散化誤差が大きいこと, 離散化誤差を小さくしようとすると, 方程式の右辺  $f(x, t)$  やその導関数の計算の回数が増えがちであることなどがある.

ここで, 1 段法でありかつ  $f(x, t)$  の導関数の計算を必要としない方法を検討する. 1 段法で  $f(x, t)$  の導関数を必要としない公式を, Runge-Kutta 型公式という. Runge-Kutta 型公式は一般形として,

$$x_{k+1} = x_k + h\Phi(x_k, t_k; h) \quad (3.4.41)$$

の形をしている. Euler 法は,

$$\Phi(x_k, t_k; h) = f(x_k, t_k) \quad (3.4.42)$$

と取ったことになっているから, Runge-Kutta 型公式のひとつである.

2 次の Runge-Kutta 型公式 (3.4.41) において,

$$\Phi(x_k, t_k; h) = \alpha k_1 + \beta k_2, \quad k_1 = f(x_k, t_k), \quad k_2 = f(x_k + ahk_1, t_k + bh) \quad (3.4.43)$$

とおく, ただし  $\alpha, \beta, a, b$  は定数である.  $k_2$  を  $h$  について展開すると,

$$k_2 = f(x_k, t_k) + ahk_1 f_x(x_k, t_k) + bh f_t(x_k, t_k) + \mathcal{O}(h^2) \quad (3.4.44)$$

が得られる. ここで,  $f_x = \partial f / \partial x$ ,  $f_t = \partial f / \partial t$  であり,  $\mathcal{O}(h^2)$  は  $h$  について 2 次の程度の大きさの項であることを表す. したがって (3.4.41) は,

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + h(\alpha k_1 + \beta k_2) \\ &= x_k + h(\alpha + \beta)f(x_k, t_k) + h^2[\beta a f_x f + \beta b f_t] + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned} \quad (3.4.45)$$

となる. 一方,  $d^2x/dt^2 = (d/dt)f = f_t + f_x f$  であるから,  $x_{k+1} = x(t_k + h)$  とし  $x_{k+1}$  を Taylor 展開して,

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x(t_k + h) \\ &= x_k + hf(x_k, t_k) + \frac{h^2}{2}[f_x f + f_t] + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned} \quad (3.4.46)$$

この 2 つの式の  $x_{k+1}$  の  $h$  のべき乗の展開式を比べると,

$$\alpha + \beta = 1, \quad \beta a = \frac{1}{2}, \quad \beta b = \frac{1}{2} \quad (3.4.47)$$

となる. これは  $\alpha, \beta, a, b$  の 4 つの定数の間の 3 つの関係式であるから, 4 つの定数の中の 1 つは自由に選べる. 2 次の Runge-Kutta 型公式は,  $f(x, t)$  を 2 回計算して  $h^2$  の程度の範囲で精確な  $x_{k+1}$  を求めている.

#### 4 次の Runge-Kutta 型公式

$$\begin{cases} x_{k+1} &= x_k + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 &= f(x_k, t_k) \\ k_2 &= f(x_k + hk_1/2, t_k + h/2) \\ k_3 &= f(x_k + hk_2/2, t_k + h/2) \\ k_4 &= f(x_k + hk_3, t_k + h) \end{cases} \quad (3.4.48)$$

上の式は Runge-Kutta の公式と呼ばれているこの型の代表的な公式である. この公式の特徴は, 独立変数  $t$  の値が,  $t_k, t_k + h/2, t_k + h/2, t_k$  と単調に増加していることである. この公式の利点は,  $x$  を 4 回変化させているときに用いられる  $k_1, k_2, k_3, k_4$  は,  $x$  を変化させて次の  $f(x, t)$  を求めれば用済みになるので, それぞれに変数を割り当てておくことはないことである. しかし,  $x_k$  から  $x_{k+1}$  に進む途中で,  $x_k$  の値が 4 回使われていて  $x$  が変化している間にも  $x_k$  の値を捨ててしまうわけにはいかないことである. この公式のちょっとした欠点を除いたのが, 次の本研究で用いている Runge-Kutta-Gill 法である.

### 3.5 Runge-Kutta-Gill 法

$$\begin{cases} x_{k+1} &= x_k + \frac{1}{6}hk_1 + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)hk_2 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)hk_3 + \frac{1}{6}hk_4 \\ k_1 &= f(x_k, t_k) \\ k_2 &= f\left(x_k + \frac{1}{2}hk_1, t_k + \frac{1}{2}h\right) \\ k_3 &= f\left(x_k + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right)hk_1 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)hk_2, t_k + \frac{1}{2}h\right) \\ k_4 &= f\left(x_k - \frac{1}{\sqrt{2}}hk_2 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)hk_3, t_k + h\right) \end{cases} \quad (3.5.49)$$

(3.5.49) は 4 次の Runge-Kutta-Gill 法の公式である。一見難しそうに見えるが特徴として、記憶容量の節約が可能で、丸め誤差<sup>\*3</sup>の集積を小さくすることが可能である (川上, 1998)。

---

<sup>\*3</sup> コンピュータの中では実数型数値はすべて、符号、指数部、仮数部として記憶される。プログラムやデータとしてある数値を 10 進数で与えたときも、また演算中の数値も、もちろん最終結果も、コンピュータの中ではすべてこの形式に変換されている。この形式に変換することを丸めると言い、丸めるときに生ずる誤差を丸めの誤差という。



## 第 4 章

# 数値シミュレーション

### 4.1 実験条件

方程式 (2.2.38), (2.2.39) を空間微分は中央差分で差分近似し, 移流項には Arakawa Jacobian 法を用いて, 時間積分は Runge-Kutta-Gill 法を用いた. 熱は  $H(x, z) = (1 + z/\pi) \cos x$ , 初期の平均流の速度摂動は  $\bar{u}(z) = 0.2 \cos z$  とした. 境界条件は, 水平方向は周期境界条件で鉛直方向は両端で温度の鉛直微分をゼロとした. 純粋で定常な状態の対流が静止状態から始めて立ち上げられた. 拡散係数  $E$  と  $K$  は  $E = K = 1.0$  から始まり, 徐々に減少し  $t = 100$  以降,  $E, K$  は  $0.01$  で一定となる<sup>\*1</sup>.  $t = 130.0$  で平均流  $\bar{u} = 0.2 \cos z$  を与える.  $\Gamma = 1$  とした.

以下各実験の条件を表 4.1 にまとめる. run1 は Thompson(1970) の再現である. Thompson(1970) の実験条件では,  $E_H = K_H = 0$  とおいている. また鉛直方向の格子点数は 5 層であるが, 水平方向の格子点数に関する記述が無いためここでは鉛直方向の格子点数の 2 倍に設定した. run2 は Thompson(1970) の実験に水平粘性を加えた. run3 ~ 4 は格子点数の依存性を見るために格子点数を変えて実験をおこなった. run5 ~ 6 は  $t = 130$  で与える摂動の依存性を見るために, 与える摂動を変えた. run7 ~ 10 は粘性, 拡散係数に対する結果の依存性をみる. 再現しようと試みた Thompson(1970) の

---

<sup>\*1</sup> 粘性係数  $E, K$  についてこれを設定 1 とする.

図を以下に示す (図 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3, 4.1.4). 図 4.1.1 は小さい東西シアーを与えたときの前と後での平均流と対流の運動エネルギーである. 図 4.1.2 はシアーを与えていないほとんど定常な対流である. 図 4.1.3 は  $K = 0.1, E = 0.01, G = 1, \Gamma = 1$  とした  $t = 0.0, 10.2, 26.2, 106.3, 122.2, 166.8$  に対する平均東西風  $\bar{u}$  である. 図 4.1.4 は平均シアーが発達するときの速度場と温度場である. 平均シアーは左側に描かれている. 流れ関数の等高線は平均東西流を引いた流れであらわしている.

実験	格子点数 (水平方向 × 鉛直方向)	水平粘性	時間 (s)	$E, K$	摂動
run1	10×5	無し	2000	設定 1	$0.2 \cos z$
run2	10×5	有り	2000	設定 1	$0.2 \cos z$
run3	20×10	有り	2000	設定 1	$0.2 \cos z$
run4	40×20	有り	2000	設定 1	$0.2 \cos z$
run5	20×10	有り	3000	設定 1	なし
run6	20×10	有り	3000	設定 1	$0.2 \sin z$
run7	10×5	有り	2000	0.01	$0.2 \cos z$
run8	20×10	有り	2000	0.01	$0.2 \cos z$
run9	20×10	有り	2000	0.1	$0.2 \cos z$
run10	20×10	有り	2000	1.0	$0.2 \cos z$
run11	20×10	有り	2000	0.005	$0.2 \cos z$
run12	20×10	有り	2000	0.001	$0.2 \cos z$

表 4.1 各実験の条件. 設定 1 に関しては前節を参照.

## 4.2 結果

### 4.2.1 Thompson(1970) と同じ実験条件の結果

図 4.2.1 に Thompson と同じ条件で実験した場合の, 平均流と対流のエネルギーの時間発展を示す. 図 4.2.1 から, 平均流が立ち上がるには水平粘性の効果を加えなければならないことが分かる.

図 4.2.2, 4.2.3 に run1 の場合での,  $t = 130, t = 2000$  の運動量フラックスを示す.

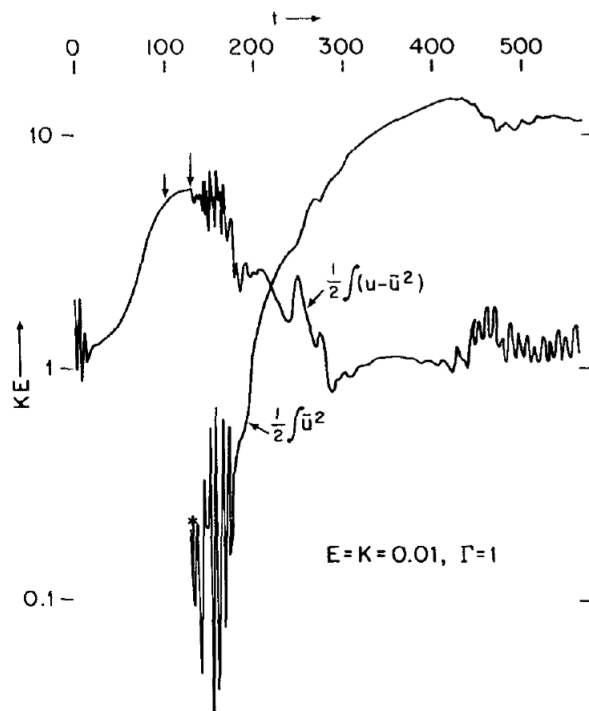


図 4.1.1 小さい東西シアーを与えたときの前と後での平均流と対流の運動エネルギー (Thompson, 1970).

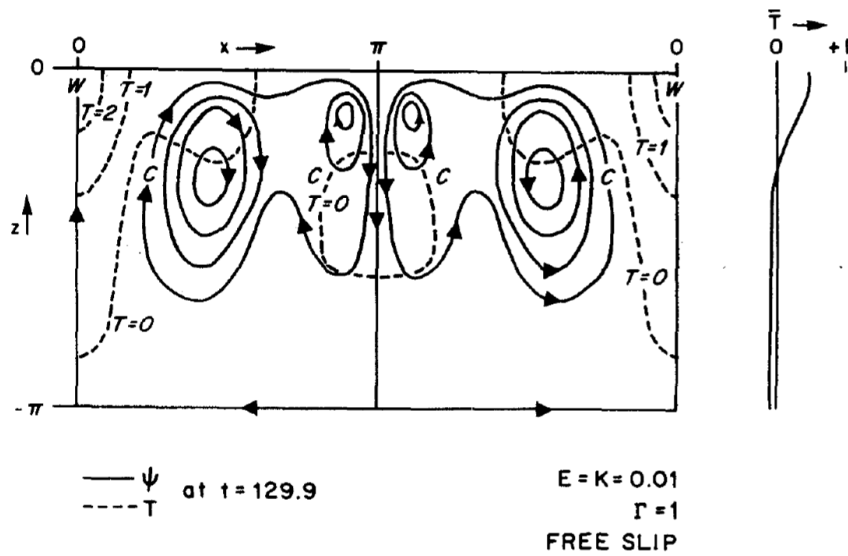


図 4.1.2 シアーを与えていないほとんど定常な対流 (Thompson, 1970).

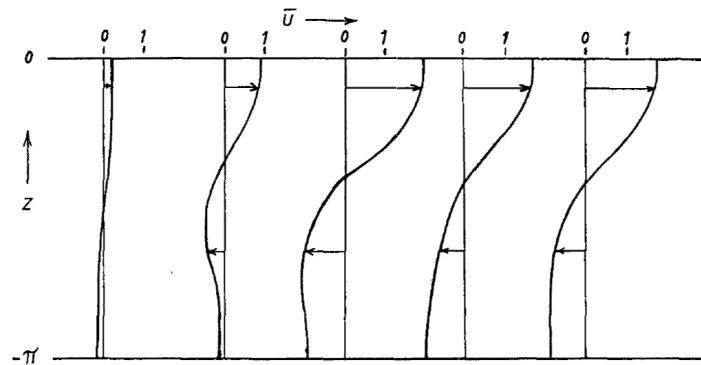


図 4.1.3  $t = 0.0, 10.2, 26.2, 106.3, 122.2, 166.8$  に対する平均東西風  $\bar{u}$ .  $K = 0.1, E = 0.01, G = 1, \Gamma = 1$  とした (Thompson, 1970).

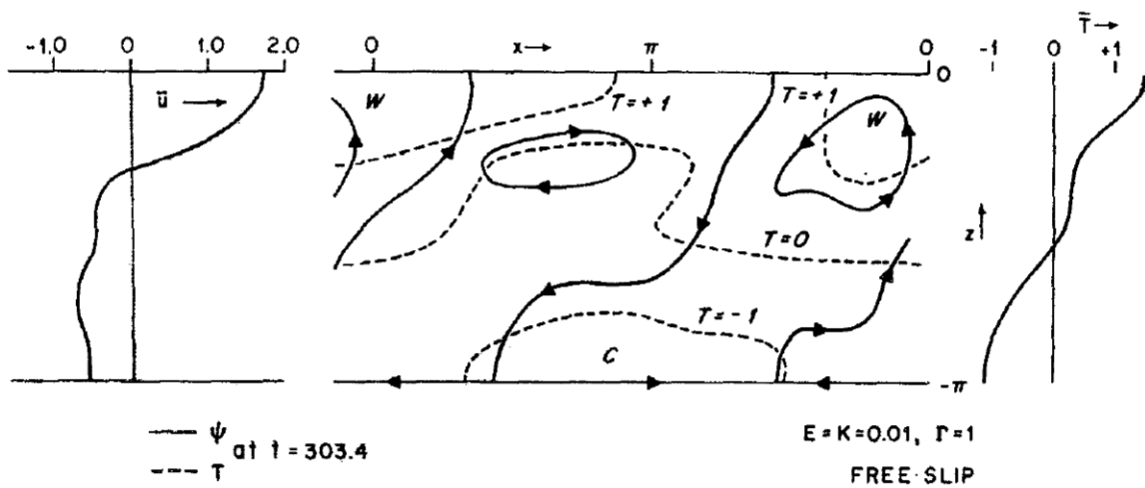


図 4.1.4 平均シアが発達するときの速度場と温度場. 平均シアは左側に描かれている. 流れ関数の等高線は平均東西流を引いた流れであらわした (Thompson, 1970).

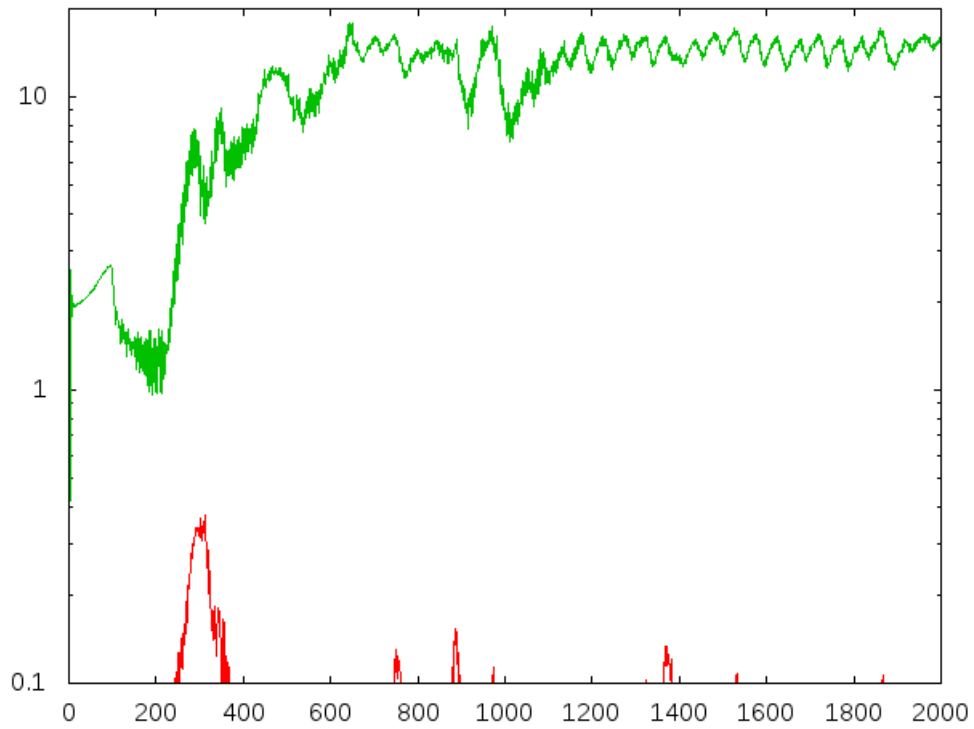


図 4.2.1 平均流と対流のエネルギーの時間発展 (run1 の場合).

