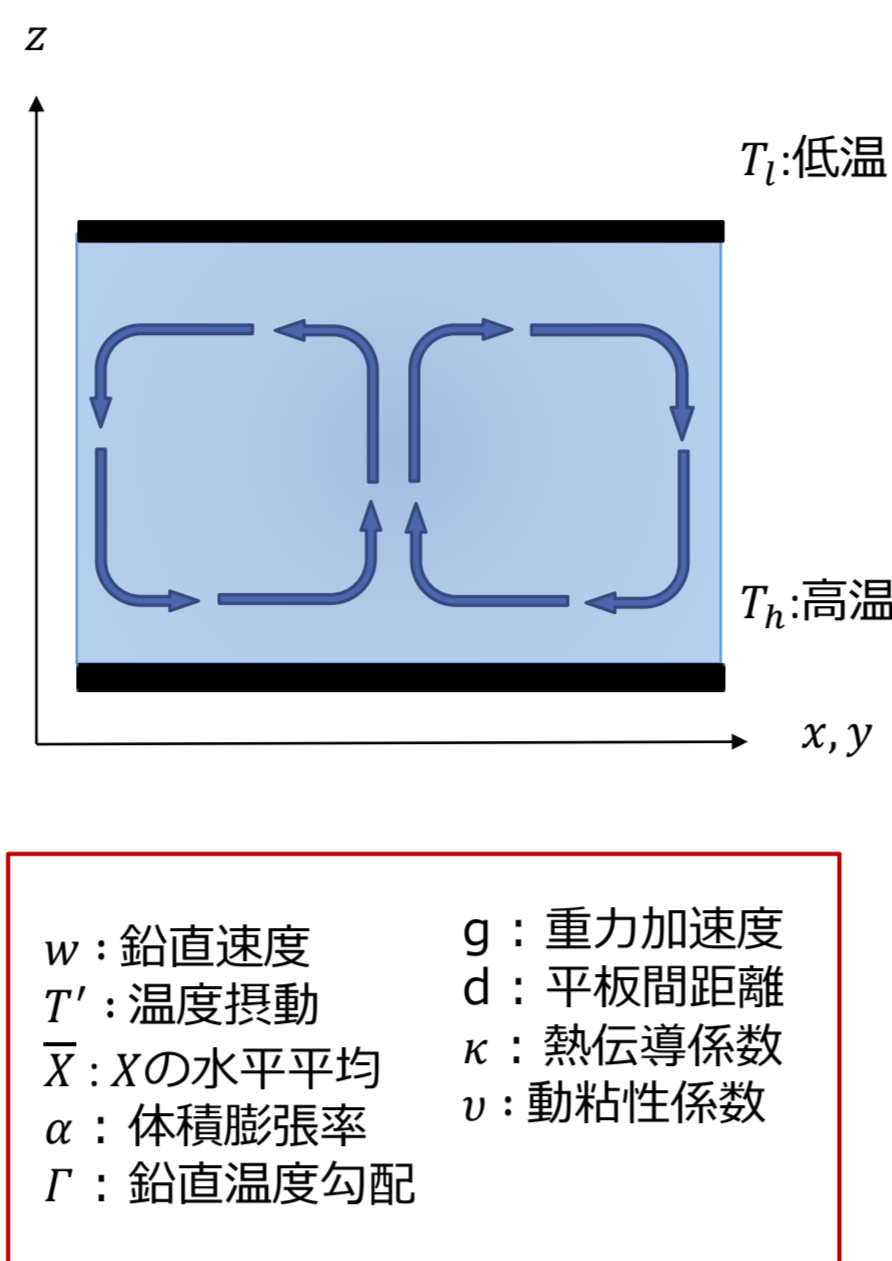


レイリー・ベナール対流における熱輸送とレイリー数の関係についての考察

流体地球物理学教育研究分野 1363402s 池田 諒

はじめに

- レイリー・ベナール対流とは
 - 上部平板が低温,下部平板が高温の定常な状態に保たれた2枚の平板間で起こる対流
- Herring (1963) の研究
 - $N \propto R^{\frac{1}{3}}$ を数値実験によって発見
 - N : 下部から上部への熱輸送量
 - R : レイリー数



$$N = \frac{\overline{wT'}}{\kappa\Gamma} \quad R = \frac{\alpha\Gamma g d^4}{\kappa\nu}$$

