準地衡 2 層モデルを用いた地衡流乱流の研究

岡崎 正悟

神戸大学大学院 理学研究科 惑星学専攻
流体地球物理学教育研究分野
修士 2 回生

2016 年 10 月 20 日 (木)

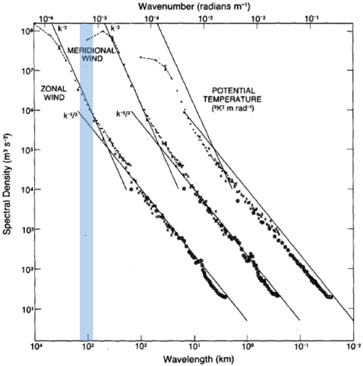
大気セミナー

@神戸大学 自然科学総合研究棟 3 号館 508

目次

地球大気の観測から

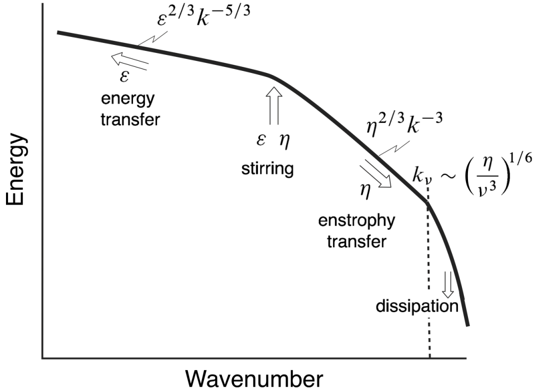
- 航空機観測で得られたデータのスペクトル解析 (Nastrom and Gage 1985)
  - エネルギースペクトルは, 低波数側で k^{-3}, 高波数側で $k^{-5/3}$ の依存性
  - このスペクトルは, 客観解析データや GCM でも確認されており, 普遍的なものであると考えられている.
  - このスペクトルを「Nastrom-Gage スペクトル」と呼ぶ.
- 地球大気の大規模運動は, 水平 2 次元流体的な性質を持つので, 2 次元乱流のスペクトルと Nastrom-Gage スペクトルは類似している... かも知れない.
  - 水平 2 次元流体的な性質の理由;
    1. 幾何学的に薄い
    2. 回転軸方向の運動が抑制される
    3. 安定な密度成層により, 鉛直方向の運動が抑制される



大気のエネルギースペクトル (Nastrom and Gage 1985)

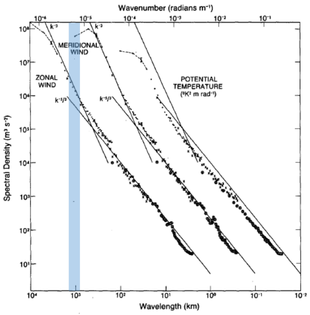
2 次元一様等方性乱流のエネルギースペクトル

- エネルギーを注入した波数よりも
  - 低波数側: $k^{-5/3}$ のスペクトル... エネルギーが輸送される
  - 高波数側: k^{-3} のスペクトル... エンストロフィーが輸送される

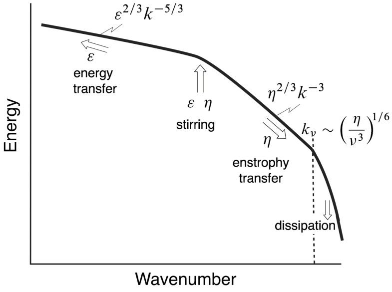


2 次元乱流のエネルギースペクトル (Vallis 2006)

Nastrom-Gage スペクトルの特徴



大気のエネルギースペクトル (Nastrom and Gage 1985)



2 次元乱流のエネルギースペクトル (Vallis 2006)

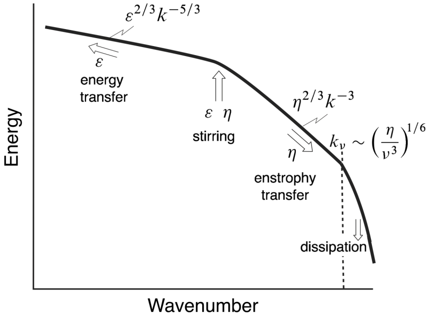
- エネルギー注入波数よりも高波数側に注目
  - k^{-3} はエンストロフィー慣性領域
  - より高波数側にある $k^{-5/3}$ が不思議

Nastrom-Gage スペクトルの形成メカニズムの説明

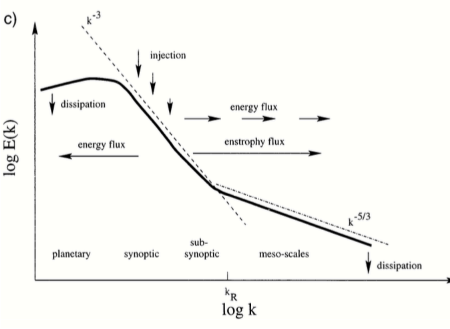
1. 3 次元的な運動による説明 (Koshyk et al. 1999, Hamilton et al. 2008 など)
    - 大気運動の発散成分が $k^{-5/3}$ の形成に寄与
2. 準地衡モデルによる説明 (Tung and Orland 2003)
    - 傾圧不安定によるエネルギー注入 + hidden エネルギー順カスケード

- 1. がもっともらしい説明とされている.
- 学問的に興味が深いのは 2. である

準地衡モデルによる説明



2 次元乱流のエネルギースペクトル
(Vallis 2006)



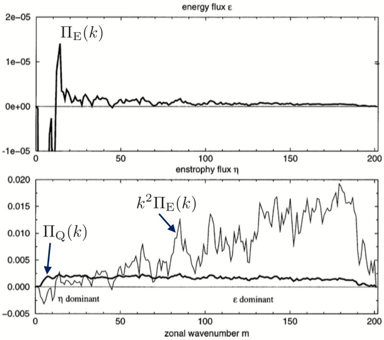
地衡流乱流のエネルギースペクトル
(Tung and Orland 2003)

Tung and Orland (2003) の議論

- $\Pi_{\mathrm{E}}(k)$: エネルギーフラックス, $\Pi_{\mathrm{Q}}(k)$: エンストロフィーフラックス に対して, 準地衡系において

$$k^2\Pi_{\mathrm{E}}(k) - \Pi_{\mathrm{Q}}(k) > 0 \quad (1)$$

なる波数帯域があると主張 (Tung and Orland 2003).
  - そのような波数領域で $k^{-5/3}$ が形成される, と説明



上: エネルギーフラックス, 下: エネルギーフラックスとエンストロフィーフラックスの比較 (Tung and Orland 2003)