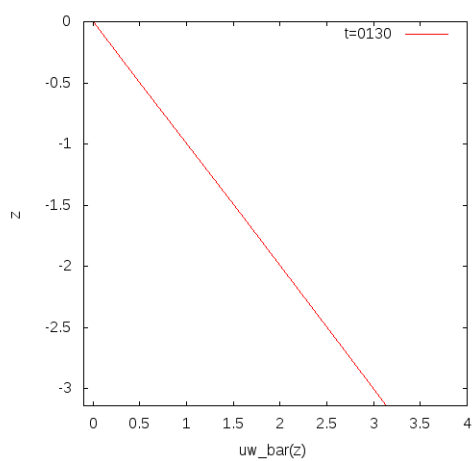


図 4.2.2  $t = 130$  での運動量フラックス. ただし run1 の場合.

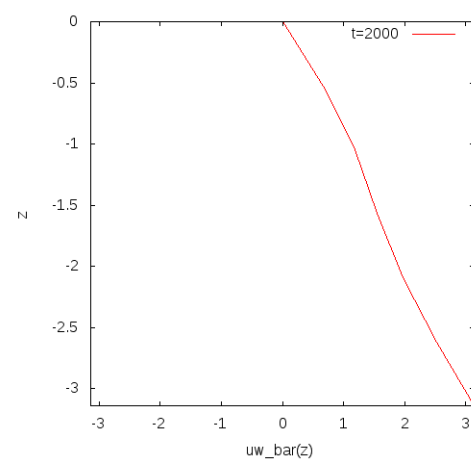


図 4.2.3  $t = 2000$  での運動量フラックス. ただし run1 の場合.

図 4.2.4, 4.2.5 に run1 の場合での,  $t = 130$ ,  $t = 2000$  の平均東西風を示す.

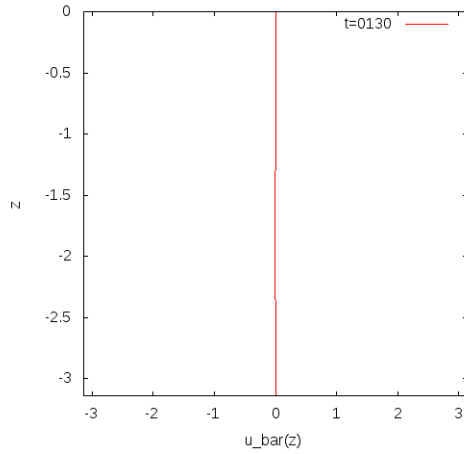


図 4.2.4  $t = 130$  での平均東西風. ただし run1 の場合.

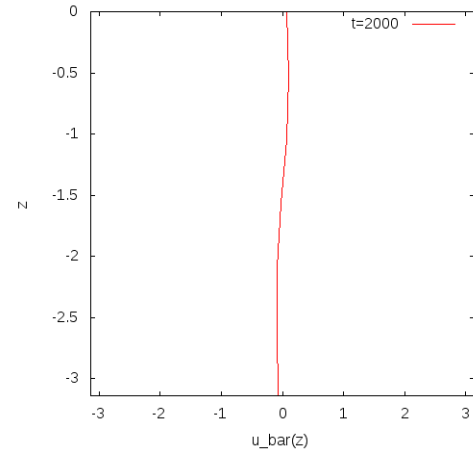


図 4.2.5  $t = 2000$  での平均東西風. ただし run1 の場合.

図 4.2.6, 4.2.7 に run1 の場合での,  $t = 130$ ,  $t = 2000$  の温度を示す.

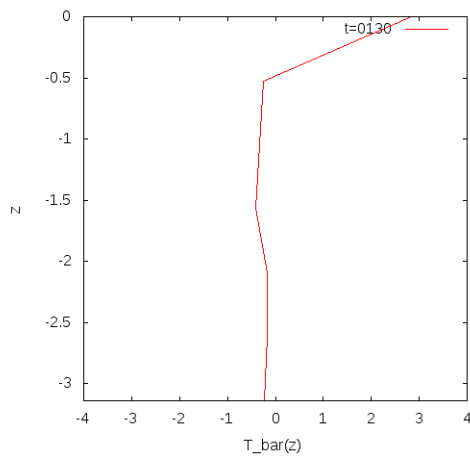


図 4.2.6  $t = 130$  での温度. ただし run1 の場合.

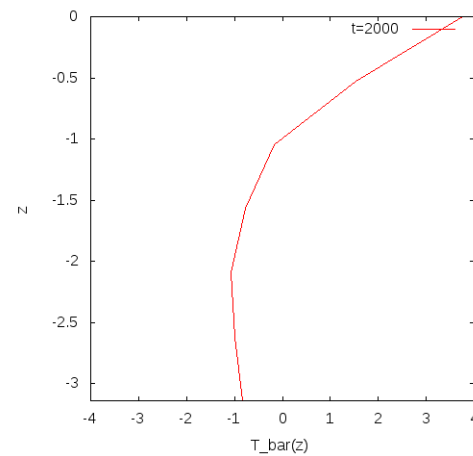
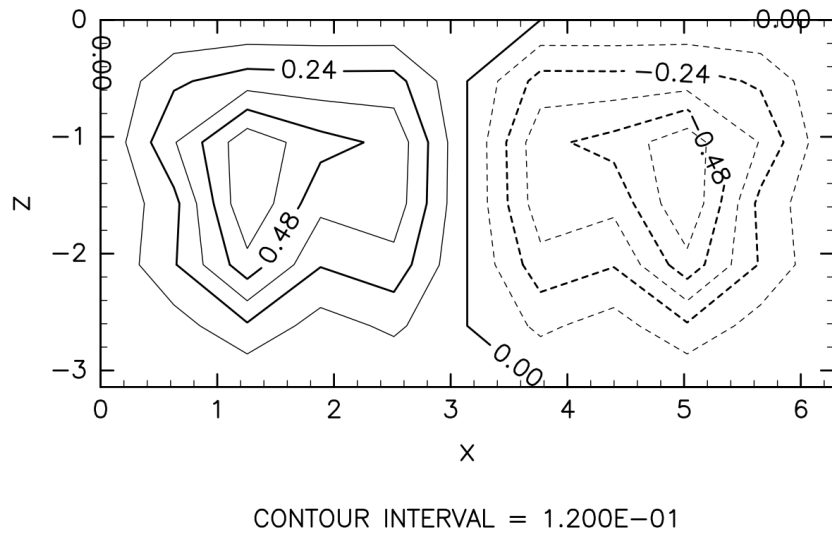
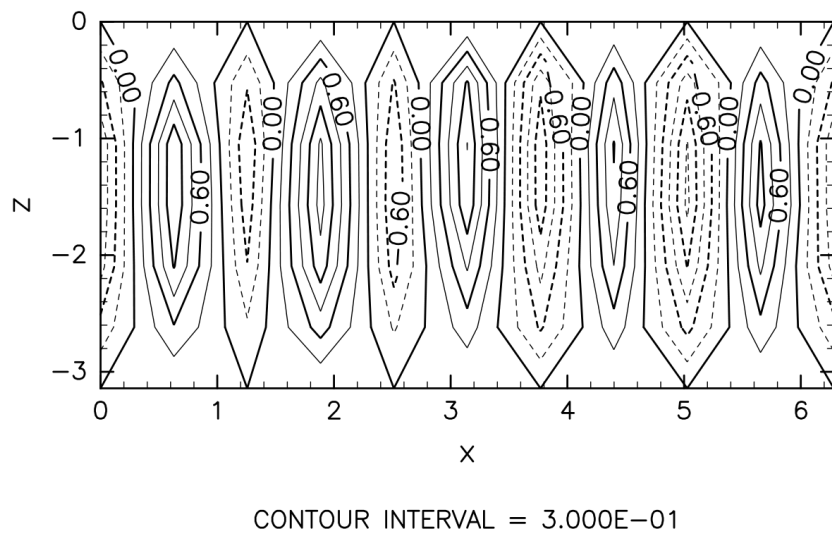
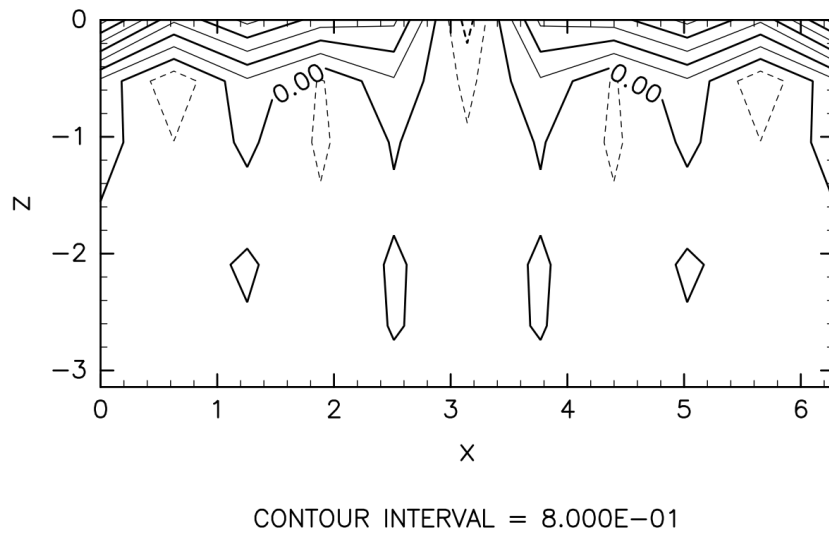
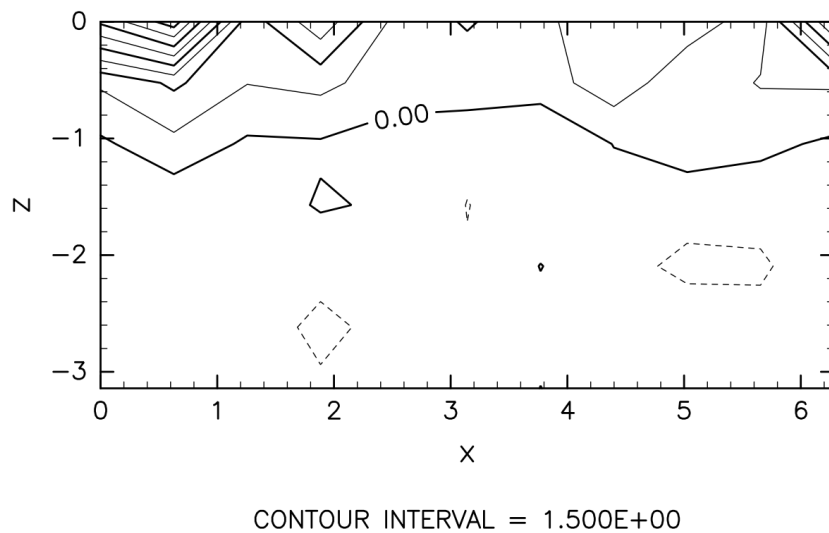


図 4.2.7  $t = 2000$  での温度. ただし run1 の場合.

図 4.2.8, 4.2.9 に run1 の場合での,  $t = 130$ ,  $t = 2000$  の流線関数の場を示す.

図 4.2.10, 4.2.11 に run1 の場合での,  $t = 130$ ,  $t = 2000$  の温度の場を示す.

図 4.2.8  $t = 130$  での流線関数の場. ただし run1 の場合.図 4.2.9  $t = 2000$  での流線関数の場. ただし run1 の場合.

図 4.2.10  $t = 130$  での温度場. ただし run1 の場合.図 4.2.11  $t = 2000$  での温度場. ただし run1 の場合.



### 4.2.2 格子点数に対する依存性

Thompson と同じ条件では平均流が充分加速されなかった. ここからは全ての実験において水平粘性の効果を加えて, 格子点数を変化させて格子点数の依存性を確かめる.

図 4.2.12 に水平粘性を与えた Thompson の条件で実験した結果を示す. 図 4.2.12 から水平粘性の効果を加えると平均流が立ち上がることが分かる. しかし, Thompson(1970) の図 4.1.1 ほど平均流の運動エネルギーは大きくならないことが分かる.

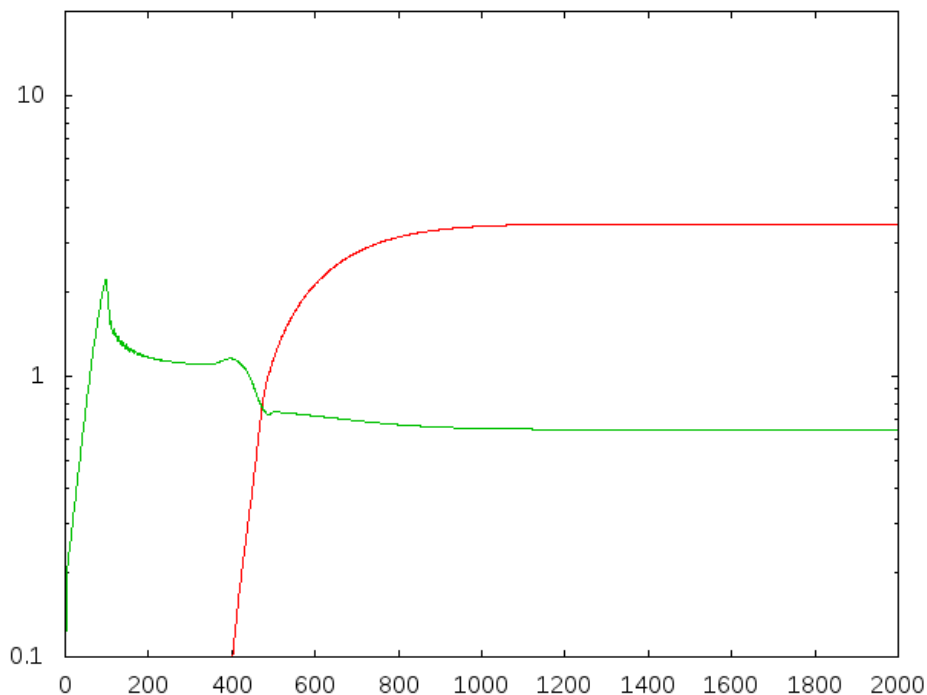


図 4.2.12 図 4.2.1 と同様. ただし run2 の場合.

図 4.2.13, 4.2.14 に run2 の場合での,  $t = 130$ ,  $t = 2000$  の運動量フラックスを示す.

図 4.2.15, 4.2.16 に run2 の場合での,  $t = 130$ ,  $t = 2000$  の平均東西風を示す.

図 4.2.17, 4.2.18 に run2 の場合での,  $t = 130$ ,  $t = 2000$  の温度を示す.

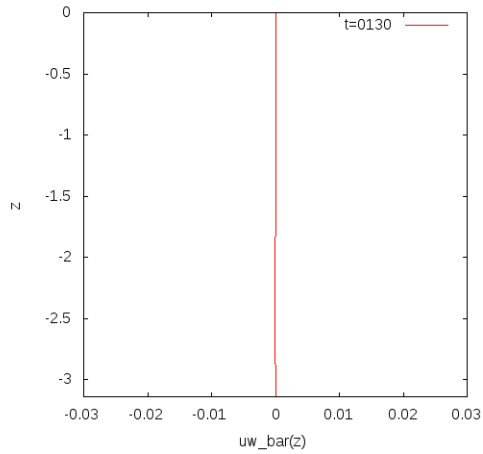


図 4.2.13  $t = 130$  での運動量フラックス. ただし run2 の場合.

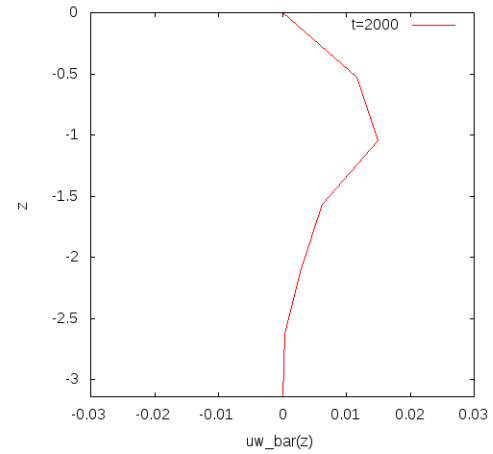


図 4.2.14  $t = 2000$  での運動量フラックス. ただし run2 の場合.