本研究の内容

- $N \propto R^{\frac{1}{3}}$ の関係を数値実験によって確認する
 1. Herring(1963) の再現実験 (支配方程式の単純化を行う)
 2. 単純化を行わない支配方程式の数値シミュレーション
- Herring (1963) で行われた支配方程式の単純化の妥当性について考察

Herring (1963) の再現結果

- 支配方程式 (無次元化された形)

$$\left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right) \nabla^2 \Psi = -R \frac{\partial T'}{\partial x} \quad \text{: 移流項を無視した渦度方程式}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right) T' = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad \text{: 移流項を無視した熱力学方程式}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right) \overline{T'} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{T' \frac{\partial \Psi}{\partial x}} \right) \quad \text{: 水平平均をとった熱力学方程式}$$

σ : プラントル数
 t : 時間
 Ψ : 流線関数
 R : レイリー数
 T' : 温度摂動
 \overline{X} : X の水平平均

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

- 計算領域
鉛直方向の長さを1とした.
- 境界条件
水平方向: 周期境界条件
鉛直方向: $T(z=0, t) = 0, T(z=1, t) = -1$
 $w(z=0, t) = w(z=1, t) = 0$ (T : 温度)

- 時間差分
Adams-Bashforth 法 (時間差分間隔 $\Delta t = 10^{-5}$)
- その他の条件
変数は $A(x, z, t) = \sum_{n,\alpha} f_\alpha(x) A_n^\alpha \sin n\pi z$ のように Fourier 級数展開を行い, 鉛直波数 n は80までの和, 水平波数 α は熱輸送が最大となる値 (表1参照) のみを用いた. ここで $f_\alpha(x)$ は $\nabla_1^2 f_\alpha(x) = -\pi^2 \alpha^2 f_\alpha(x), |f_\alpha f_{\alpha'}|^2 = \delta_{\alpha\alpha'}$ を満たす任意の関数である. また, プラントル数 σ は1とした.