本研究の目的

- Tung and Orland (2003) によって提唱された Nastrom-Gage スペクトルの形成メカニズムが普遍的であるか否かについて議論する
  - 準地衡 2 層モデルを用いた数値シミュレーションにより, Nastrom-Gage スペクトルが再現できるかを確かめる
  - エネルギーやエンストロフィーの波数空間内での流れに関する解析と考察を行う
  - 高波数側で

$$k^2\Pi_{\mathrm{E}}(k) - \Pi_{\mathrm{Q}}(k)$$

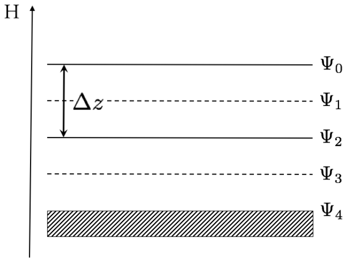
の符号がどうなるかを確認する

系の設定

- Larichev and Held (1995) に基づく, 準地衡 2 層モデル
  - f 平面上のブシネスク流体
  - 鉛直方向に静水圧平衡を仮定
  - 境界条件... 水平方向は周期的, 上下に固体壁が存在

強制機構 鉛直シアーをもつ水平面内で一様な平均流を与える

散逸機構 超粘性による散逸, エクマンダンピング



2 層モデルの概念図

支配方程式

2 層モデルにおける準地衡渦位方程式を変形し, 粘性散逸の項を加えた式

支配方程式

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} =& - J(\psi, \nabla^2 \psi) - J(\tau, (\nabla^2 - k_d^2)\tau) \\
& - U \frac{\partial \nabla^2 \tau}{\partial x} - \frac{\kappa}{2} \nabla^2 (\psi - \tau) - \nu \nabla^8 (\nabla^2 \psi) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \{(\nabla^2 - k_d^2)\tau\}}{\partial t} =& - J(\psi, (\nabla^2 - k_d^2)\tau) - J(\tau, \nabla^2 \psi) \\
& - U \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} - k_d^2 U \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\kappa}{2} \nabla^2 (\tau - \psi) \qquad (3) \\
& - \nu \nabla^8 \{(\nabla^2 - k_d^2)\tau\}
\end{aligned}
$$

ψ : barotropic (順圧) モードの流線函数
τ : baroclinic (傾圧) モードの流線函数

計算方法・初期値

- 空間差分は, スペクトル法
- 時間積分は, 4 次のルンゲ・クッタ法
- 低解像度 (256^2) の計算からスピンアップを行なって, より高解像度 ($512^2, 1024^2$) の計算を行う
  - 統計的平衡状態に達したと思われる時刻で計算を止め, 最後の時刻を初期値としてより高解像度の計算を行う
  - 解析には, 1024^2 の計算結果を利用
- 初期値は, barotropic/baroclinic モードのエネルギースペクトルを全波数で 6.0×10^{-8} とした
- パラメータは以下の通り
  - $k_d = 1.0 \times 10^1$
  - $U = 2.5 \times 10^{-2}$
  - $\kappa = 4.0 \times 10^{-2}$
  - 粘性係数 ν は解像度によって変える
    - 256^2 のとき: $\nu = 1.350 \times 10^{-14}$
    - 512^2 のとき: $\nu = 5.280 \times 10^{-17}$
    - 1024^2 のとき: $\nu = 2.017 \times 10^{-19}$

スペクトルの発展方程式

- エネルギースペクトルの発展方程式

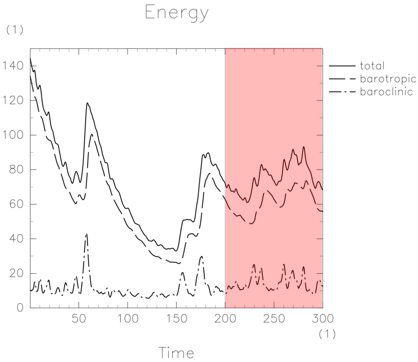
$$\frac{\partial}{\partial t}E(k) = -\frac{\partial}{\partial k}\Pi_{\mathrm{E}}(k) + F^{\mathcal{E}}(k) + D^{\mathcal{E}}_{\mathrm{Ek}}(k) + D^{\mathcal{E}}_{\mathrm{vis}}(k) \tag{4}$$

- エンストロフィースペクトルの発展方程式

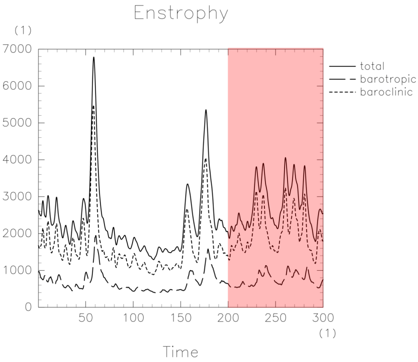
$$\frac{\partial}{\partial t}Q(k) = -\frac{\partial}{\partial k}\Pi_{\mathrm{Q}}(k) + F^{\mathcal{Q}}(k) + D^{\mathcal{Q}}_{\mathrm{Ek}}(k) + D^{\mathcal{Q}}_{\mathrm{vis}}(k) \tag{5}$$

  - $\Pi_{\mathrm{E}}(k)$: エネルギーフラックス
  - $\Pi_{\mathrm{Q}}(k)$: エンストロフィーフラックス
  - $F^{\mathcal{E}}(k), F^{\mathcal{Q}}(k)$: 強制項
  - $D^{\mathcal{E}}_{\mathrm{Ek}}(k), D^{\mathcal{Q}}_{\mathrm{Ek}}(k)$: エクマンダンピングによる散逸項
  - $D^{\mathcal{E}}_{\mathrm{vis}}(k), D^{\mathcal{Q}}_{\mathrm{vis}}(k)$: 粘性による散逸項