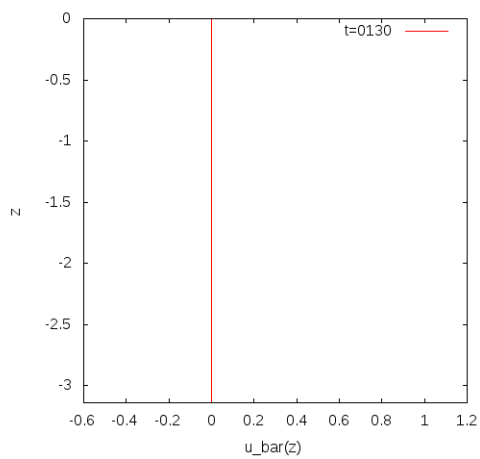


図 4.2.15  $t = 130$  での平均東西風. ただし run2 の場合.

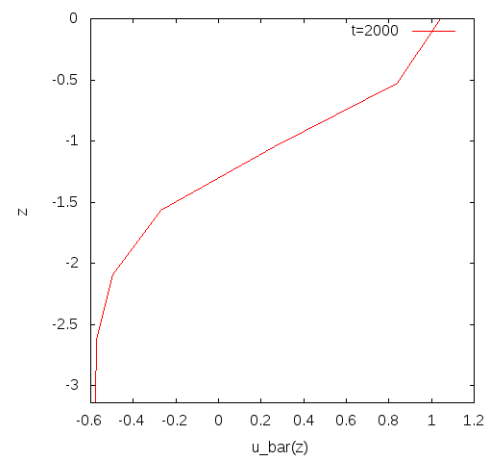


図 4.2.16  $t = 2000$  での平均東西風. ただし run2 の場合.

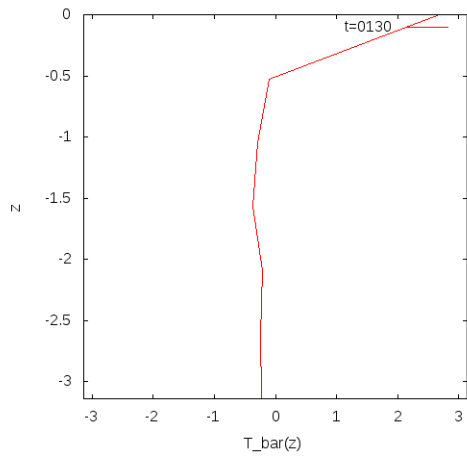


図 4.2.17  $t = 130$  での温度. ただし run2 の場合.

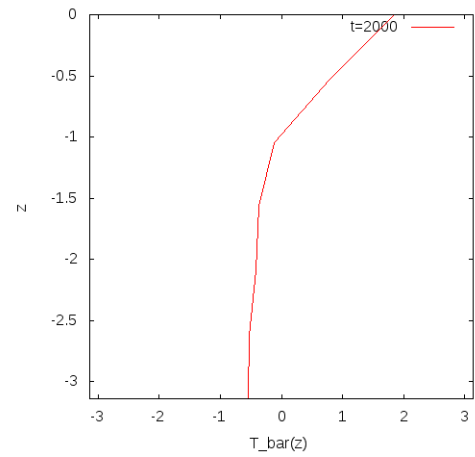


図 4.2.18  $t = 2000$  での温度. ただし run2 の場合.

図 4.2.19, 4.2.20 に run2 の場合での,  $t = 130, t = 2000$  の流線関数の場を示す.

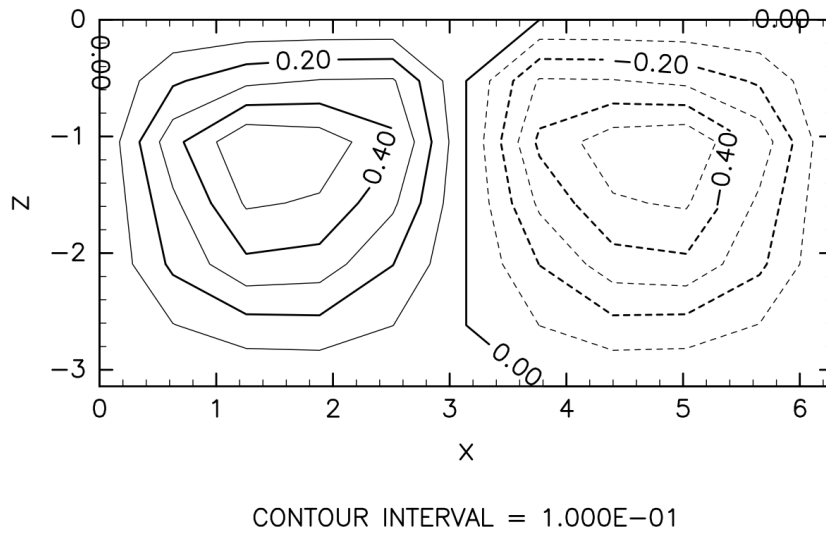


図 4.2.19  $t = 130$  での流線関数の場. ただし run2 の場合.

図 4.2.21, 4.2.22 に run2 の場合での,  $t = 130, t = 2000$  の温度の場を示す.

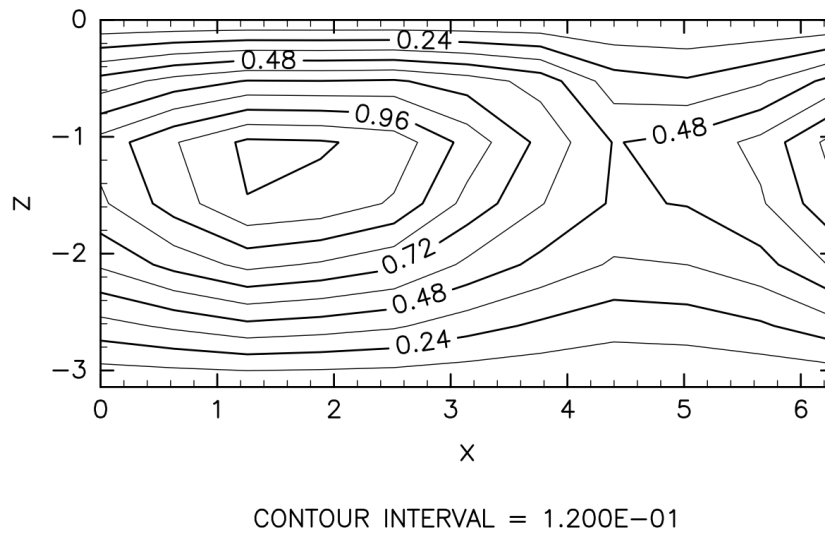


図 4.2.20  $t = 2000$  での流線関数の場. ただし run2 の場合.

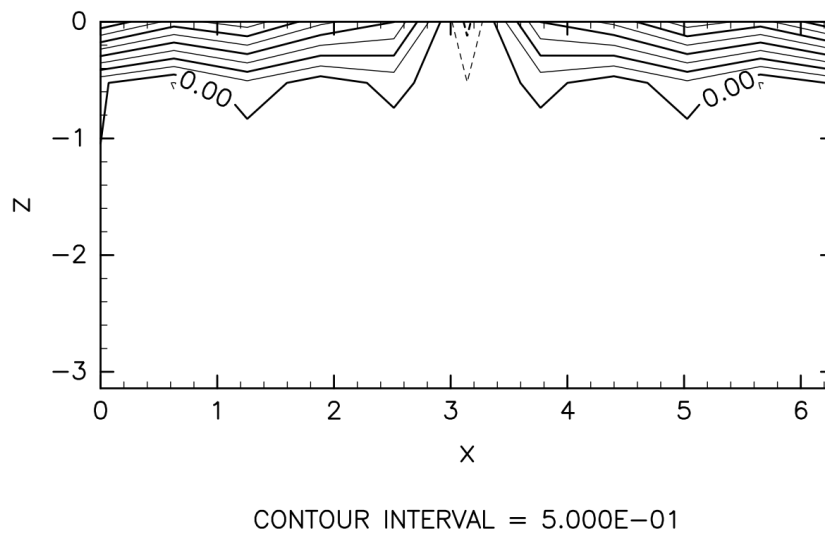


図 4.2.21  $t = 130$  での温度場. ただし run2 の場合.

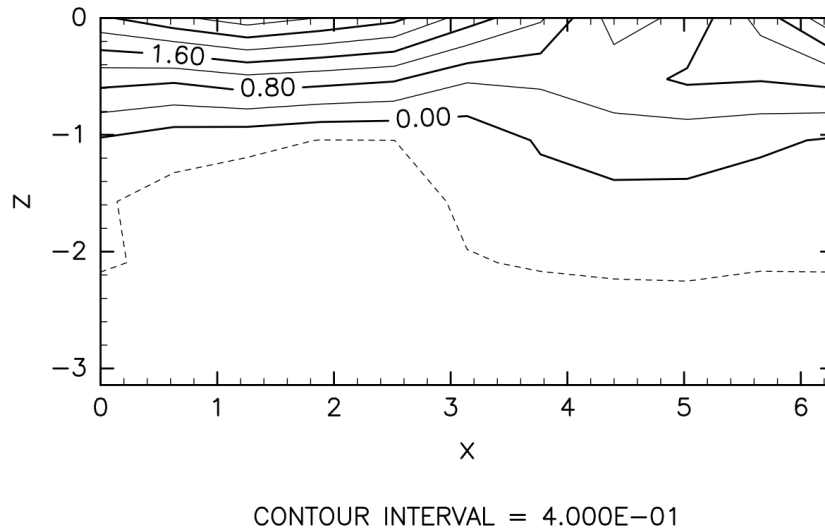


図 4.2.22  $t = 2000$  での温度場. ただし run2 の場合.

図 4.2.23 に水平粘性を与え, 格子点数を Thompson の条件の 2 倍で実験した結果を示す. 図 4.2.23 から, 格子点数を 2 倍にすると平均流が加速する時刻が遅くなり, 平均流のエネルギーも増大することが分かる.

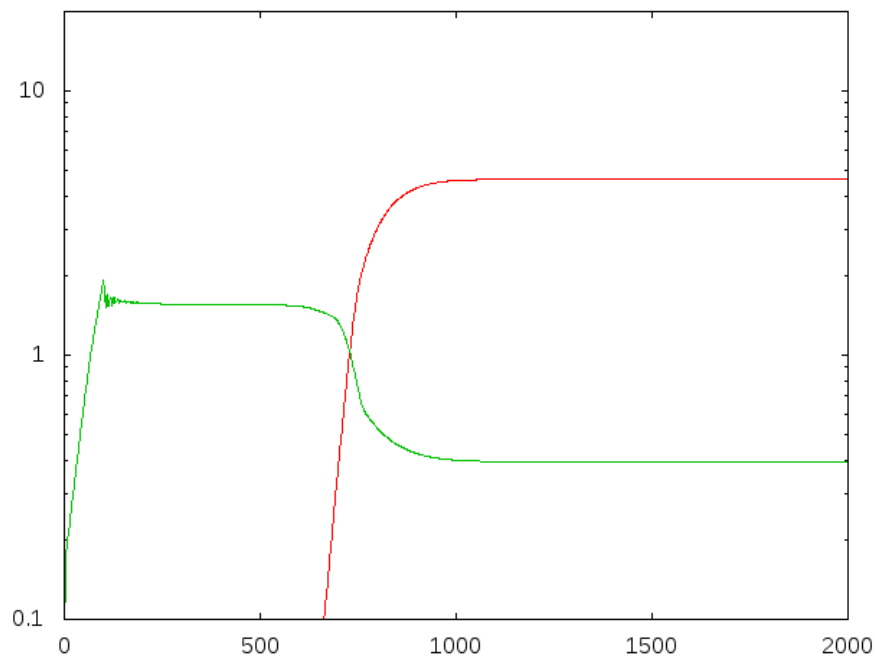


図 4.2.23 図 4.2.1 と同様. ただし run3 の場合.

図 4.2.24, 4.2.25 に run3 の場合での,  $t = 130$ ,  $t = 2000$  の運動量フラックスを示す.

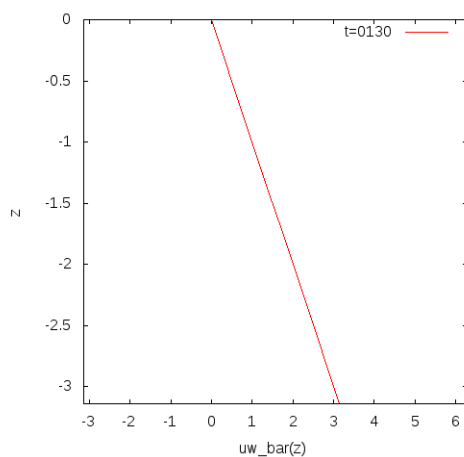


図 4.2.24  $t = 130$  での運動量フラックス. ただし run3 の場合.

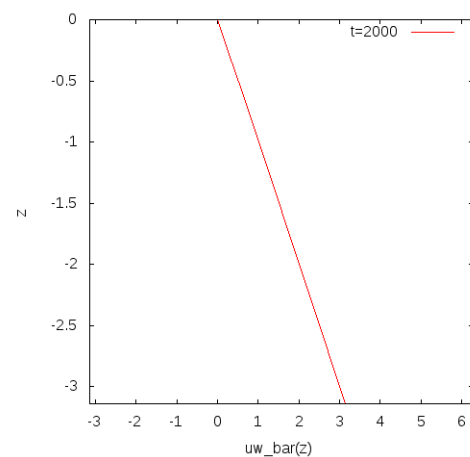


図 4.2.25  $t = 2000$  での運動量フラックス. ただし run3 の場合.

図 4.2.26, 4.2.27 に run3 の場合での,  $t = 130$ ,  $t = 2000$  の平均東西風を示す.

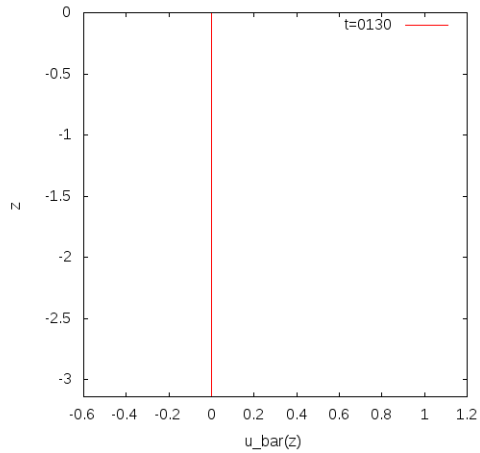


図 4.2.26  $t = 130$  での平均東西風. ただし run3 の場合.

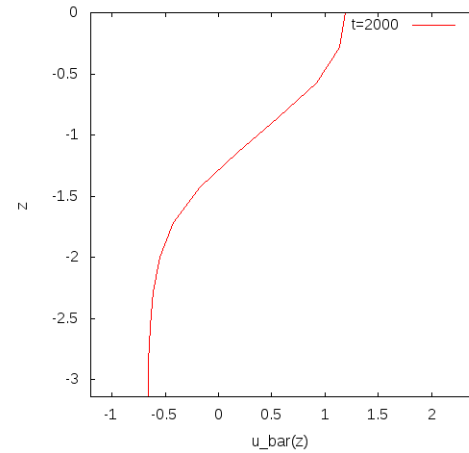


図 4.2.27  $t = 2000$  での平均東西風. ただし run3 の場合.

図 4.2.28, 4.2.29 に run3 の場合での,  $t = 130$ ,  $t = 2000$  の温度を示す.

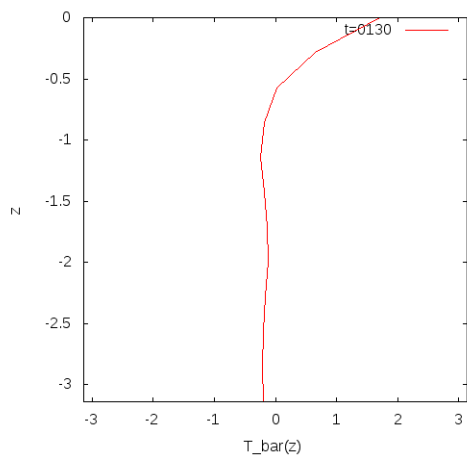


図 4.2.28  $t = 130$  での温度. ただし run3 の場合.