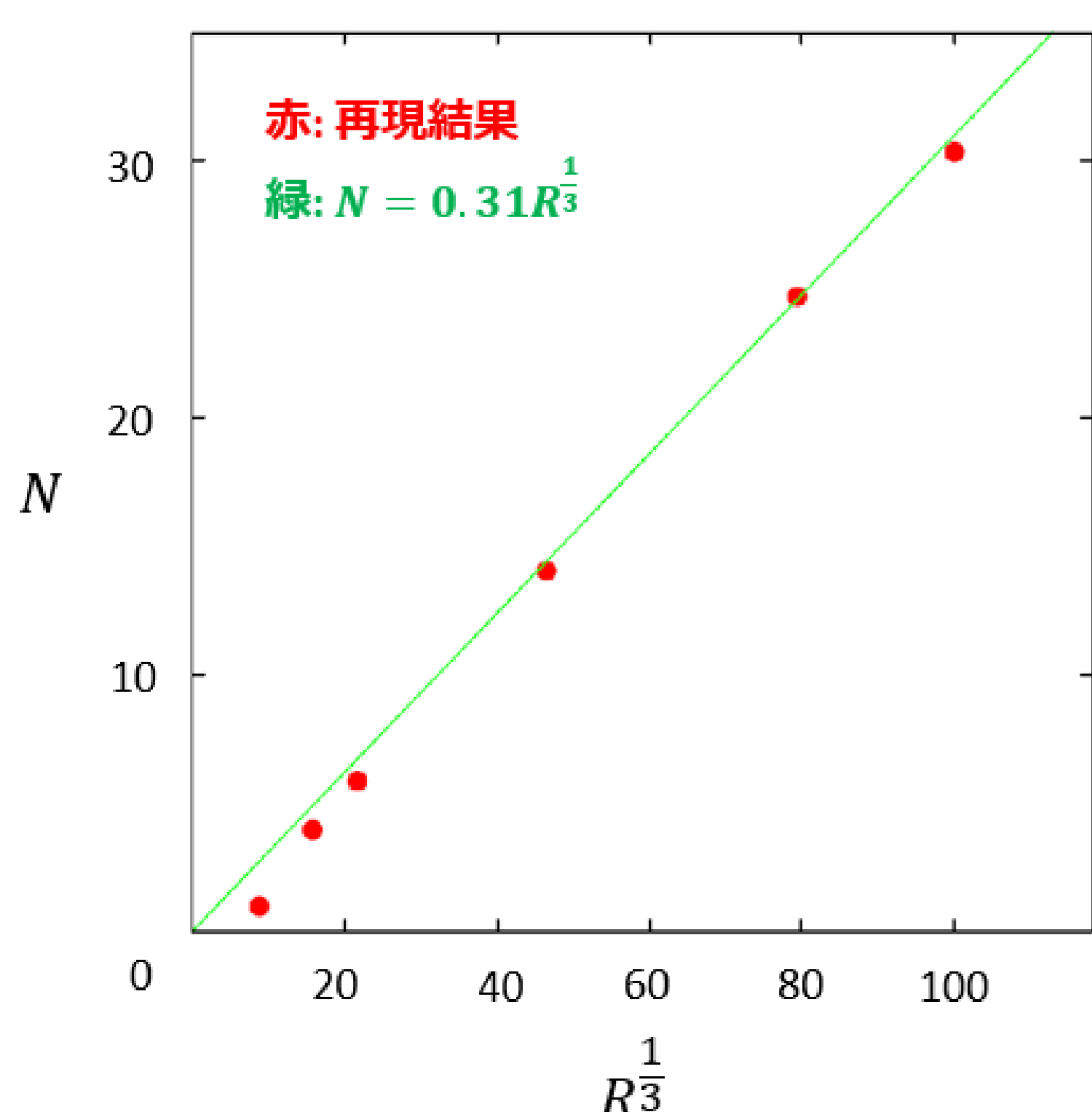


表1 使用した水平波数

R	α
657.5	0.8
4×10^3	0.8
10^4	1.0
10^5	1.5
5×10^5	1.5
10^6	1.5

ここで $R = 657.5$ は対流が起きるレイリー数の下限, 臨界レイリー数 R_c である.

左図から, $R > 4000$ において $N \propto R^{\frac{1}{3}}$ の関係を満たすことが分かる. この結果は Herring (1963) の実験を正しく再現したものである.

熱輸送量 N とレイリー数 R の関係 (Herring (1963) の再現結果)

単純化しない支配方程式を用いた数値シミュレーションの結果

- 支配方程式 (無次元化された形)

$$\left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right) \nabla^2 \Psi = -R \frac{\partial T'}{\partial x} + \frac{1}{\sigma} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial (\nabla^2 \Psi)}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial (\nabla^2 \Psi)}{\partial x} \right\}$$

: 渦度方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right) T' = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial T'}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial T'}{\partial x}$$

: 熱力学方程式

- 計算領域
鉛直方向の長さ z を1に固定
水平方向の長さ x が 2, 4, 8 の場合について実験
- 境界条件
水平方向: 周期境界条件
鉛直方向: $T(z=0, t) = 0, T(z=1, t) = -1$
 $w(z=0, t) = w(z=1, t) = 0$

- 時間差分
Adams-Bashforth 法
時間差分間隔 $\Delta t = 10^{-4}$ ($R = 657.5, 4 \times 10^3, 10^4$ のとき)
 $= 10^{-6}$ ($R = 10^5, 5 \times 10^5$ のとき)