エネルギーとエンストロフィーの変化

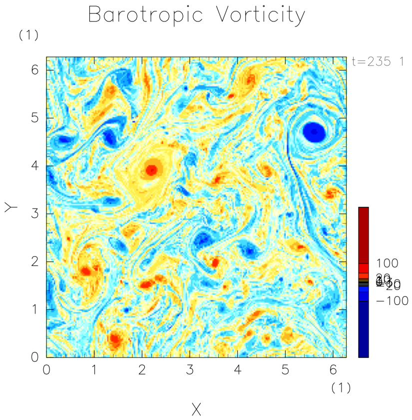


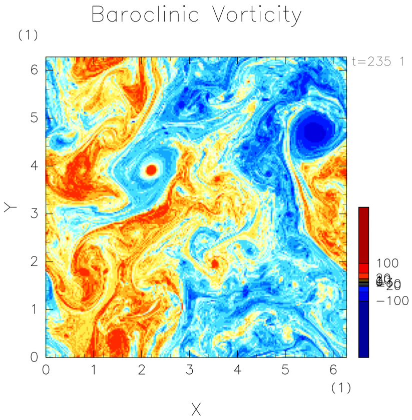
エネルギーの時間変化



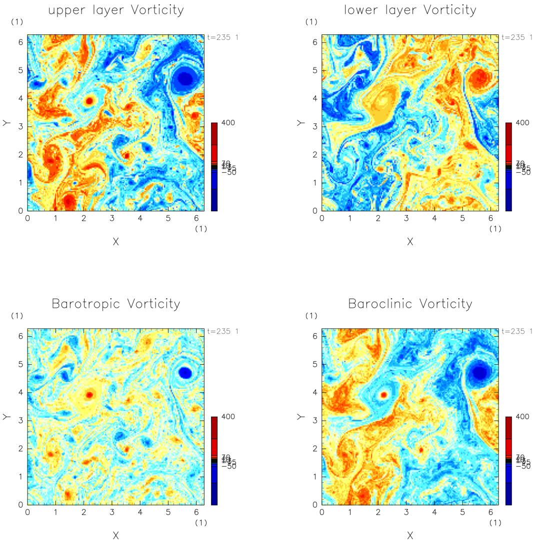
エンストロフィーの時間変化

渦度場の様子 (1)

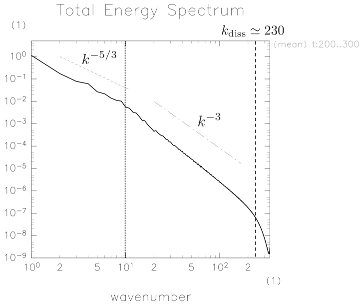

Barotropic Vorticity
(1)
t=235 1
Y
X
(1)
100
-100


Baroclinic Vorticity
(1)
t=235 1
Y
X
(1)
100
-100

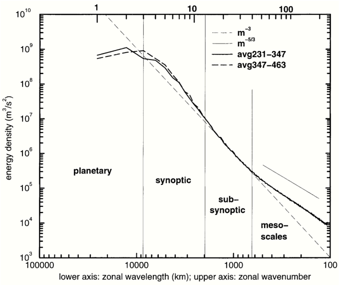
渦度場の様子 (2)


upper layer Vorticity
lower layer Vorticity
Barotropic Vorticity
Baroclinic Vorticity
t=235 1
400
X
Y
(1)

T&O 03 との全エネルギースペクトルの比較



自分の計算結果



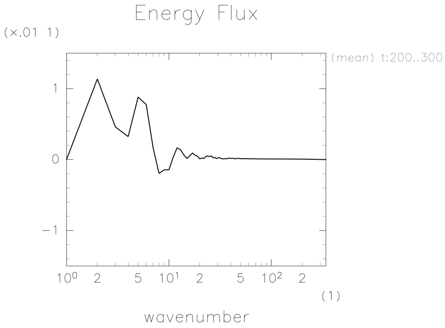
Tung and Orland (2003) Fig.3.

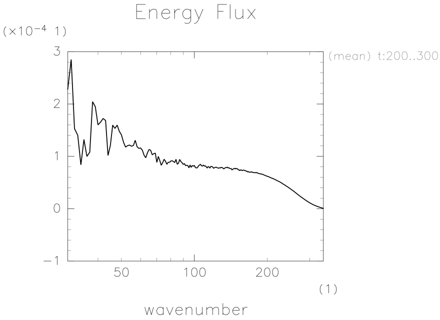
- エンストロフィー散逸波数の計算方法:

$$k_{\rm diss} = \left(\frac{\eta^{1/3}}{\nu} \right)^{1/8} \tag{6}$$

η : 全エンストロフィー散逸率, ν : 粘性係数

エネルギーフラックス

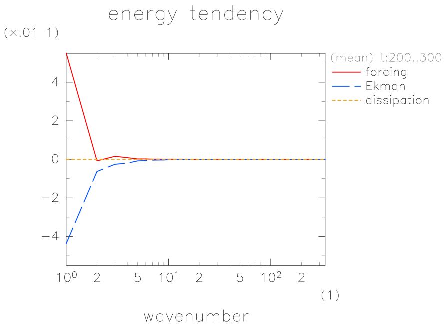


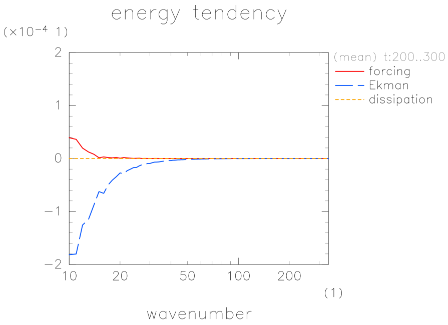


- エネルギー散逸率は, -5.840×10^{-2}
- 低波数側：エネルギー慣性領域とはいえない
  - 最低波数の強制の影響と思われる
- 高波数側：僅かだが, エネルギーがカスケードしている

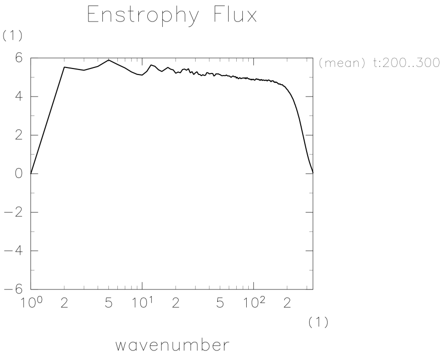
強制・散逸のスペクトル (エネルギー)

$$\frac{\partial}{\partial t}E(k) = -\frac{\partial}{\partial k}\Pi_{\mathrm{E}}(k) + F^{\mathcal{E}}(k) + D^{\mathcal{E}}_{\mathrm{Ek}}(k) + D^{\mathcal{E}}_{\mathrm{vis}}(k) \tag{7}$$