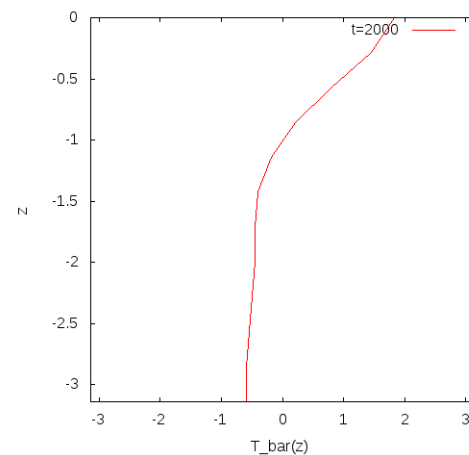
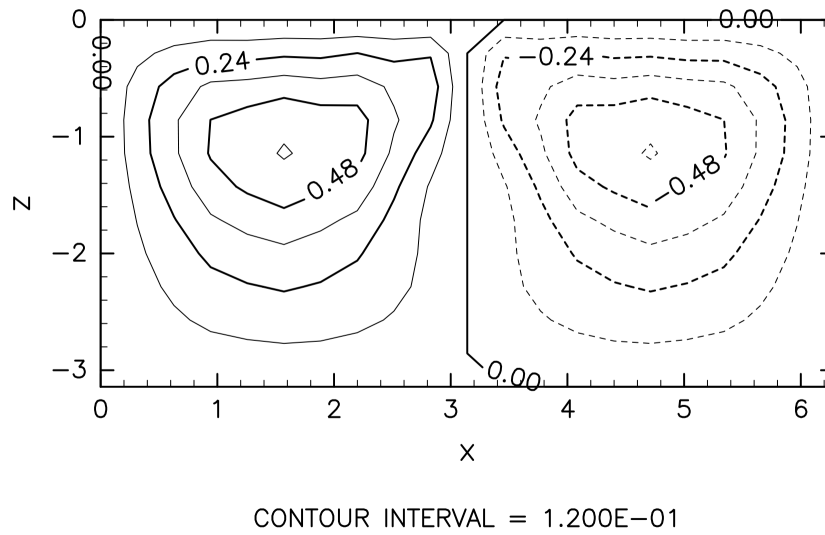
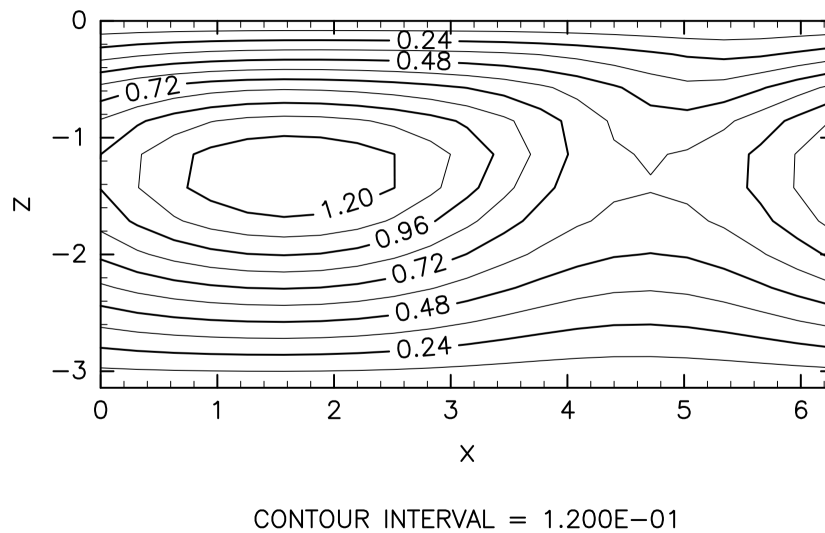


図 4.2.29  $t = 2000$  での温度. ただし run3 の場合.

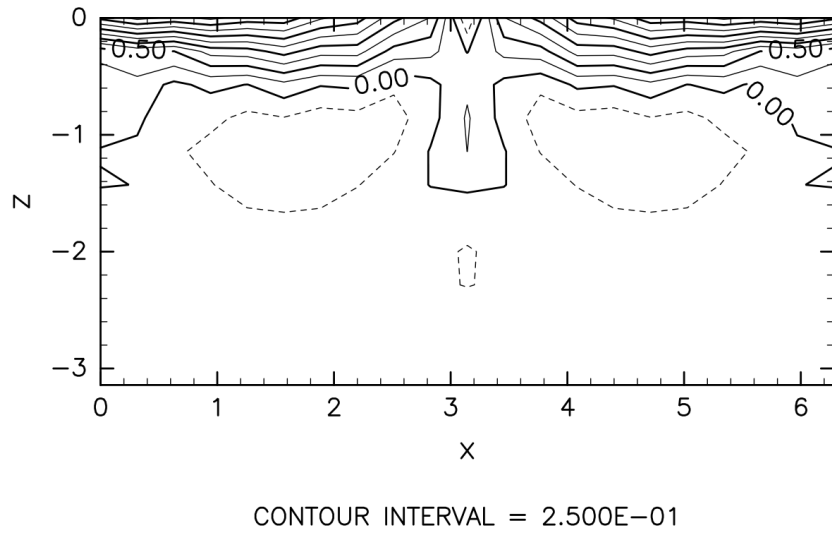
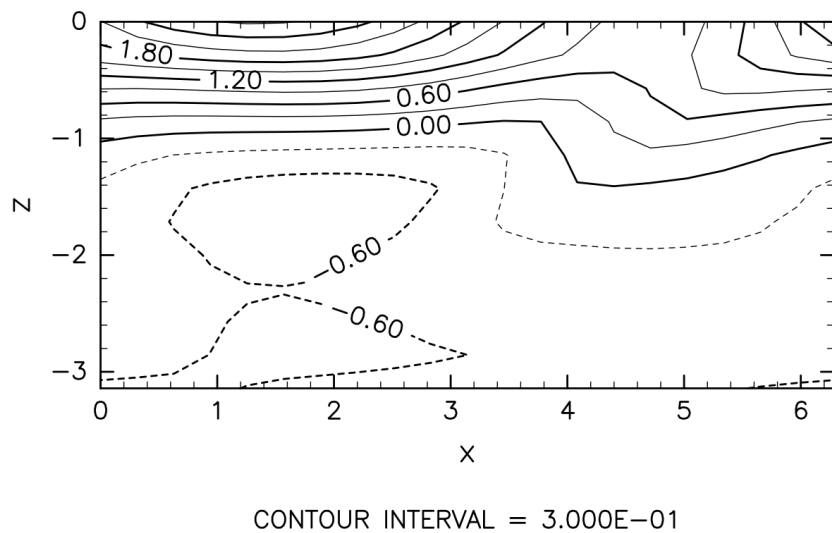
図 4.2.30, 4.2.31 に run3 の場合での,  $t = 130$ ,  $t = 2000$  の流線関数の場を示す.

図 4.2.32, 4.2.33 に run3 の場合での,  $t = 130$ ,  $t = 2000$  の温度の場を示す.

図 4.2.34 に水平粘性を与え, 格子点数を Thompson の条件の 4 倍で実験した結果を示す. 図 4.2.34 から, 格子点数を 2 倍から 4 倍にしても平均流が加速する時刻や, 平均流の

図 4.2.30  $t = 130$  での流線関数の場. ただし run3 の場合.図 4.2.31  $t = 2000$  での流線関数の場. ただし run3 の場合.



図 4.2.32  $t = 130$  での温度場. ただし run3 の場合.図 4.2.33  $t = 2000$  での温度場. ただし run3 の場合.

エネルギーに変化はないことが分かる。また 図 4.2.12, 4.2.23, 4.2.34 より, Thompson と同じ格子点数では不十分であり, 少なくとも水平方向 20 層, 鉛直方向 10 層が必要であることが分かる。

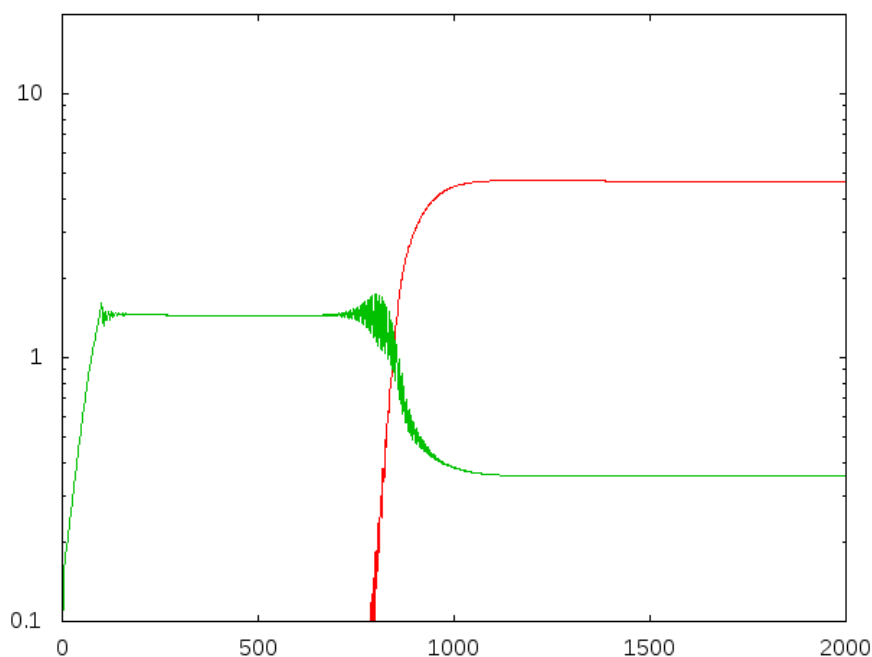


図 4.2.34 図 4.1.4 と同様. ただし run4 の場合.

### 4.2.3 摂動への依存性

$t = 130$  で与える摂動が平均流の立ち上がりにどれほど影響を及ぼしているのかを確かめる。

図 4.2.35 に  $t = 130$  で摂動を与えずにおこなった結果を示す。図 4.2.35 より, 平均流が立ち上がるまでの時間が, 摂動を与える場合の 3 倍ほどかかることが分かる。また, 立ち上がった平均流の大きさには変化がないことが分かる。

図 4.2.36, 4.2.37 に run5 の場合での,  $t = 130, t = 3000$  の流線関数の場を示す。

図 4.2.38, 4.2.39 に run5 の場合での,  $t = 130, t = 3000$  の温度場を示す。

図 4.2.40 に  $t = 130$  で  $\bar{u} = 0.2 \sin z$  の摂動を与えた結果を示す。図 4.2.40 から, 与え

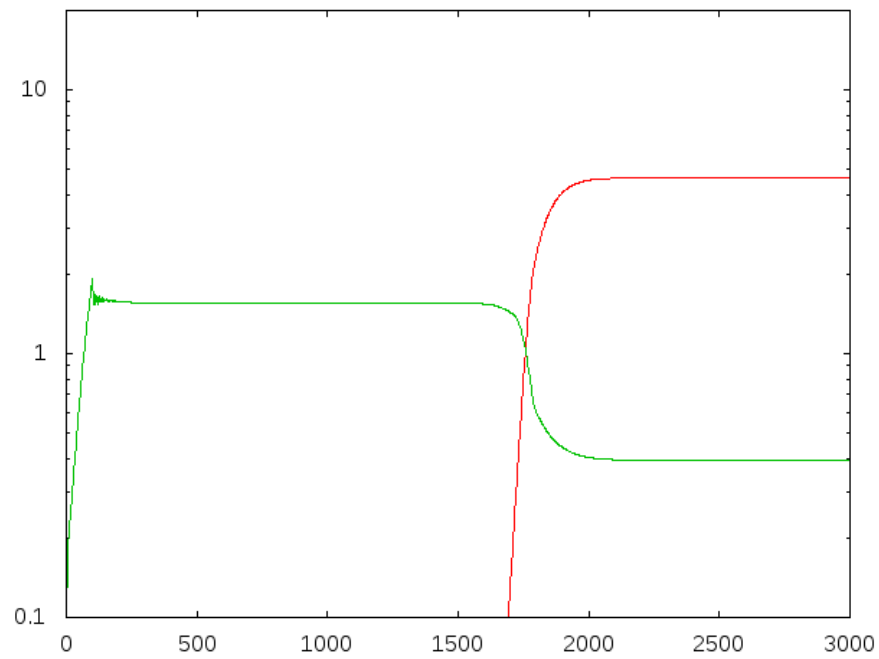
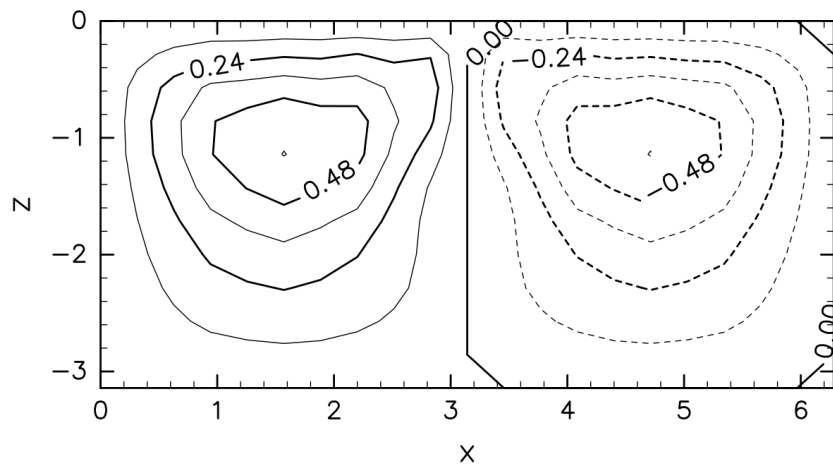
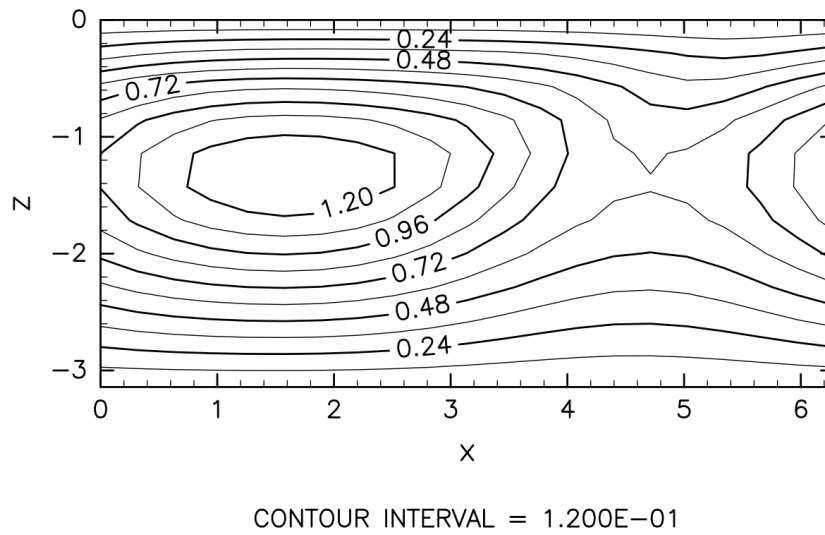
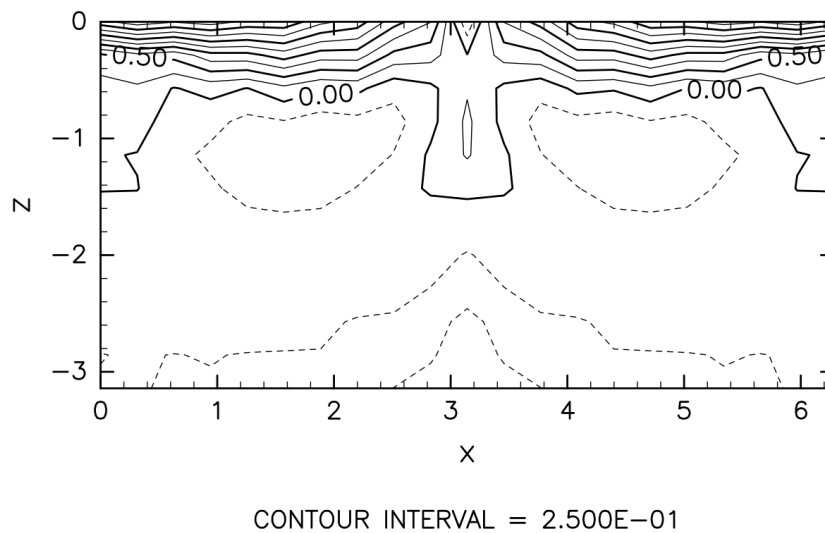


図 4.2.35 図 4.2.1 と同様. ただし run5 の場合.



CONTOUR INTERVAL = 1.200E-01

図 4.2.36  $t = 130$  での流線関数の場. ただし run5 の場合.

図 4.2.37  $t = 3000$  での流線関数の場. ただし run5 の場合.図 4.2.38  $t = 130$  での温度場. ただし run5 の場合.

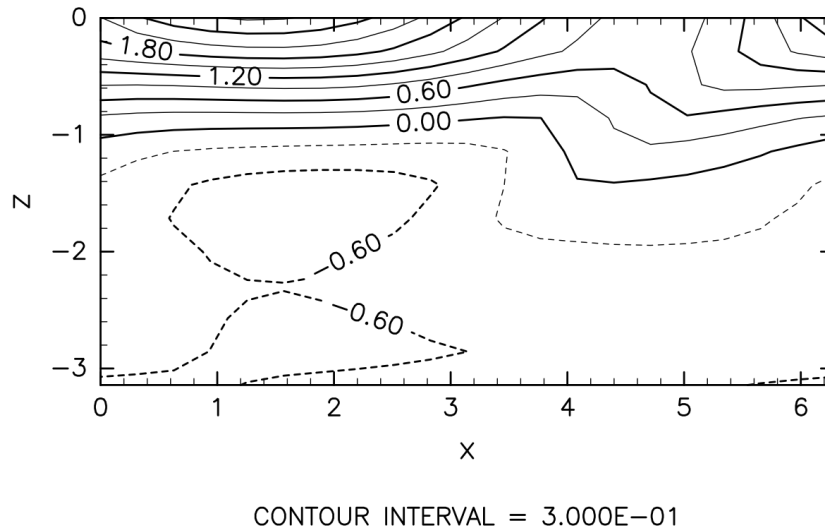


図 4.2.39  $t = 3000$  での温度場. ただし run5 の場合.