- 空間差分
中央差分法 (移流項は Arakawa Jacobian を用いた)
格子点数は表2参照

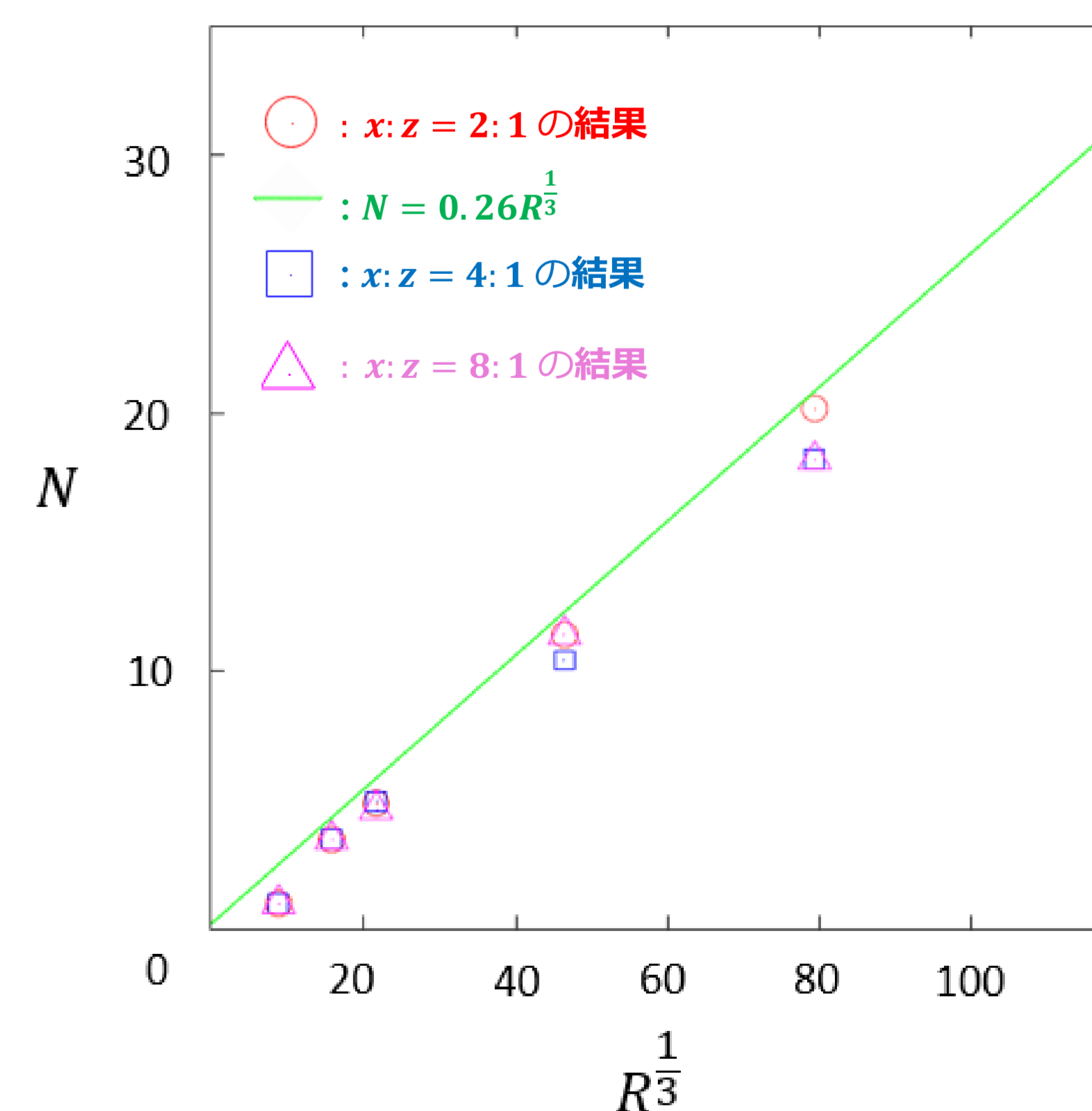


表2 各実験における空間解像度

$x:z$	R	格子点数
2:1	657.5	64×32
	4×10^3	64×32
	10^4	64×32
	10^5	128×64
	5×10^5	256×128
4:1	657.5	128×32
	4×10^3	128×32
	10^4	128×32
	10^5	256×64
	5×10^5	512×128
8:1	657.5	256×32
	4×10^3	256×32
	10^4	256×32
	10^5	512×64
	5×10^5	1024×128

熱輸送量 N とレイリー数 R の関係 (単純化しない支配方程式を用いた数値シミュレーションの結果)

上の図より, 鉛直方向の領域の長さに対して水平方向の領域の長さが小さい場合には Herring (1963) と同様に $N \propto R^{\frac{1}{3}}$ が満足されるが, 水平方向の領域の長さを大きくすると $R > 10^5$ でこの関係が破綻することが分かる.

考察と結論

支配方程式の単純化を行わない数値シミュレーションでは, 水平方向に広い領域のもとで計算を行うと, Herring (1963) で確認されている $N \propto R^{\frac{1}{3}}$ の関係が得られなかった. この結果の違いは, Herring (1963) ではある単一の水平波数のみを考慮した計算を行っていたのに対し, 単純化しない数値シミュレーションでは全ての水平波数を含み, さらにそれらの相互作用も含んだ計算を行ったことによる為である. 従って Herring (1963) の結果は限定された条件の下でのみ妥当と考えられる.

参考文献

Herring, J. R., 1963: Investigation of Problems in Thermal Convection. *J. Atmos. Sci.*, **20**, 325-338.