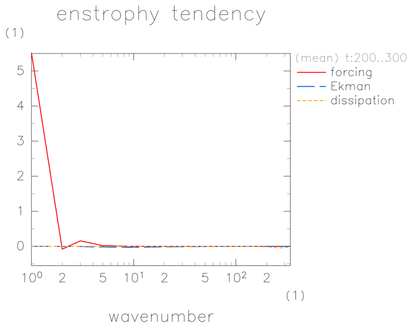
エンストロフィーフラックス

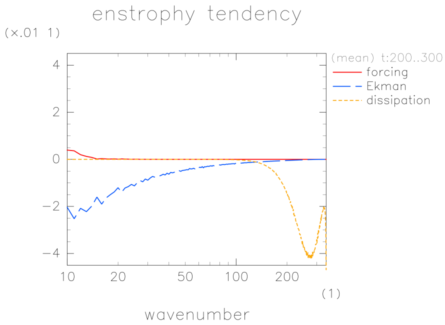


- エンストロフィー散逸率は, -5.5962
- 波数 20∼230 あたりはエンストロフィー慣性領域か?
  - 非線型項以外の寄与が小さいかどうかを調べる

強制・散逸のスペクトル(エンストロフィー)

$$\frac{\partial}{\partial t}Q(k) = -\frac{\partial}{\partial k}\Pi_{\mathrm{Q}}(k) + F^{Q}(k) + D^{Q}_{\mathrm{Ek}}(k) + D^{Q}_{\mathrm{vis}}(k)$$





過去の研究

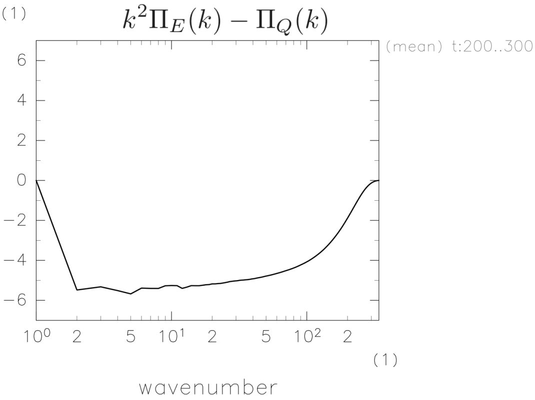
- 2 次元 Navier-Stokes 系では, 全ての波数において

$$k^2\Pi_{\mathrm{E}}(k) - \Pi_{\mathrm{Q}}(k) < 0 \tag{8}$$

であることが証明されている (Gkioulekas and Tung 2007).
- 準地衡系ではどうなるかは分かっていない.

自分の計算結果

- 全波数に渡って, $k^2\Pi_\mathrm{E}(k) - \Pi_\mathrm{Q}(k) < 0$ となっている.
- Tung and Orland 2003 では, エンストロフィー慣性領域で $k^2\Pi_\mathrm{E}(k) - \Pi_\mathrm{Q}(k) > 0$ なる波数があると主張されていたが, それは見られない.



これまでのまとめと今後について

- 準地衡 2 層モデルの構築を行い, 地衡流乱流のシミュレーションを行った
  - Nastrom-Gage スペクトルの再現はできなかった
- エネルギーやエンストロフィーの流れの解析の結果, Tung and Orland 2003 で主張されているメカニズムは再現できなかった
  - 彼らの主張するメカニズムは, 普遍的なものではないと考えられる
- 今後, 異なる設定での数値計算を行い, 考察する

参考文献

- Gkioulekas, E., Tung, K. K., 2007: A new proof on net upscale energy cascade in 2D and QG turbulence, *J. Fluid Mech.*, **576**, 173-189.
- Larichev, V. D. and I. M. Held, 1995: Eddy Amplitudes and Fluxes in a Homogeneous Model of Fully Developed Baroclinic Instability. *J.Phys. Oceanogy.*, **25**, 2285-2297.
- Nastrom, G. D. and K. S. Gage, 1985: A climatology of atmospheric wavenumber spectra of wind and temperature observed by commercial aircraft. *J. Atmos. Sci.*, **42**, 950-960.
- Tung, K. K. and W. W. Orlando, 2003: The k^{-3} and $k^{-5/3}$ Energy spectrum of atmospheric turbulence. quasi-geostrophic two-level model simulation. *J. Atmos. Sci.*, **60**, 824-835.
- Vallis, G. K., 2006: *Atmospheric and oceanic fluid dynamics: fundamentals and large-scale circulation*, Cambridge University Press.

6 付録

- 支配方程式の導出
- 波数空間における詳細保存
  - エネルギー詳細保存
  - エンストロフィー詳細保存
- 数値計算の結果

支配方程式

- 2 層モデルにおける準地衡渦位方程式 (粘性・散逸の項なし)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla}\right)\left\{\boldsymbol{\nabla}^2 \Psi_1 + k_d^2 \frac{\Psi_3 - \Psi_1}{2}\right\} = 0 \tag{9}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{\nabla}\right)\left\{\boldsymbol{\nabla}^2 \Psi_3 + k_d^2 \frac{\Psi_1 - \Psi_3}{2}\right\} = 0 \tag{10}$$

- 流線函数を平均流と平均流からのズレに分離する:

$$\Psi_1 = -Uy + \psi_1(x, y, t) \tag{11}$$

$$\Psi_3 = Uy + \psi_3(x, y, t) \tag{12}$$

順圧モードと傾圧モードへの分離

- barotropic (順圧) モードの流線函数と baroclinic モード (傾圧) モードの流線函数をそれぞれ以下のように定義する;

$$\psi = \frac{\psi_1 + \psi_3}{2}, \tau = \frac{\psi_1 - \psi_3}{2}. \tag{13}$$

- これらを用いて, (9) と (10) は次のように変形される:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\nabla}^2 \psi}{\partial t} = -J(\psi, \boldsymbol{\nabla}^2 \psi) - J(\tau, \boldsymbol{\nabla}^2 \tau) - U \frac{\partial \boldsymbol{\nabla}^2 \tau}{\partial x} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\boldsymbol{\nabla}^2 - k_d^2)\tau}{\partial t} &= -J(\psi, (\boldsymbol{\nabla}^2 - k_d^2)\tau) - J(\tau, (\boldsymbol{\nabla}^2 - k_d^2)\psi) \\ &\quad - U \frac{\partial \boldsymbol{\nabla}^2 \psi}{\partial x} - k_d^2 U \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \tag{15}$$

粘性項とエクマンダンピングの項を加えた式

問題設定に合わせ, (14) と (15) に粘性項とエクマンダンピングによる散逸の項を加える:

モデルで解いている式

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{\nabla}^2\psi}{\partial t} =& - J(\psi, \boldsymbol{\nabla}^2\psi) - J(\tau, (\boldsymbol{\nabla}^2 - k_d^2)\tau) \\ & - U\frac{\partial \boldsymbol{\nabla}^2\tau}{\partial x} - \frac{\kappa}{2}\boldsymbol{\nabla}^2(\psi - \tau) - \nu\boldsymbol{\nabla}^8(\boldsymbol{\nabla}^2\psi)\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial((\boldsymbol{\nabla}^2 - k_d^2)\tau)}{\partial t} =& - J(\psi, (\boldsymbol{\nabla}^2 - k_d^2)\tau) - J(\tau, \boldsymbol{\nabla}^2\psi) \\ & - U\frac{\partial \boldsymbol{\nabla}^2\psi}{\partial x} - k_d^2 U\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\kappa}{2}\boldsymbol{\nabla}^2(\tau - \psi) \\ & - \nu\boldsymbol{\nabla}^8((\boldsymbol{\nabla}^2 - k_d^2)\tau)\end{aligned} \tag{17}$$

エネルギー方程式 (1)

- barotropic モードのエネルギー方程式

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{k}|^2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} |\hat{\psi}(\boldsymbol{k})|^2 = & \underbrace{\sum_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{m}} \frac{1}{2} (\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{m})_z (|\boldsymbol{m}|^2 - |\boldsymbol{l}|^2) \{\mathrm{Re}[\hat{\psi}(\boldsymbol{k})\hat{\psi}(\boldsymbol{l})\hat{\psi}(\boldsymbol{m})]\delta_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}+\boldsymbol{m},0}\}}_{\mathrm{(I)}} \\
& + \underbrace{\sum_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{m}} \frac{1}{2} (\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{m})_z (|\boldsymbol{m}|^2 - |\boldsymbol{l}|^2) \{\mathrm{Re}[\hat{\psi}(\boldsymbol{k})\hat{\tau}(\boldsymbol{l})\hat{\tau}(\boldsymbol{m})]\delta_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}+\boldsymbol{m},0}\}}_{\mathrm{(II)}} \\
& - \underbrace{ik'U|\boldsymbol{k}|^2 \mathrm{Re}\{\hat{\psi}^*(\boldsymbol{k})\hat{\tau}(\boldsymbol{k})\}}_{\mathrm{(III)}} \\
& - \underbrace{\frac{1}{2}\kappa|\boldsymbol{k}|^2 \mathrm{Re}[\hat{\psi}^*(\boldsymbol{k})\{\hat{\psi}(\boldsymbol{k}) - \hat{\tau}(\boldsymbol{k})\}]}_{\mathrm{(IV)}} - \underbrace{\nu|\boldsymbol{k}|^{10}|\hat{\psi}(\boldsymbol{k})|^2}_{\mathrm{(V)}}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

エネルギー方程式 (2)

- baroclinic モードのエネルギー方程式

$$
\begin{aligned}
&(|\boldsymbol{k}|^2 + k_d^2)\frac{\partial}{\partial t}|\hat{\tau}(\boldsymbol{k})|^2 \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{m})_z \mathrm{Re}[\{|\boldsymbol{m}|^2\hat{\tau}(\boldsymbol{k})\hat{\tau}(\boldsymbol{l})\hat{\psi}(\boldsymbol{m}) - |\boldsymbol{l}|^2\hat{\tau}(\boldsymbol{k})\hat{\psi}(\boldsymbol{l})\hat{\tau}(\boldsymbol{m})\}]\delta_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}+\boldsymbol{m},0}}_{(\mathrm{I})} \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{m})_z \mathrm{Re}[\{|\boldsymbol{m}|^2\hat{\tau}(\boldsymbol{k})\hat{\psi}(\boldsymbol{l})\hat{\tau}(\boldsymbol{m}) - |\boldsymbol{l}|^2\hat{\tau}(\boldsymbol{k})\hat{\tau}(\boldsymbol{l})\hat{\psi}(\boldsymbol{m})\}]\delta_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}+\boldsymbol{m},0}}_{(\mathrm{II})} \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{m})_z k_d^2 \mathrm{Re}[\{\hat{\tau}(\boldsymbol{k})\hat{\psi}(\boldsymbol{l})\hat{\tau}(\boldsymbol{m}) - \hat{\tau}(\boldsymbol{k})\hat{\tau}(\boldsymbol{l})\hat{\psi}(\boldsymbol{m})\}]\delta_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}+\boldsymbol{m},0}}_{(\mathrm{III})} \\
&\quad + \underbrace{ik'U|\boldsymbol{k}|^2\mathrm{Re}[\hat{\psi}(\boldsymbol{k})\hat{\tau}^*(\boldsymbol{k})]}_{(\mathrm{IV})} + \underbrace{ik'Uk_d^2\mathrm{Re}[\hat{\psi}(\boldsymbol{k})\hat{\tau}^*(\boldsymbol{k})]}_{(\mathrm{V})} \\
&\quad - \underbrace{\frac{\kappa}{2}|\boldsymbol{k}|^2\mathrm{Re}[\{\hat{\tau}(\boldsymbol{k}) - \hat{\psi}(\boldsymbol{k})\}\hat{\tau}^*(\boldsymbol{k})]}_{(\mathrm{VI})} - \underbrace{\nu|\boldsymbol{k}|^8(|\boldsymbol{k}|^2 + k_d^2)|\hat{\tau}(\boldsymbol{k})|^2}_{(\mathrm{VII})}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

エネルギー保存則

粘性・散逸がない場合, 系のエネルギーは保存する:

$$\sum_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{m}} \underbrace{\frac{1}{2}(\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{m})_z(|\boldsymbol{m}|^2-|\boldsymbol{l}|^2)\{\mathrm{Re}[\hat{\psi}(\boldsymbol{k})\hat{\psi}(\boldsymbol{l})\hat{\psi}(\boldsymbol{m})]\}\delta_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}+\boldsymbol{m},0}}_{T^{\psi}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l},\boldsymbol{m})} + \sum_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{m}} \underbrace{\frac{1}{2}(\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{m})_z(|\boldsymbol{m}|^2-|\boldsymbol{l}|^2)\{\mathrm{Re}[\hat{\psi}(\boldsymbol{k})\hat{\tau}(\boldsymbol{l})\hat{\tau}(\boldsymbol{m})]\}\delta_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}+\boldsymbol{m},0}}_{T^{\psi}_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l},\boldsymbol{m})} = 0, \tag{20}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{m}} \underbrace{\frac{1}{2}(\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{m})_z\mathrm{Re}[\{|\boldsymbol{m}|^2\hat{\tau}(\boldsymbol{k})\hat{\tau}(\boldsymbol{l})\hat{\psi}(\boldsymbol{m})-|\boldsymbol{l}|^2\hat{\tau}(\boldsymbol{k})\hat{\psi}(\boldsymbol{l})\hat{\tau}(\boldsymbol{m})\}]\delta_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}+\boldsymbol{m},0}}_{T^{\tau}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l},\boldsymbol{m})} \\ &+ \sum_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{m}} \underbrace{\frac{1}{2}(\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{m})_z\mathrm{Re}[\{|\boldsymbol{m}|^2\hat{\tau}(\boldsymbol{k})\hat{\psi}(\boldsymbol{l})\hat{\tau}(\boldsymbol{m})-|\boldsymbol{l}|^2\hat{\tau}(\boldsymbol{k})\hat{\tau}(\boldsymbol{l})\hat{\psi}(\boldsymbol{m})\}]\delta_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}+\boldsymbol{m},0}}_{T^{\tau}_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l},\boldsymbol{m})} \\ &+ \sum_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{m}} \underbrace{\frac{1}{2}(\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{m})_z k_d^2\mathrm{Re}[\{\hat{\tau}(\boldsymbol{k})\hat{\psi}(\boldsymbol{l})\hat{\tau}(\boldsymbol{m})-\hat{\tau}(\boldsymbol{k})\hat{\tau}(\boldsymbol{l})\hat{\psi}(\boldsymbol{m})\}]\delta_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}+\boldsymbol{m},0}}_{T^{\tau}_{\mathrm{III}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l},\boldsymbol{m})} = 0.\end{aligned} \tag{21}$$

エネルギー詳細保存則

$\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}+\boldsymbol{m}=0$ なる 3 波について, 以下のエネルギー詳細保存則が成立:

$$T_{\mathrm{I}}^{\psi}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l},\boldsymbol{m})+T_{\mathrm{I}}^{\psi}(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m},\boldsymbol{k})+T_{\mathrm{I}}^{\psi}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{k},\boldsymbol{l})=0, \tag{22}$$

$$T_{\mathrm{I}}^{\tau}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l},\boldsymbol{m})+T_{\mathrm{I}}^{\tau}(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m},\boldsymbol{k})+T_{\mathrm{I}}^{\tau}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{k},\boldsymbol{l})=0, \tag{23}$$

$$T_{\mathrm{III}}^{\tau}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l},\boldsymbol{m})+T_{\mathrm{III}}^{\tau}(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m},\boldsymbol{k})+T_{\mathrm{III}}^{\tau}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{k},\boldsymbol{l})=0, \tag{24}$$

$$\begin{aligned}&T_{\mathrm{II}}^{\psi}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l},\boldsymbol{m})+T_{\mathrm{II}}^{\psi}(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m},\boldsymbol{k})+T_{\mathrm{II}}^{\psi}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{k},\boldsymbol{l})\\&\quad+T_{\mathrm{II}}^{\tau}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l},\boldsymbol{m})+T_{\mathrm{II}}^{\tau}(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m},\boldsymbol{k})+T_{\mathrm{II}}^{\tau}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{k},\boldsymbol{l})=0.\end{aligned} \tag{25}$$

エンストロフィー方程式 (1)

- barotropic モードのエンストロフィー方程式

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{k}|^4 \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}|\hat{\psi}(\boldsymbol{k})|^2 = & \underbrace{\sum_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{m}} \frac{1}{2}(\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{m})_z |\boldsymbol{k}|^2 (|\boldsymbol{m}|^2 - |\boldsymbol{l}|^2)\{\mathrm{Re}[\hat{\psi}(\boldsymbol{k})\hat{\psi}(\boldsymbol{l})\hat{\psi}(\boldsymbol{m})]\delta_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}+\boldsymbol{m},0}\}}_{(\mathrm{I})} \\
& + \underbrace{\sum_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{m}} \frac{1}{2}(\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{m})_z |\boldsymbol{k}|^2 (|\boldsymbol{m}|^2 - |\boldsymbol{l}|^2)\{\mathrm{Re}[\hat{\psi}(\boldsymbol{k})\hat{\tau}(\boldsymbol{l})\hat{\tau}(\boldsymbol{m})]\delta_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}+\boldsymbol{m},0}\}}_{(\mathrm{II})} \\
& - \underbrace{ik'U|\boldsymbol{k}|^4 \mathrm{Re}\{\hat{\psi}^*(\boldsymbol{k})\hat{\tau}(\boldsymbol{k})\}}_{(\mathrm{III})} \\
& - \underbrace{\frac{1}{2}\kappa|\boldsymbol{k}|^4 \mathrm{Re}[\hat{\psi}^*(\boldsymbol{k})\{\hat{\psi}(\boldsymbol{k}) - \hat{\tau}(\boldsymbol{k})\}]}_{(\mathrm{IV})} - \underbrace{\nu|\boldsymbol{k}|^{12}|\hat{\psi}(\boldsymbol{k})|^2}_{(\mathrm{V})}
\end{aligned}
\tag{26}
$$

エンストロフィー方程式 (2)

- baroclinic モードのエンストロフィー方程式

$$
\begin{aligned}
&(|\boldsymbol{k}|^2+k_d^2)^2\frac{\partial}{\partial t}|\hat{\tau}(\boldsymbol{k})|^2 \\
&=\underbrace{\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{m})_z(|\boldsymbol{k}|^2+k_d^2)\mathrm{Re}[\{|\boldsymbol{m}|^2\hat{\tau}(\boldsymbol{k})\hat{\tau}(\boldsymbol{l})\hat{\psi}(\boldsymbol{m})-|\boldsymbol{l}|^2\hat{\tau}(\boldsymbol{k})\hat{\psi}(\boldsymbol{l})\hat{\tau}(\boldsymbol{m})\}]\delta_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}+\boldsymbol{m},0}}_{\mathrm{(I)}} \\
&\quad+\underbrace{\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{m})_z(|\boldsymbol{k}|^2+k_d^2)\mathrm{Re}[\{|\boldsymbol{m}|^2\hat{\tau}(\boldsymbol{k})\hat{\psi}(\boldsymbol{l})\hat{\tau}(\boldsymbol{m})-|\boldsymbol{l}|^2\hat{\tau}(\boldsymbol{k})\hat{\tau}(\boldsymbol{l})\hat{\psi}(\boldsymbol{m})\}]\delta_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}+\boldsymbol{m},0}}_{\mathrm{(II)}} \\
&\quad+\underbrace{\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{m})_z k_d^2(|\boldsymbol{k}|^2+k_d^2)\mathrm{Re}[\{\hat{\tau}(\boldsymbol{k})\hat{\psi}(\boldsymbol{l})\hat{\tau}(\boldsymbol{m})-\hat{\tau}(\boldsymbol{k})\hat{\tau}(\boldsymbol{l})\hat{\psi}(\boldsymbol{m})\}]\delta_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}+\boldsymbol{m},0}}_{\mathrm{(III)}} \\
&\quad+\underbrace{ik'U|\boldsymbol{k}|^2(|\boldsymbol{k}|^2+k_d^2)\mathrm{Re}[\hat{\psi}(\boldsymbol{k})\hat{\tau}^*(\boldsymbol{k})]}_{\mathrm{(IV)}}+\underbrace{ik'Uk_d^2(|\boldsymbol{k}|^2+k_d^2)\mathrm{Re}[\hat{\psi}(\boldsymbol{k})\hat{\tau}^*(\boldsymbol{k})]}_{\mathrm{(V)}} \\
&\quad-\underbrace{\frac{\kappa}{2}|\boldsymbol{k}|^2(|\boldsymbol{k}|^2+k_d^2)\mathrm{Re}[\{\hat{\tau}(\boldsymbol{k})-\hat{\psi}(\boldsymbol{k})\}\hat{\tau}^*(\boldsymbol{k})]}_{\mathrm{(VI)}}-\underbrace{\nu|\boldsymbol{k}|^8(|\boldsymbol{k}|^2+k_d^2)^2|\hat{\tau}(\boldsymbol{k})|^2}_{\mathrm{(VII)}}
\end{aligned}
\tag{27}
$$