る摂動を変えても立ち上がる平均流に変化は見られないことが分かる。

図 4.2.35 と図 4.2.40 から、摂動を与えなくとも平均流は立ち上がること、それゆえ異なる摂動を与えても平均流に変化は見られないこと。立ち上がる平均流の大きさに変化はないことが分かる。平均流の摂動への依存性はあまり見られない。

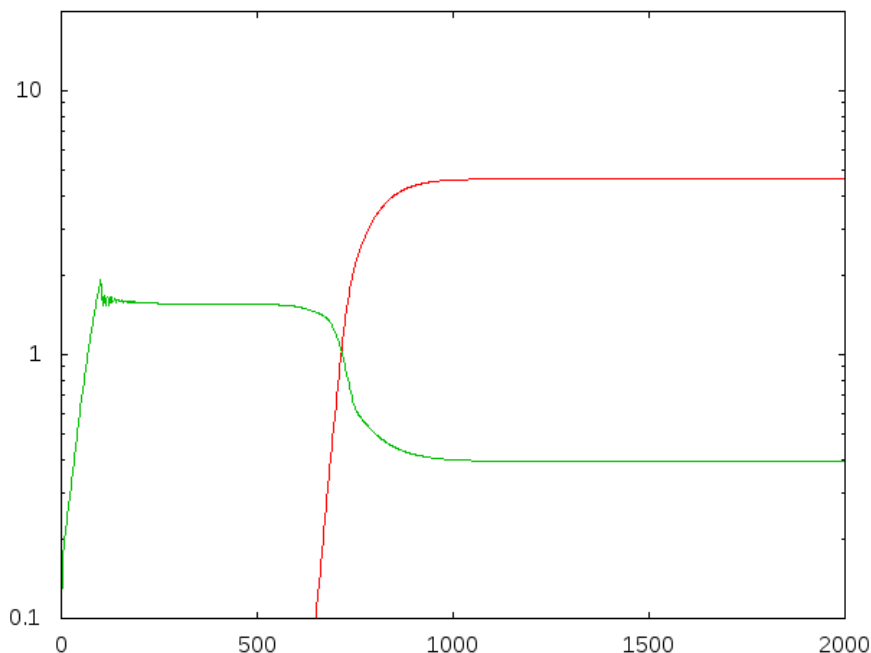


図 4.2.40 図 4.2.1 と同様. ただし run6 の場合.

図 4.2.41, 4.2.42 に run6 の場合での,  $t = 130$ ,  $t = 3000$  の流線関数の場を示す.

図 4.2.43, 4.2.44 に run6 の場合での,  $t = 130$ ,  $t = 3000$  の温度場を示す.

#### 4.2.4 粘性係数への依存度

次に、拡散係数  $E, K$  への依存性を確かめる。

図 4.2.45, 4.2.46 に拡散係数  $E, K$  を時間関数とせず、初期から 0.01 と設定した実験の結果を示す。図 4.2.46 から、拡散係数を小さくすると、平均流の立ち上がる時刻が  $1/2$  ほどになることが分かる。しかし平均流の大きさには変化はないことも分かる。

図 4.2.47, 4.2.48 に run8 の場合での,  $t = 130$ ,  $t = 2000$  の運動量フラックスを示す。

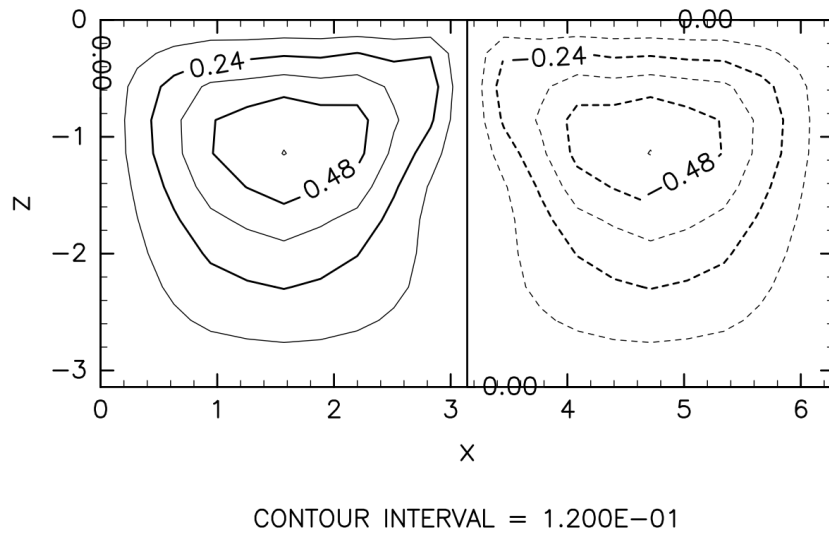


図 4.2.41  $t = 130$  での流線関数の場. ただし run6 の場合.

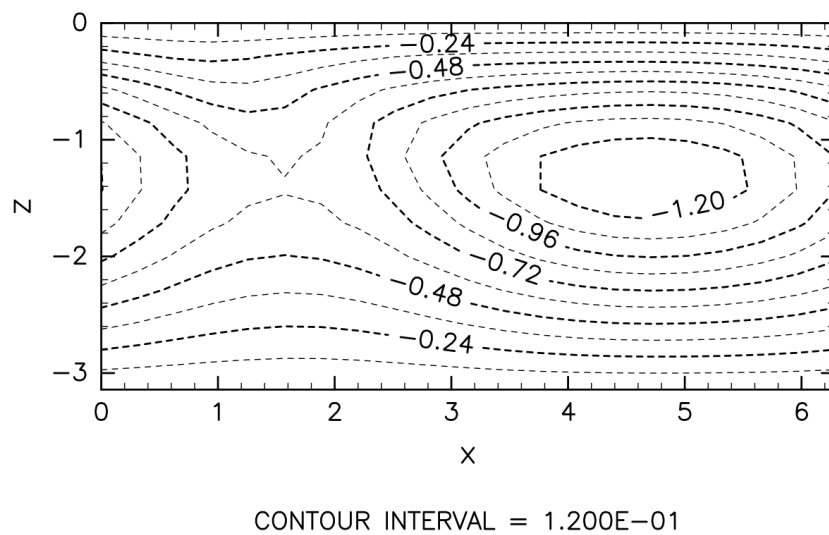
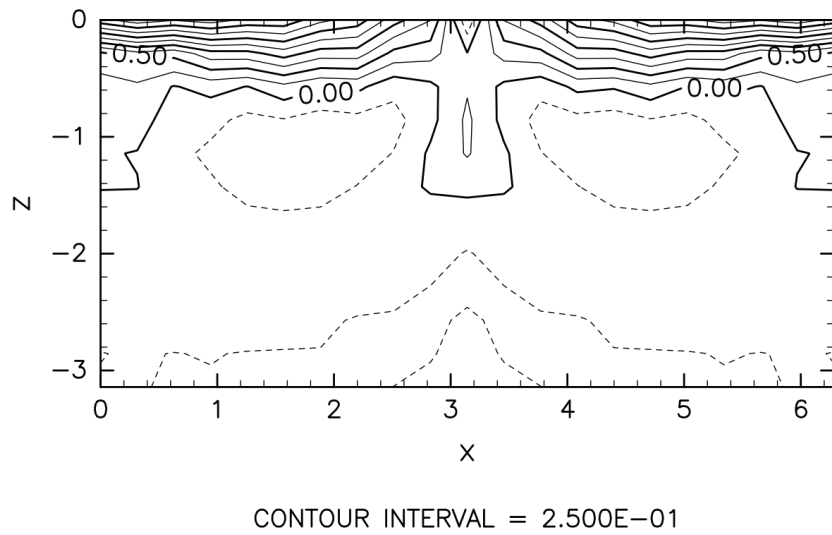
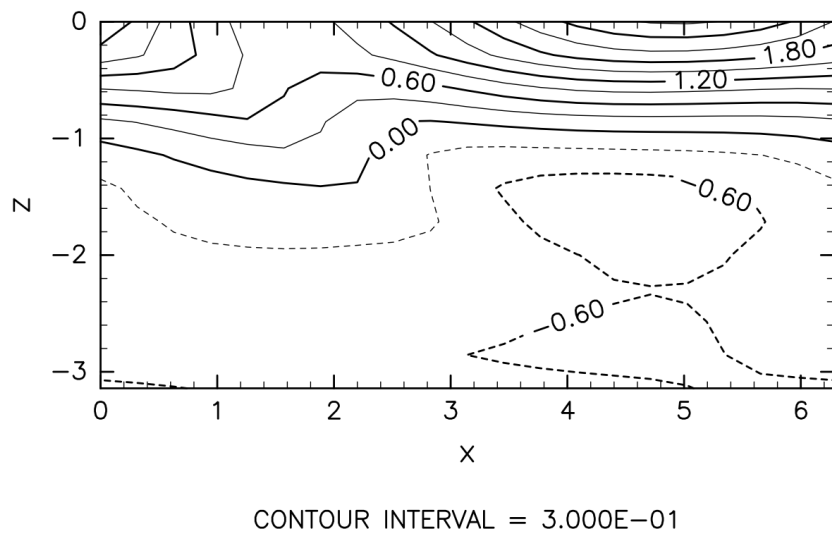


図 4.2.42  $t = 3000$  での流線関数の場. ただし run6 の場合.

図 4.2.43  $t = 130$  での温度場. ただし run6 の場合.図 4.2.44  $t = 3000$  での温度場. ただし run6 の場合.



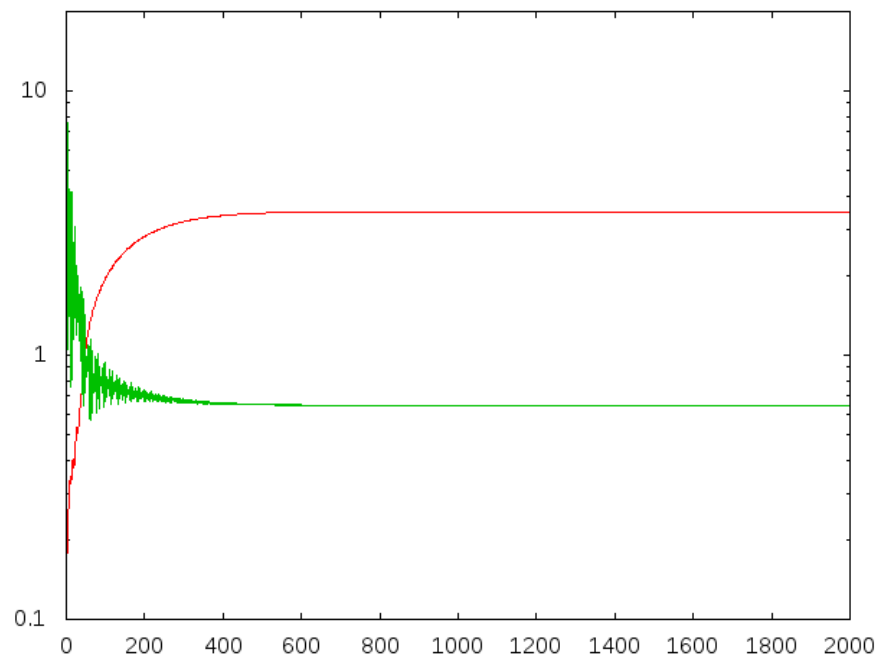


図 4.2.45 図 4.2.1 と同様. ただし run7 の場合.

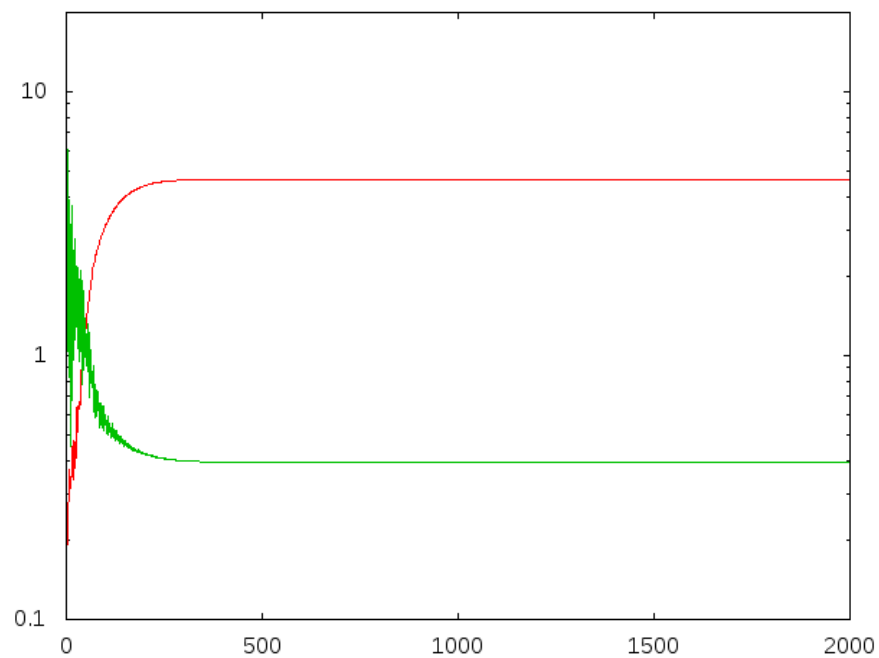


図 4.2.46 図 4.2.1 と同様. ただし run8 の場合.

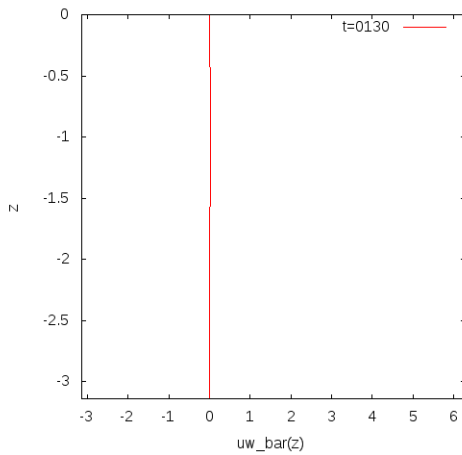


図 4.2.47  $t = 130$  での運動量フラックス. ただし run8 の場合.

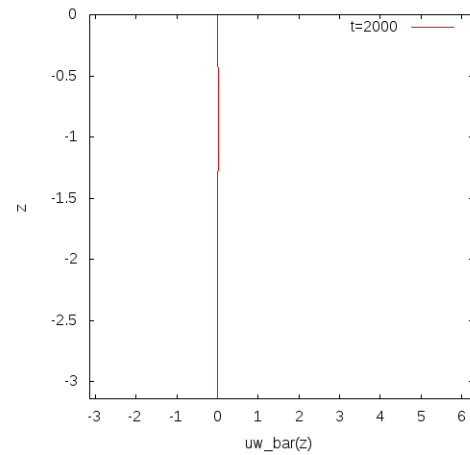


図 4.2.48  $t = 2000$  での運動量フラックス. ただし run8 の場合.

図 4.2.49, 4.2.50 に run8 の場合での,  $t = 130, t = 2000$  の平均東西風を示す.

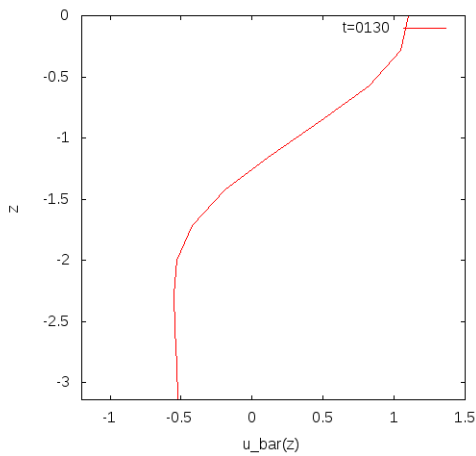


図 4.2.49  $t = 130$  での平均東西風. ただし run8 の場合.

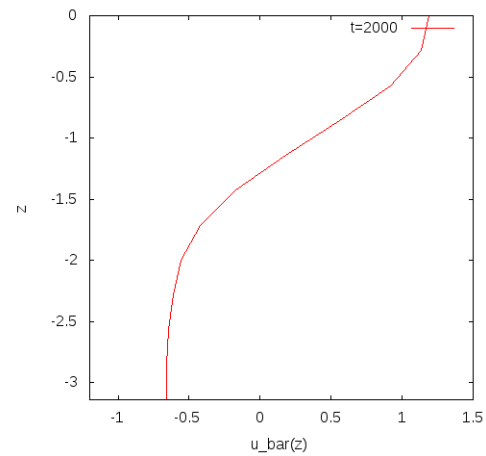


図 4.2.50  $t = 2000$  での平均東西風. ただし run8 の場合.

図 4.2.51, 4.2.52 に run8 の場合での,  $t = 130, t = 2000$  の温度を示す.

図 4.2.53, 4.2.54, 4.2.55 に run8 の場合での,  $t = 10, t = 130, t = 2000$  の流線関数の場を示す.

図 4.2.56, 4.2.57, 4.2.58 に run8 の場合での,  $t = 10, t = 130, t = 2000$  の温度場を示す.

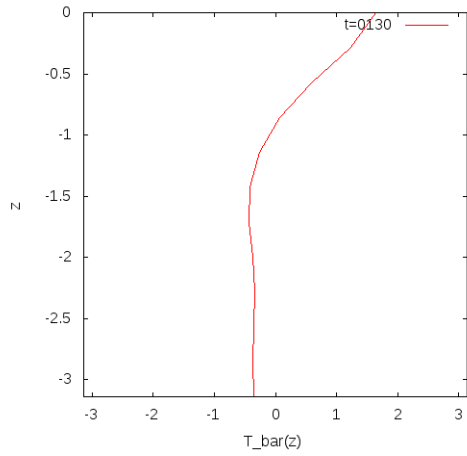


図 4.2.51  $t = 130$  での温度. ただし run8 の場合.

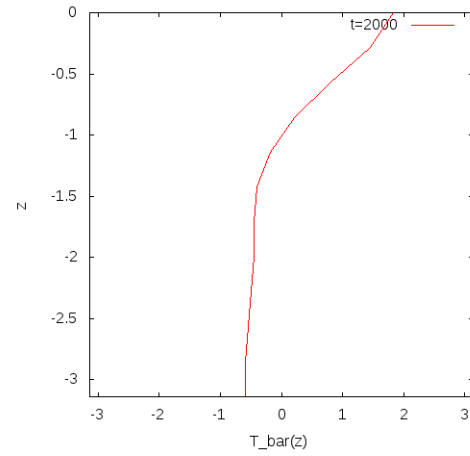
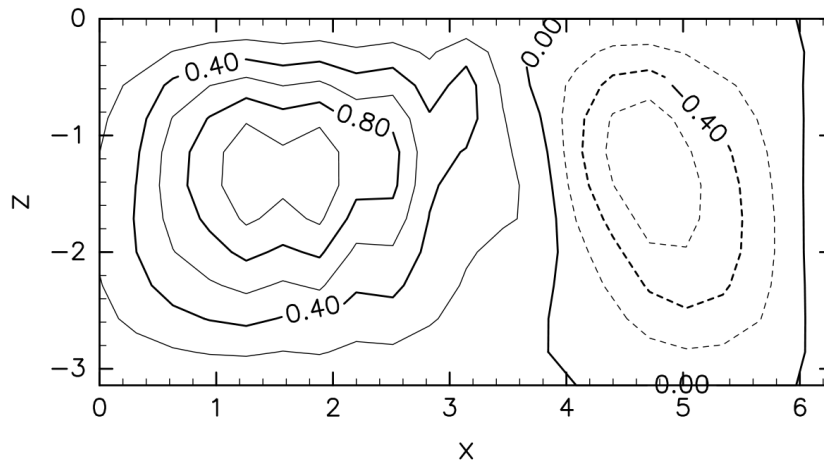
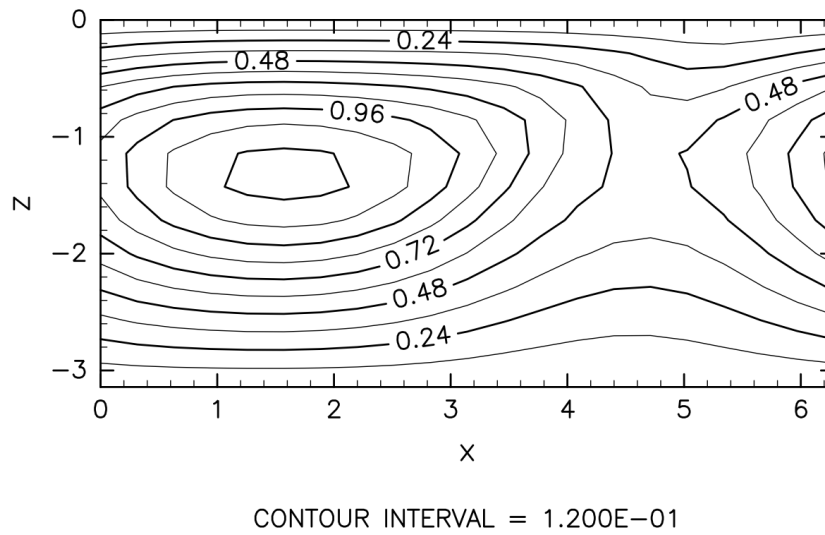
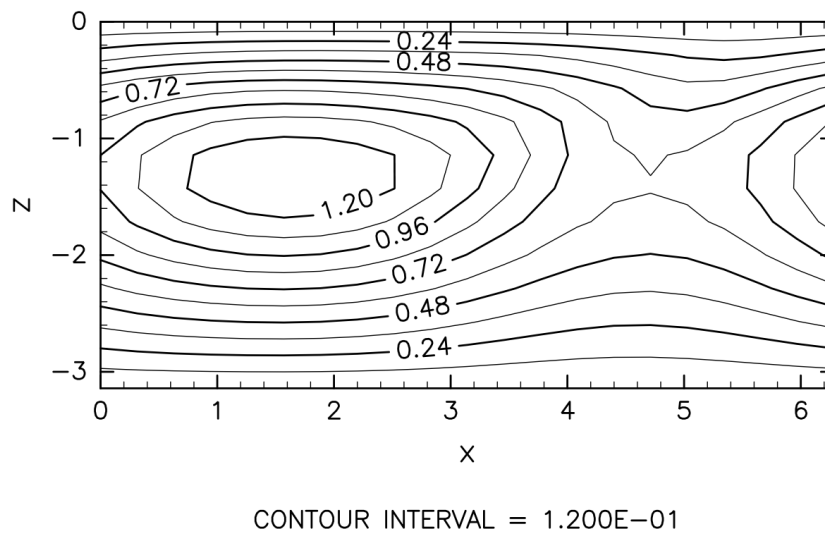


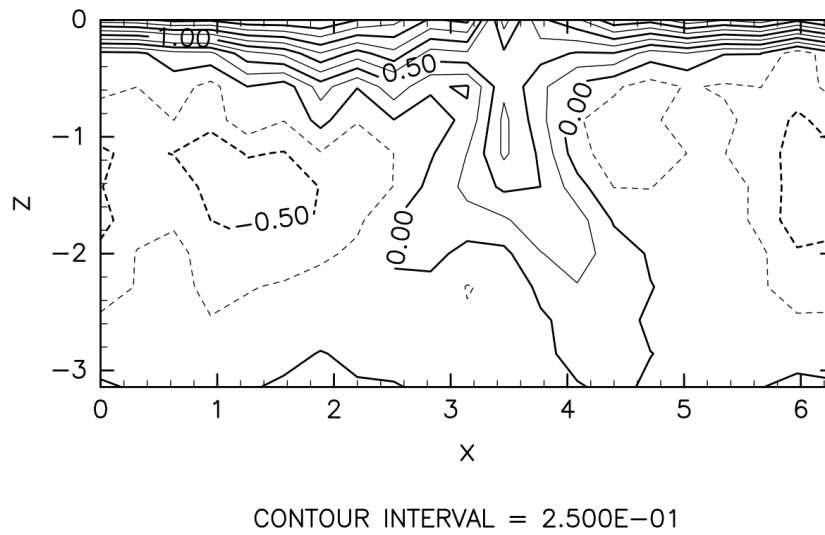
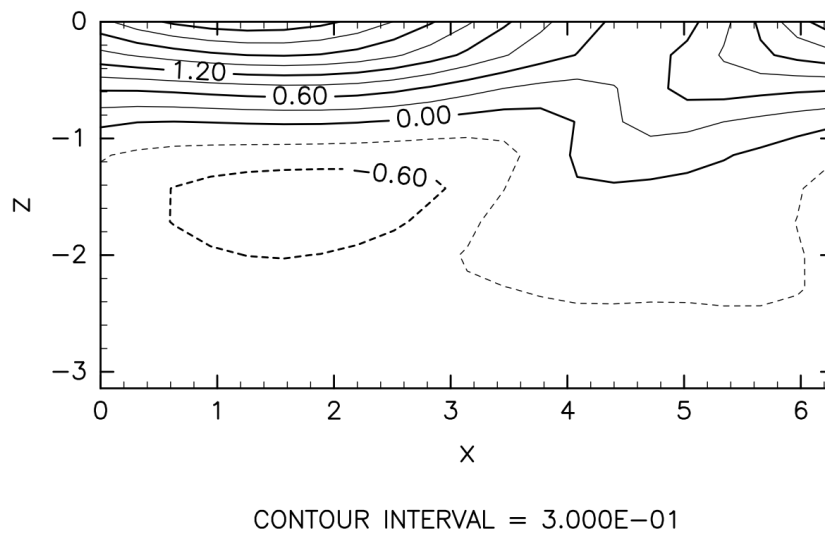
図 4.2.52  $t = 2000$  での温度. ただし run8 の場合.



CONTOUR INTERVAL = 2.000E-01

図 4.2.53  $t = 10$  での流線関数の場. ただし run8 の場合.

図 4.2.54  $t = 130$  での流線関数の場. ただし run8 の場合.図 4.2.55  $t = 2000$  での流線関数の場. ただし run8 の場合.

図 4.2.56  $t = 10$  での温度場. ただし run8 の場合.図 4.2.57  $t = 130$  での温度場. ただし run8 の場合.

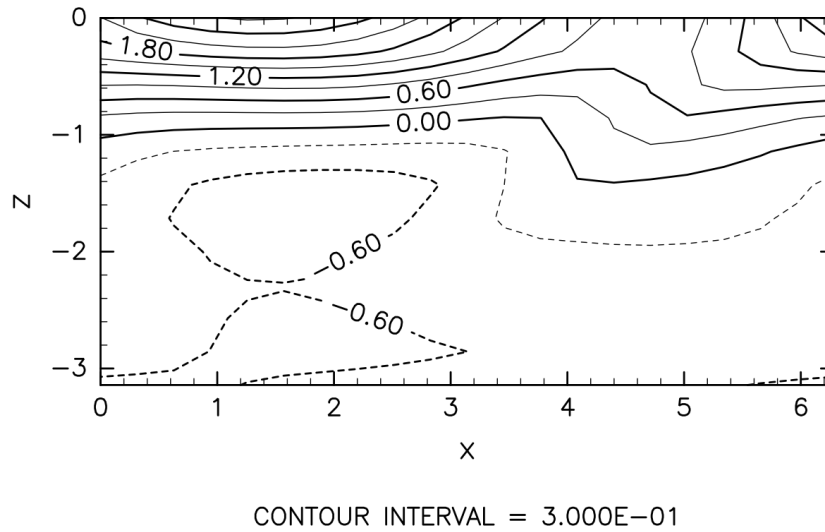


図 4.2.58  $t = 2000$  での温度場. ただし run8 の場合.

図 4.2.59, 図 4.2.60 に, 拡散係数をそれぞれ  $E = K = 0.1$ ,  $E = K = 1.0$  とした実験の結果を示す. 拡散係数が大きいと平均流は立ち上がらないことが分かる. 拡散係数のオーダーを大きくすると平均流が立ち上がらないことが分かる.

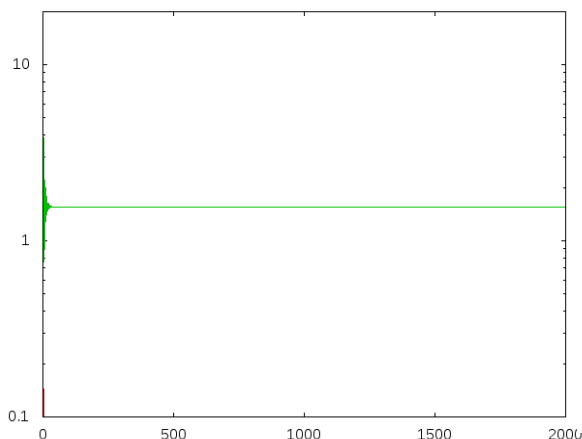


図 4.2.59 図 4.2.1 と同様. ただし run9 の場合.

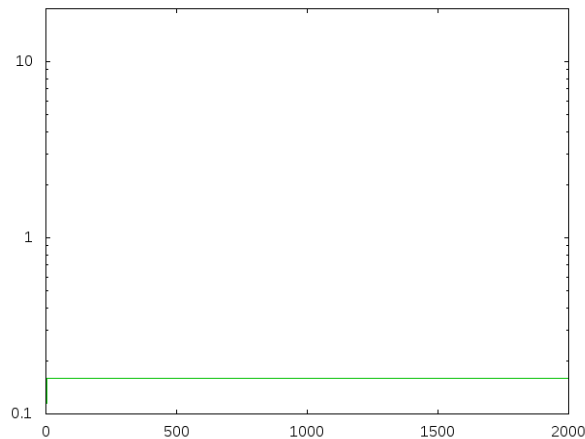


図 4.2.60 図 4.2.1 と同様. ただし run10 の場合.

図 4.2.61 に拡散係数  $E, K$  を時間関数とせず, 初期から 0.005 と設定した実験の結果を示す. 図 4.2.61 から, 拡散係数を小さくすると, 平均流の立ち上がる時刻が  $1/6$  ほどになることが分かる.

図 4.2.62, 4.2.63 に run11 の場合での,  $t = 130, t = 2000$  の運動量フラックスを示す.

図 4.2.64, 4.2.65 に run11 の場合での,  $t = 130, t = 2000$  の平均東西風を示す.

図 4.2.66, 4.2.67 に run11 の場合での,  $t = 130, t = 2000$  の温度を示す.

図 4.2.68, 4.2.69, 4.2.70 に run11 の場合での,  $t = 10, t = 130, t = 2000$  の流線関数の場を示す.

図 4.2.71, 4.2.72, 4.2.73 に run11 の場合での,  $t = 10, t = 130, t = 2000$  の温度場を示す.

図 4.2.74 に拡散係数  $E, K$  を時間関数とせず, 初期から 0.001 と設定した実験の結果を示す. 図 4.2.74 から, 拡散係数を小さくすると, 平均流の立ち上がる時刻が  $1/6$  ほどにな

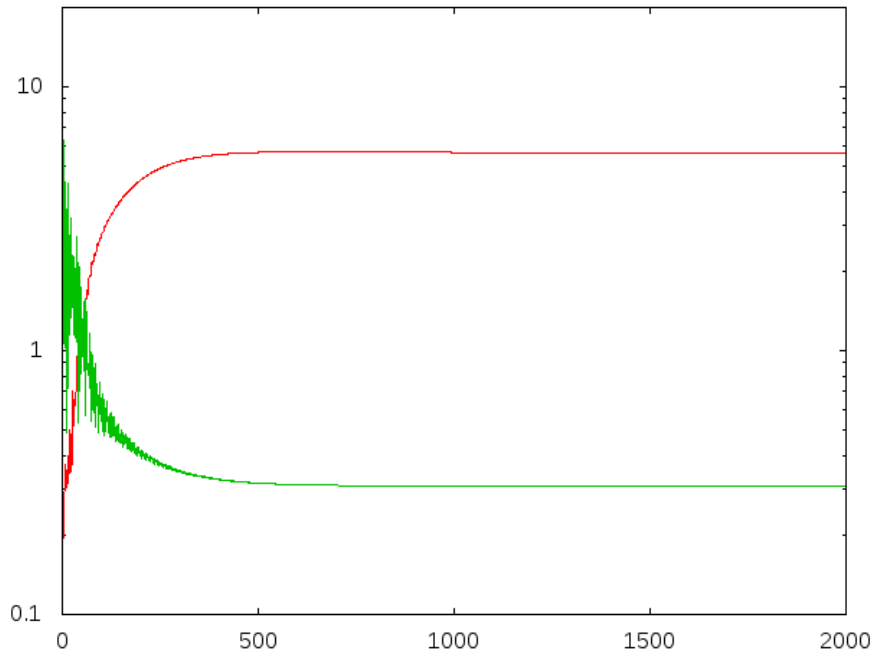


図 4.2.61 図 4.2.1 と同様. ただし run11 の場合.

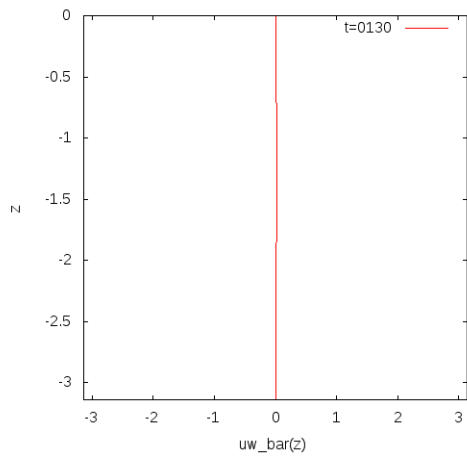


図 4.2.62  $t = 130$  での運動量フラックス. ただし run11 の場合.

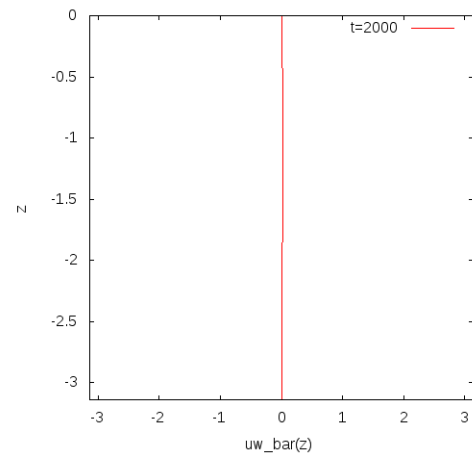


図 4.2.63  $t = 2000$  での運動量フラックス. ただし run11 の場合.