エンストロフィー保存則

粘性・散逸がない場合, 系のエンストロフィーは保存する:

$$\sum_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{m}} \underbrace{\frac{1}{2}(\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{m})_z|\boldsymbol{k}|^2(|\boldsymbol{m}|^2-|\boldsymbol{l}|^2)\{\mathrm{Re}[\hat{\psi}(\boldsymbol{k})\hat{\psi}(\boldsymbol{l})\hat{\psi}(\boldsymbol{m})]\delta_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}+\boldsymbol{m},0}}_{C^{\psi}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l},\boldsymbol{m})}$$
$$+\sum_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{m}} \underbrace{\frac{1}{2}(\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{m})_z|\boldsymbol{k}|^2(|\boldsymbol{m}|^2-|\boldsymbol{l}|^2)\{\mathrm{Re}[\hat{\psi}(\boldsymbol{k})\hat{\tau}(\boldsymbol{l})\hat{\tau}(\boldsymbol{m})]\delta_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}+\boldsymbol{m},0}}_{C^{\psi}_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l},\boldsymbol{m})} = 0 \tag{28}$$

$$\sum_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{m}} \underbrace{\frac{1}{2}(\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{m})_z(|\boldsymbol{k}|^2+k_d^2)\mathrm{Re}[\{|\boldsymbol{m}|^2\hat{\tau}(\boldsymbol{k})\hat{\tau}(\boldsymbol{l})\hat{\psi}(\boldsymbol{m})-|\boldsymbol{l}|^2\hat{\tau}(\boldsymbol{k})\hat{\psi}(\boldsymbol{l})\hat{\tau}(\boldsymbol{m})\}]\delta_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}+\boldsymbol{m},0}}_{C^{\tau}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l},\boldsymbol{m})}$$
$$+\sum_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{m}} \underbrace{\frac{1}{2}(\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{m})_z(|\boldsymbol{k}|^2+k_d^2)\mathrm{Re}[\{|\boldsymbol{m}|^2\hat{\tau}(\boldsymbol{k})\hat{\psi}(\boldsymbol{l})\hat{\tau}(\boldsymbol{m})-|\boldsymbol{l}|^2\hat{\tau}(\boldsymbol{k})\hat{\tau}(\boldsymbol{l})\hat{\psi}(\boldsymbol{m})\}]\delta_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}+\boldsymbol{m},0}}_{C^{\tau}_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l},\boldsymbol{m})}$$
$$+\sum_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{m}} \underbrace{\frac{1}{2}(\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{m})_z k_d^2(|\boldsymbol{k}|^2+k_d^2)\mathrm{Re}[\{\hat{\tau}(\boldsymbol{k})\hat{\psi}(\boldsymbol{l})\hat{\tau}(\boldsymbol{m})-\hat{\tau}(\boldsymbol{k})\hat{\tau}(\boldsymbol{l})\hat{\psi}(\boldsymbol{m})\}]\delta_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}+\boldsymbol{m},0}}_{C^{\tau}_{\mathrm{III}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l},\boldsymbol{m})} = 0 \tag{29}$$

エンストロフィー詳細保存則

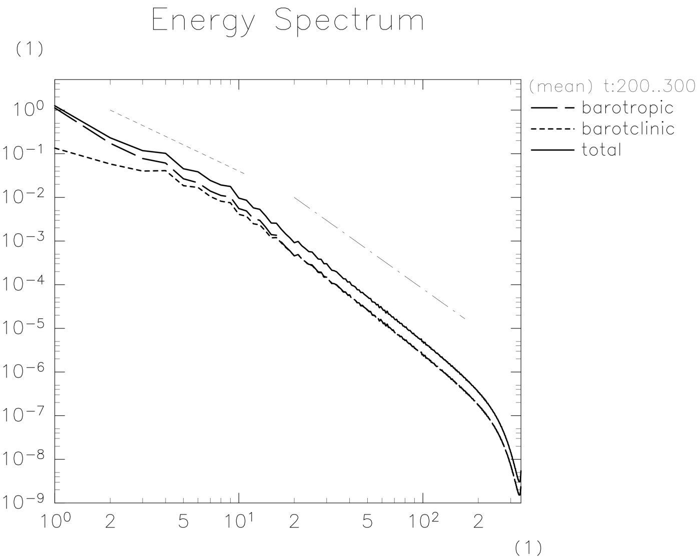
$\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}+\boldsymbol{m}=0$ なる 3 波について, 次のエンストロフィー詳細保存則が成立:

$$C_{\mathrm{I}}^{\psi}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l},\boldsymbol{m})+C_{\mathrm{I}}^{\psi}(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m},\boldsymbol{k})+C_{\mathrm{I}}^{\psi}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{k},\boldsymbol{l})=0, \tag{30}$$

$$\begin{aligned}&C_{\mathrm{II}}^{\psi}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l},\boldsymbol{m})+C_{\mathrm{II}}^{\psi}(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m},\boldsymbol{k})+C_{\mathrm{II}}^{\psi}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{k},\boldsymbol{l})\\&\quad+C_{\mathrm{I}}^{\tau}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l},\boldsymbol{m})+C_{\mathrm{I}}^{\tau}(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m},\boldsymbol{k})+C_{\mathrm{I}}^{\tau}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{k},\boldsymbol{l})=0,\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}&C_{\mathrm{II}}^{\tau}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l},\boldsymbol{m})+C_{\mathrm{II}}^{\tau}(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m},\boldsymbol{k})+C_{\mathrm{II}}^{\tau}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{k},\boldsymbol{l})\\&\quad+C_{\mathrm{III}}^{\tau}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l},\boldsymbol{m})+C_{\mathrm{III}}^{\tau}(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m},\boldsymbol{k})+C_{\mathrm{III}}^{\tau}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{k},\boldsymbol{l})=0.\end{aligned} \tag{32}$$