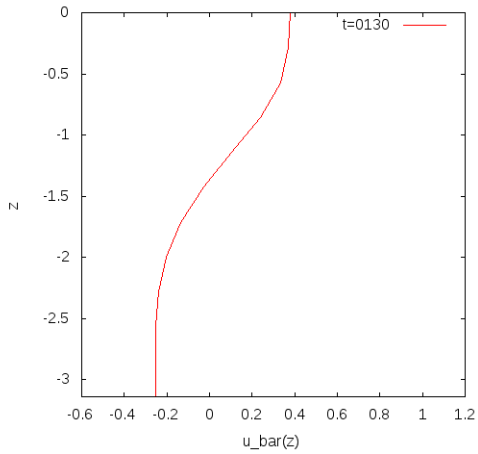


図 4.2.64  $t = 130$  での平均東西風. ただし run11 の場合.

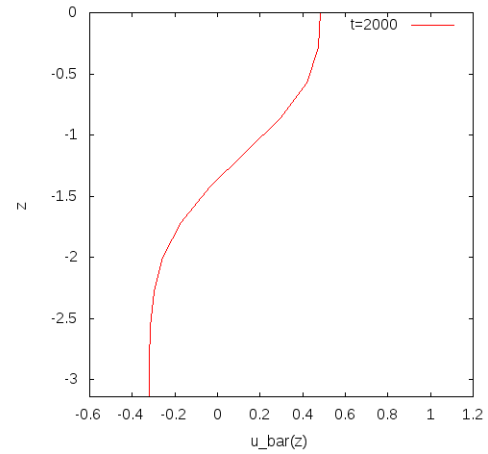


図 4.2.65  $t = 2000$  での平均東西風. ただし run11 の場合.

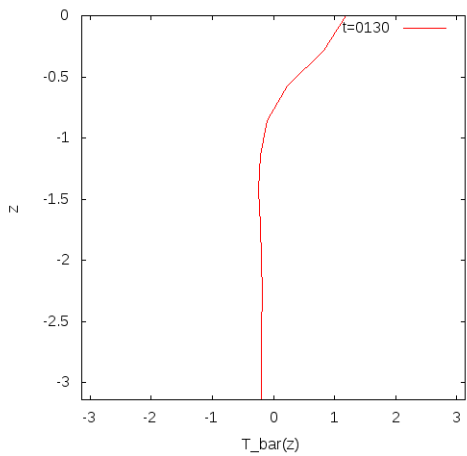


図 4.2.66  $t = 130$  での温度. ただし run11 の場合.

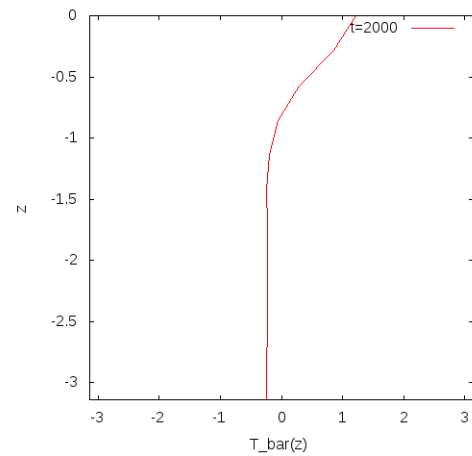


図 4.2.67  $t = 2000$  での温度. ただし run11 の場合.

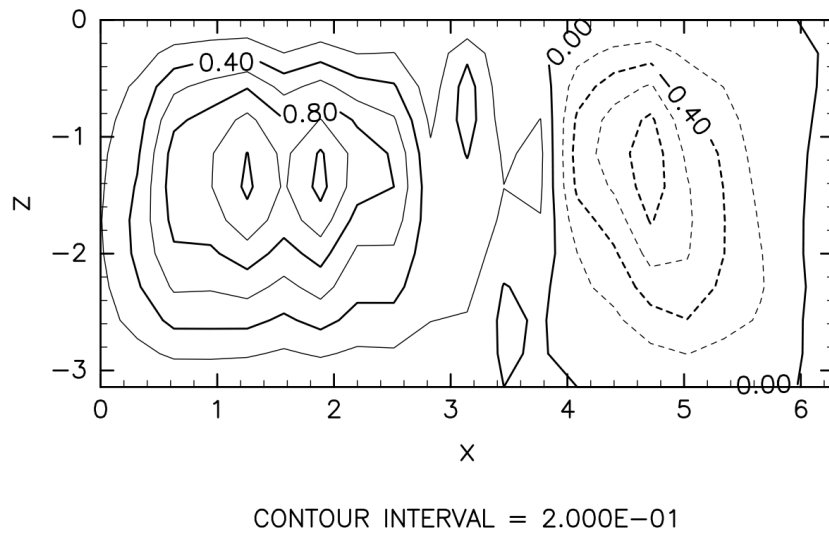


図 4.2.68  $t = 10$  での流線関数の場. ただし run11 の場合.

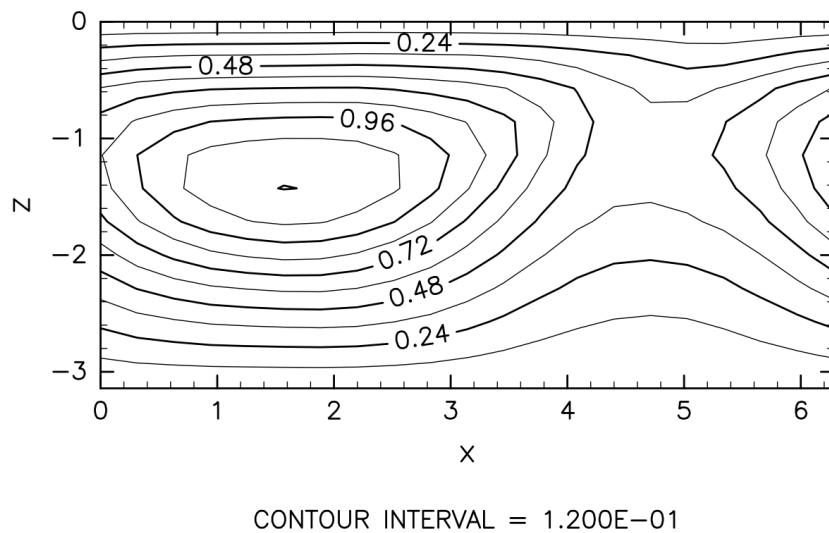


図 4.2.69  $t = 130$  での流線関数の場. ただし run11 の場合.

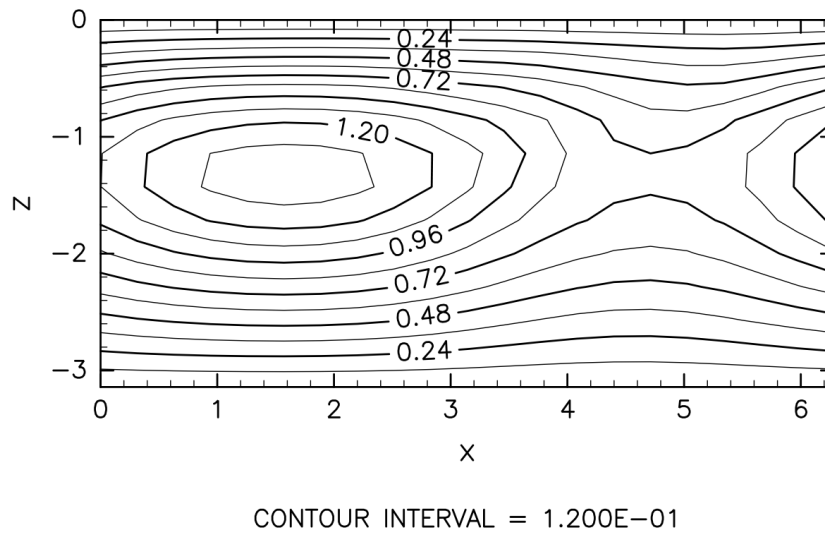


図 4.2.70  $t = 2000$  での流線関数の場. ただし run11 の場合.

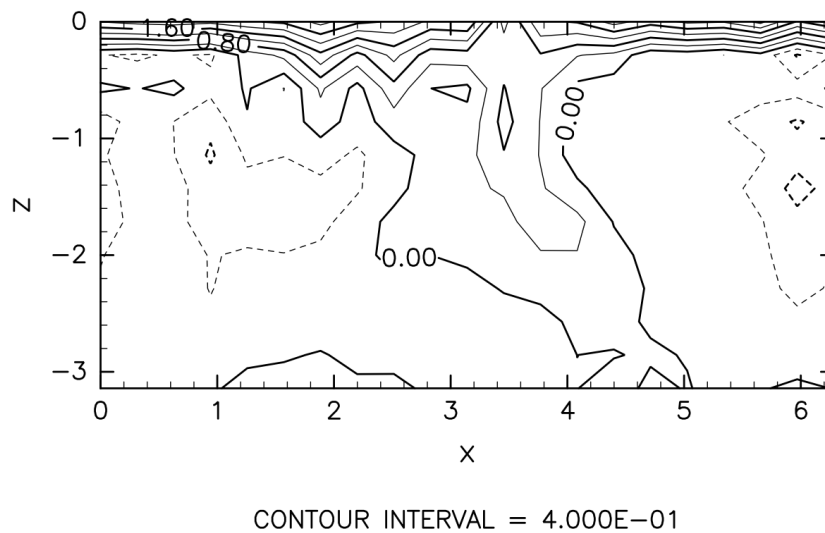


図 4.2.71  $t = 10$  での温度場. ただし run11 の場合.

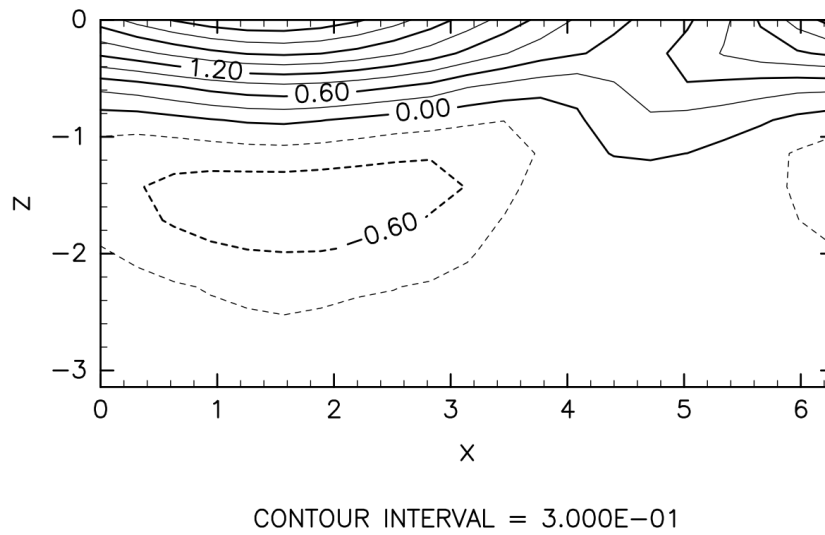


図 4.2.72  $t = 130$  での温度場. ただし run11 の場合.

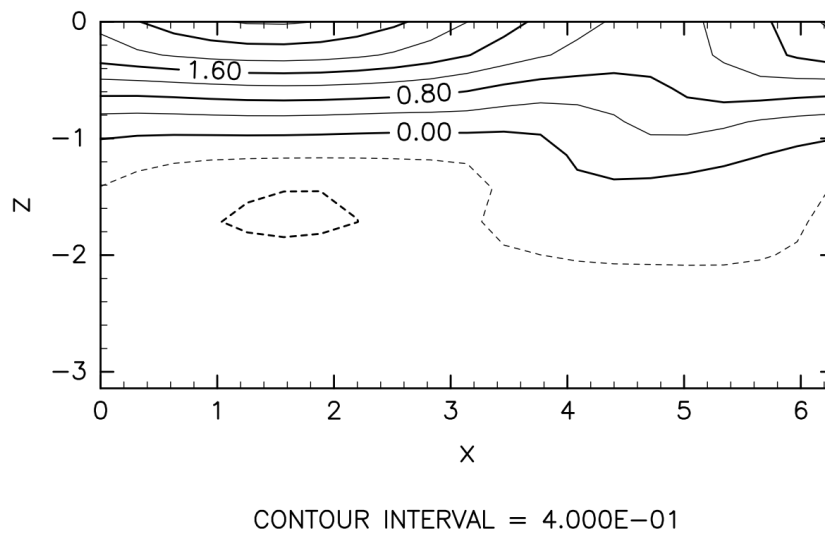


図 4.2.73  $t = 2000$  での温度場. ただし run11 の場合.

ることが分かる.

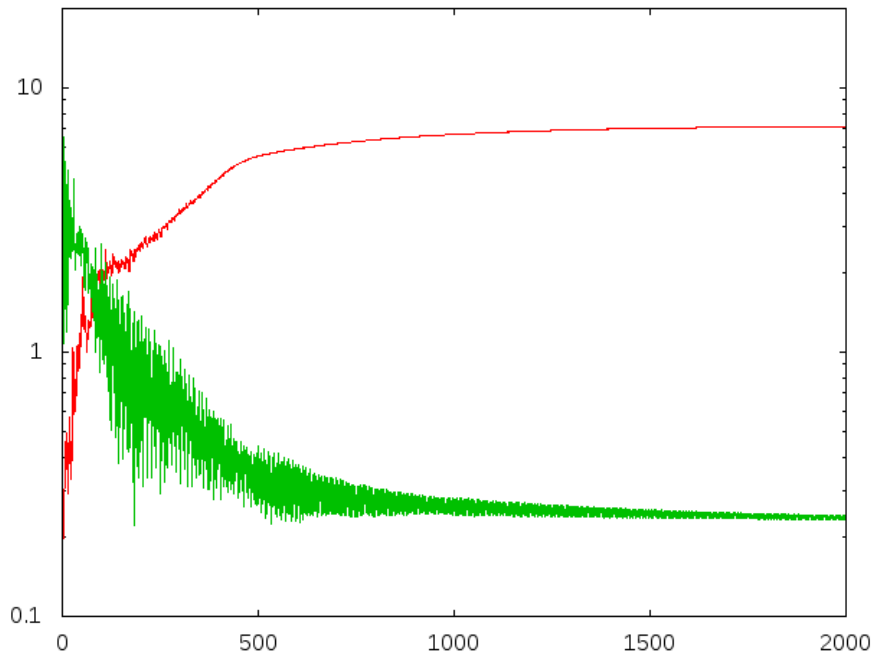


図 4.2.74 図 4.2.1 と同様. ただし run12 の場合.

図 4.2.75, 4.2.76 に run12 の場合での,  $t = 130$ ,  $t = 2000$  の運動量フラックスを示す.

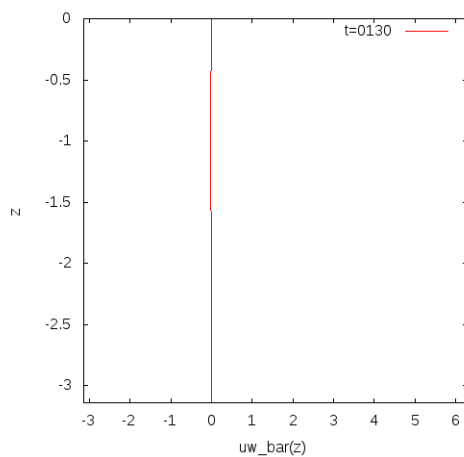


図 4.2.75  $t = 130$  での運動量フラックス. ただし run12 の場合.

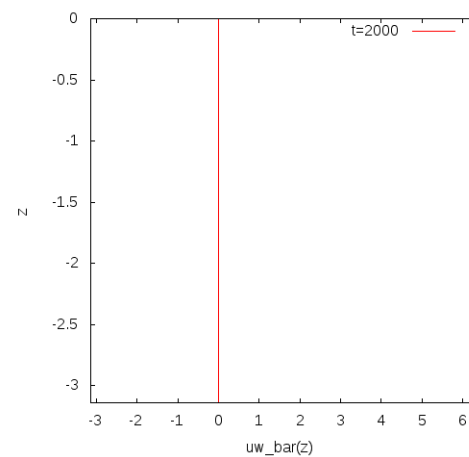


図 4.2.76  $t = 2000$  での運動量フラックス. ただし run12 の場合.

図 4.2.77, 4.2.78 に run12 の場合での,  $t = 130$ ,  $t = 2000$  の平均東西風を示す.

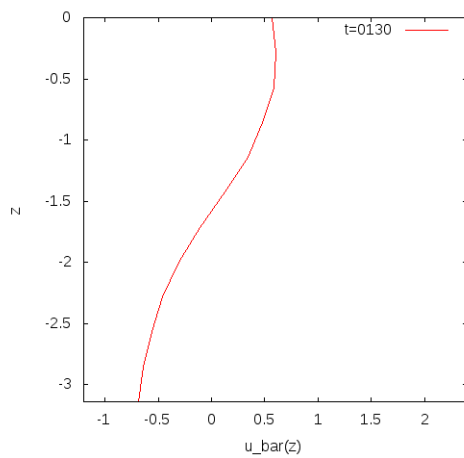


図 4.2.77  $t = 130$  での平均東西風. ただし run12 の場合.