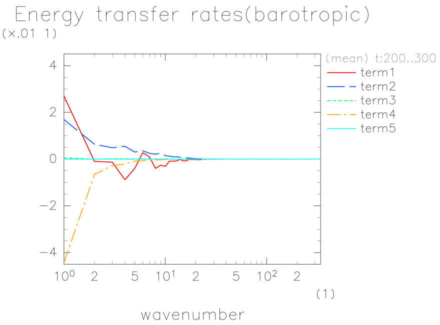
エネルギースペクトル


Energy Spectrum
(1)
(mean) t:200..300
barotropic
barotclinic
total
10^0
10^-1
10^-2
10^-3
10^-4
10^-5
10^-6
10^-7
10^-8
10^-9
10^0
2
5
10^1
2
5
10^2
2
(1)

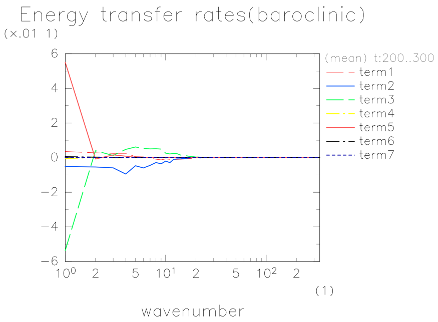
各項のエネルギー輸送率

barotropic	term I : $J(\psi, \nabla^2\psi)$	-5.899×10^{-18}
	term II : $J(\tau, \nabla^2\tau)$	5.603×10^{-2}
	termIII : $U\partial\nabla^2\tau/\partial x$	1.212×10^{-3}
	term IV : $\kappa\nabla^2(\psi - \tau)/2$	-5.916×10^{-2}
	term V : $\nu\nabla^8(\nabla^2\psi)$	-3.837×10^{-5}
baroclinic	term I : $J(\tau, \nabla^2\psi)$	-7.628×10^{-19}
	term II : $J(\psi, \nabla^2\tau)$	-5.603×10^{-2}
	termIII : $J(\psi, -k_d^2\tau)$	1.0471×10^{-17}
	term IV : $U\partial\nabla^2\psi/\partial x$	-1.212×10^{-3}
	term V : $Uk_d^2\partial\psi/\partial x$	5.740×10^{-2}
	term VI : $\kappa\nabla^2(\tau - \psi)/2$	8.385×10^{-4}
	term VII : $\nu\nabla^8(\nabla^2 - k_d^2)\tau$	-3.822×10^{-5}

各項のエネルギースペクトル



barotropic モード

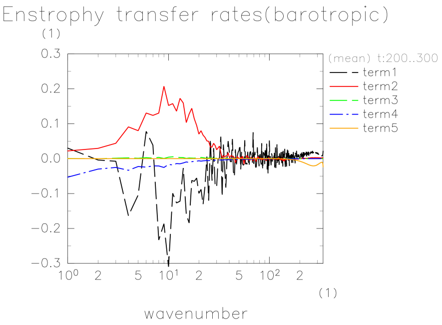


baroclinic モード

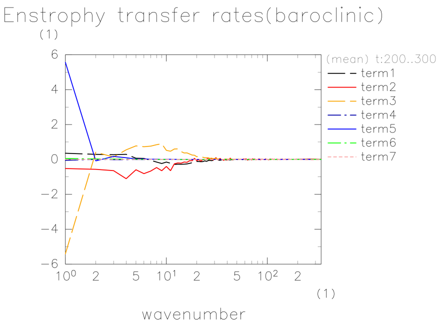
各項のエンストロフィー輸送率

barotropic	term I : $J(\psi, \nabla^2\psi)$	1.217×10^{-15}
	term II : $J(\tau, \nabla^2\tau)$	3.052×10^{0}
	termIII : $U\partial\nabla^2\tau/\partial x$	7.506×10^{-2}
	term IV : $\kappa\nabla^2(\psi - \tau)/2$	-6.278×10^{-1}
	term V : $\nu\nabla^8(\nabla^2\psi)$	-2.393×10^{0}
baroclinic	term I : $J(\tau, \nabla^2\psi)$	-3.052×10^{0}
	term II : $J(\psi, \nabla^2\tau)$	-5.603×10^{0}
	termIII : $J(\psi, -k_d^2\tau)$	5.603×10^{0}
	term IV : $U\partial\nabla^2\psi/\partial x$	-1.962×10^{-1}
	term V : $Uk_d^2\partial\psi/\partial x$	5.861×10^{0}
	term VI : $\kappa\nabla^2(\tau - \psi)/2$	-1.884×10^{-1}
	term VII : $\nu\nabla^8(\nabla^2 - k_d^2)\tau$	-2.387×10^{0}

各項のエンストロフィースペクトル

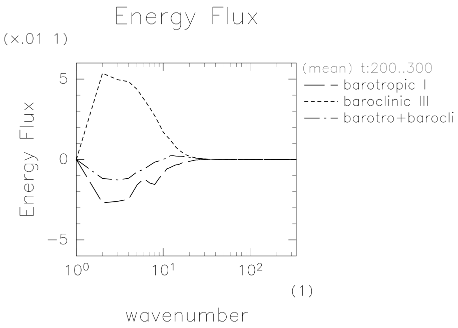


barotropic モード

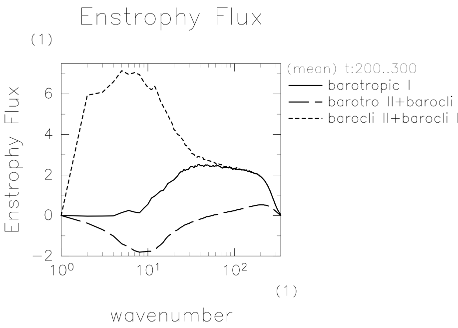


baroclinic モード

エネルギーフラックスとエンストロフィーフラックス



エネルギーフラックス



エンストロフィーフラックス