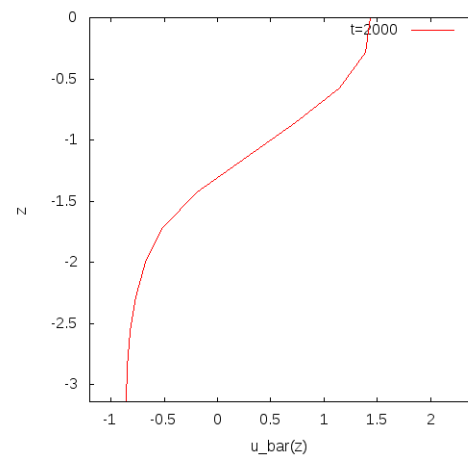


図 4.2.78  $t = 2000$  での平均東西風. ただし run12 の場合.

図 4.2.79, 4.2.80 に run12 の場合での,  $t = 130$ ,  $t = 2000$  の温度を示す.

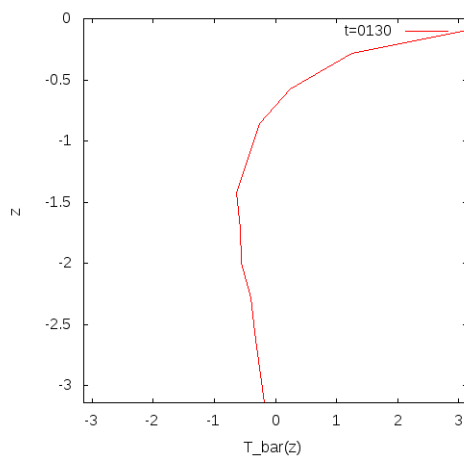


図 4.2.79  $t = 130$  での温度. ただし run12 の場合.

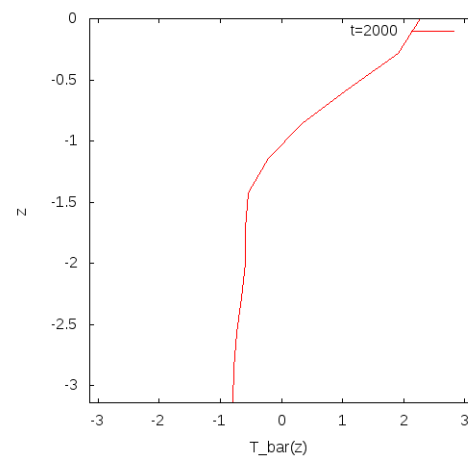
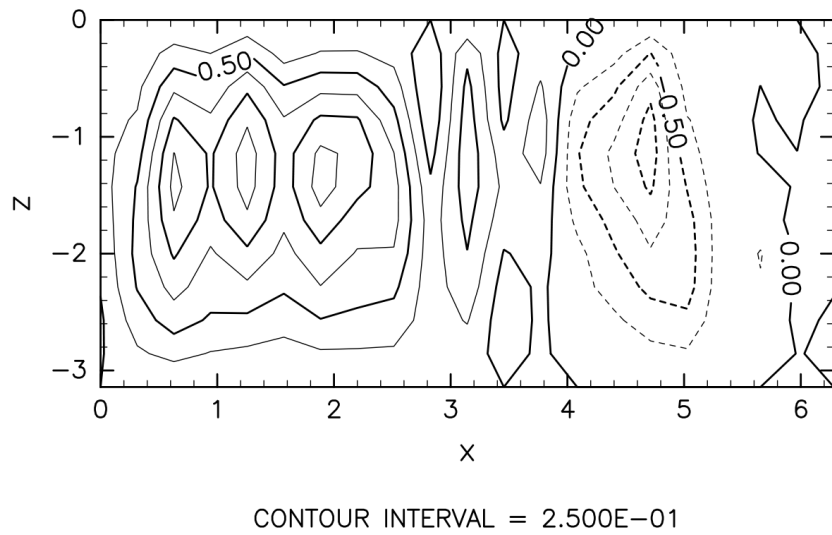
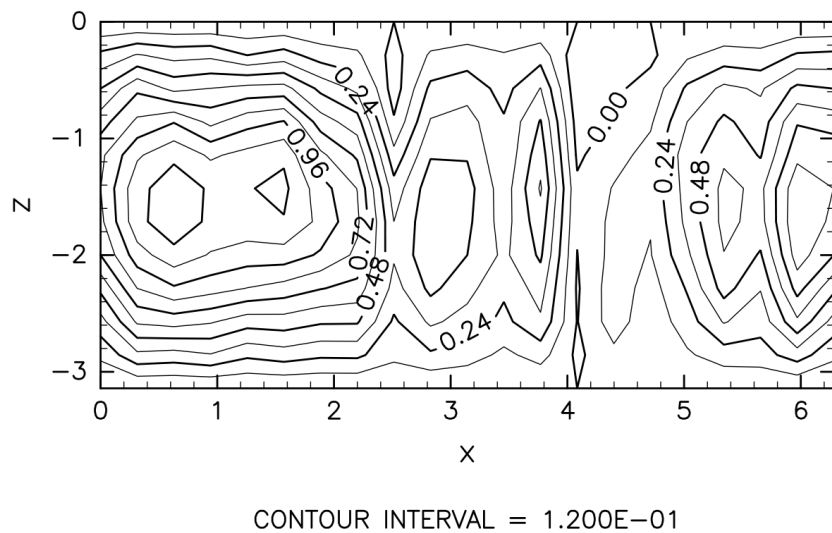
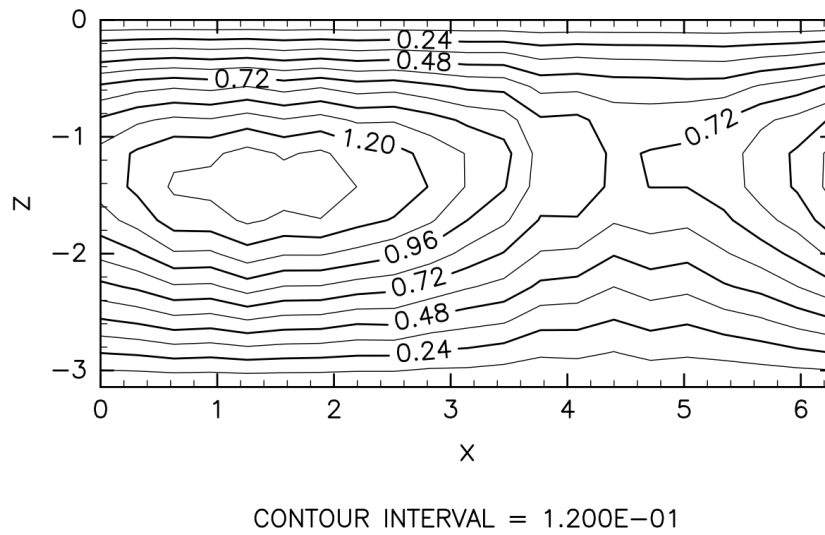
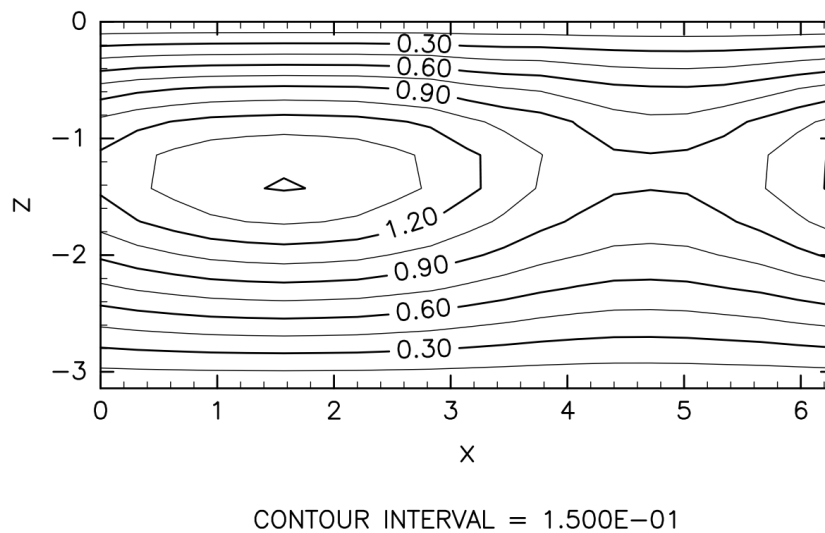


図 4.2.80  $t = 2000$  での温度. ただし run12 の場合.

図 4.2.81, 4.2.82, 4.2.83, 4.2.84 に run12 の場合での,  $t = 10$ ,  $t = 130$ ,  $t = 500$ ,  $t = 3000$  の流線関数の場を示す.

図 4.2.85, 4.2.86, 4.2.87, 4.2.88 に run12 の場合での,  $t = 10$ ,  $t = 130$ ,  $t = 500$ ,  $t = 3000$  の温度場を示す.

図 4.2.81  $t = 10$  での流線関数の場. ただし run12 の場合.図 4.2.82  $t = 130$  での流線関数の場. ただし run12 の場合.

図 4.2.83  $t = 500$  での流線関数の場. ただし run12 の場合.図 4.2.84  $t = 2000$  での流線関数の場. ただし run12 の場合.



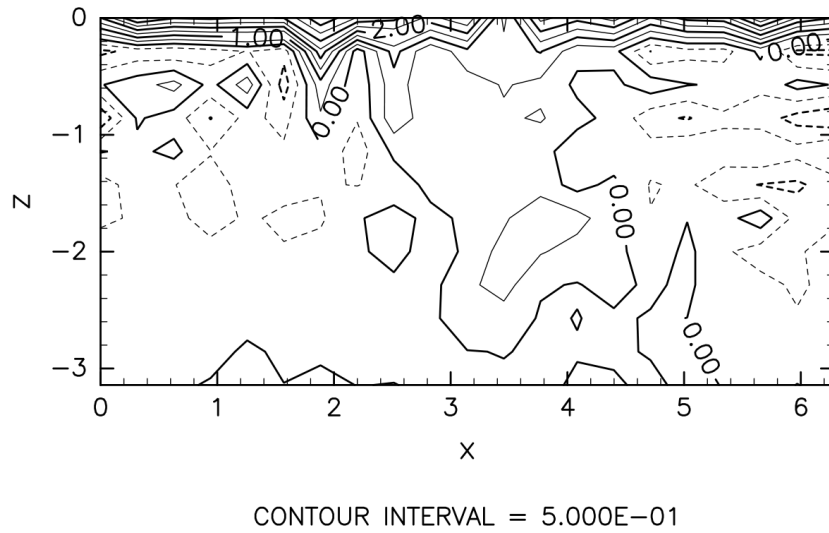


図 4.2.85  $t = 10$  での温度場. ただし run12 の場合.

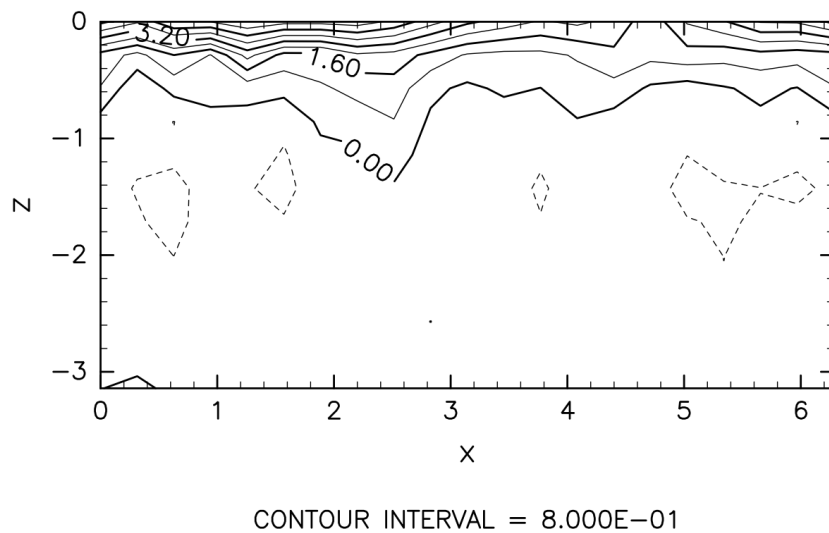
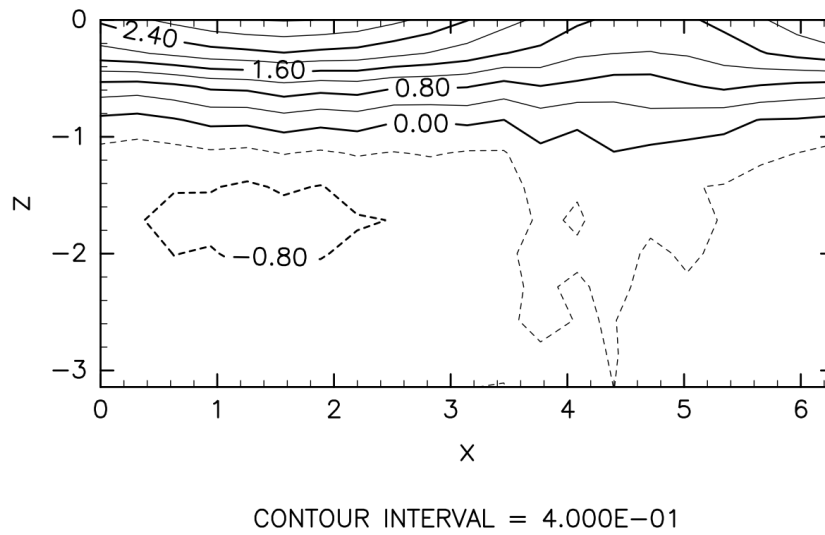
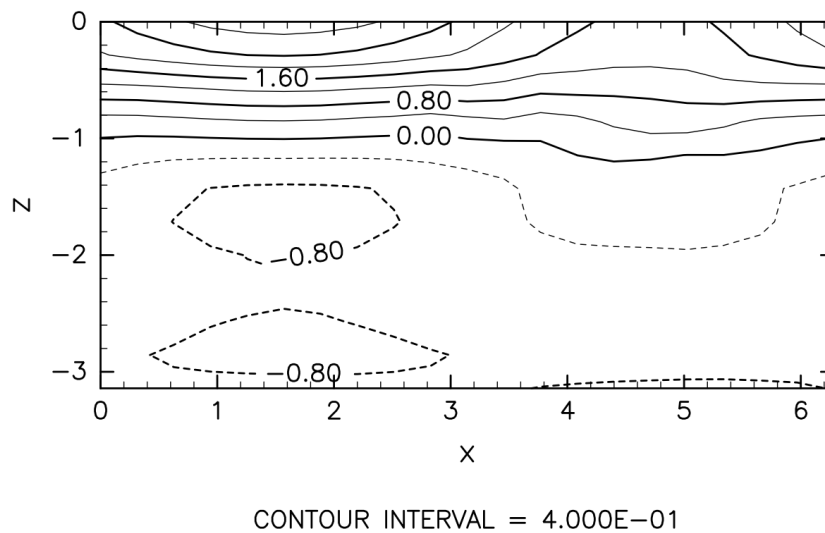


図 4.2.86  $t = 130$  での温度場. ただし run12 の場合.

図 4.2.87  $t = 500$  での温度場. ただし run12 の場合.図 4.2.88  $t = 2000$  での温度場. ただし run12 の場合.

## 第5章

# 結論

本論文は、金星大気のスーパローテーションの形成を夜昼間対流によって説明する Thompson(1970) にしたがってモデルを作成し、数値実験をおこなった。

まず Thompson のモデルでは水平粘性を考慮しておらず、彼の設定のもとでは平均流は充分加速されないことが分かった。平均流が充分加速されるためには、水平粘性が必要である。Thompson のモデルで初期に形成される夜昼間対流の安定性について数値的に調べたところ、この対流は不安定で自発的に平均流が卓越する流れに遷移していくことが分かった。

# 謝辞

本研究をおこなうにあたり、基礎理論講義や基礎理論読書会などを通して、林祥介教授には研究の指針や先行研究の紹介や比較をしていただきました。岩山隆寛准教授には、論文の書き方から数式の導出などを丁寧に教えて頂きました。高橋芳幸准教授にはプログラムの基礎や流体力学における考え方など多くのご指導を頂きました。また、様々な助言をしてくださった流体地球物理学教育研究分野の研究室の皆さまにも大変お世話になりました。ここに深く感謝し、心よりお礼申し上げます。

## 参考文献

- (1) Rory, Thompson. 1970: *Journal Of The Atmospheric Sciences*, 27, 1107-1116
- (2) 松田佳久, 2016: 日本流体力学会誌, **35**, 373-378
- (3) 松田佳久, 2000: 惑星気象学, 東京大学出版会
- (4) 川上一郎, 1998: 数値計算, 岩波書店, 141-165