

回轉成層流体の基礎

石渡正樹

2020 年 06 月 1 日

第 1 章 地球流体力学方程式の近似: 一般論

1.1 流体力学の基礎方程式の復習

直交直線座標系 (x, y, z) における粘性率一定の非圧縮流体の運動方程式・連続の式・エネルギー方程式は以下の通りである.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} - g \mathbf{k}, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1.2)$$

$$\rho T \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \right) s = \frac{1}{2} \rho \nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 - \text{div} \mathbf{q} + S. \quad (1.3)$$

$\mathbf{v} = (v_i) = (u, v, w)$ は速度ベクトル, p は圧力, ρ は密度, $-g \mathbf{k}$ は重力加速度ベクトル (外力のポテンシャル, \mathbf{k} は鉛直方向の単位ベクトル), ν は動粘性係数, s は単位質量あたりのエントロピー, T は温度, \mathbf{q} は熱フラックス, S は外部熱源である.

1.2 例題

1. Lagrange 微分演算子

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

を, 流体粒子の位置 \mathbf{r} に作用させるとどうなるか? また, \mathbf{v} はどうか?

2. 粘性項についての厳密解

x 方向のみの 1 次元ナビエーストークスの式において粘性項だけ残した場合の一般解はどうなるか?

1.3 スケーリング

1.3.1 スケーリングとは

スケーリングは方程式を無次元化するための手法である。任意の物理量 f^* について

$$f^* = Ff \quad (1.4)$$

と変数変換を行なうことがスケーリングである。ここで、 F は特徴的なスケール、 f は $O(1)$ の大きさの無次元量である。

このように変数を再定義することにより、方程式中の項同士の重要性を表現する無次元パラメータ (無次元数) を導入することができる。スケーリングと無次元パラメータの導入により、方程式の近似や異なるパラメータで得られた解同士の対応が容易となる場合がある。

スケーリングにおいて注意すべき点は以下の通りである。

- 速度の成分によってスケールが違ふことがある。
- 1つの変数が複数のスケールを持つことがある。
- 全ての変数のスケールが分かっているとは限らない。

究極的には、答えが分かっているとスケーリングができないということになる。

1.3.2 無次元方程式の導出の例

外力なしで、密度一定、粘性係数一定の場合のナビエーストークス方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* = -\frac{1}{\rho_0^*} \nabla^* p^* + \nu \nabla^{*2} \mathbf{v}^* \quad (1.5)$$

を考える。

ここで、物理量を以下のようにスケーリングする。

$$(x^*, y^*, z^*) = L(x, y, z), \quad (1.6)$$

$$\mathbf{v}^* = U\mathbf{v}, \quad (1.7)$$

$$t^* = \frac{L}{U}t, \quad (1.8)$$

$$p^* = \rho_0^* U^2 p \quad (1.9)$$

これより

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v}$$

が得られる.

1.3.3 よく使われる無次元数

プラントル数	Prandtle	$Pr \equiv \frac{\nu}{\kappa}$	熱拡散時間で測った粘性散逸時間
レイノルズ数	Raynolds	$Re \equiv \frac{UL}{\nu}$	移流時間で測った粘性散逸時間
ペクレー数	Péclet	$Pe \equiv \frac{UL}{\kappa}$	移流時間ではかった熱伝導時間
レイリー数	Rayleigh	$Ra \equiv \frac{\alpha g \Theta L^3}{\kappa \nu}$	熱拡散時間と粘性散逸の積に対する浮力時間スケールの自乗
ヌッセルト数	Nusselt	$Nu \equiv \frac{ T_* v_* }{\kappa \Theta / L}$	伝導による熱フラックスで規格化した熱フラックス
テイラー数	Taylor	$Ta \equiv \frac{4\Omega_*^2 L^4}{\nu^2}$	回転の時間に対する粘性散逸時間の比の自乗
エクマン数	Ekman	$E \equiv \frac{\nu}{2\Omega_* L^2} = \frac{1}{Ta^{1/2}}$	粘性散逸時間を単位としてはかった回転の時間
ロスビー数	Rossby	$Ro = \varepsilon \equiv \frac{U}{2\Omega_* L}$	移流時間を単位としてはかった回転の時間. 慣性項とコリオリ項の比.
バーガー数	Burger	$(NH/fL)^2$	成層による位置エネルギーとコリオリによる運動エネルギー、つまり成層の効果と回転の効果の比を表す。1 以下であれば回転が効き、逆は成層 (水柱が伸縮しない)。相対渦度 / 水柱のストレッチングでもある。
フルード数	Froude	$\frac{U}{\sqrt{Lg}}$	プルームの大きさを表す. 分子が慣性力, 分母が重力 (浮力) を表す.
リチャードソン数	Richardson	$\left[\frac{N}{\partial U}{\partial z} \right]^2$	鉛直シアーに対する成層の強さを表す.

ただし, 以下のように新たな変数を定義した.

- T 基準温度 T_0 からはかった温度
 (実際の温度は $T_a = T + T_0$)
- F 外力
- ρ_0 基準密度 (定数) ($\rho = \rho_0[1 - \alpha T]$) を想定している.)
- κ 熱拡散係数 $= \frac{k}{c_p \rho}$ (k は熱伝導率, c_p は定圧比熱)
- α 体積膨張率 $= -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$
- N ブラントバイサラ振動数 $= \left(\frac{g}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)$

エクマン数, ロスビー数には, ファクター 1/2 をつけない流儀もある.

1.3.4 無次元パラメータに関する補足

フルード数

フルード数には複数の種類のものがある. 例えば, 回転フルード数

$$\epsilon = f^2 L^2 / \Gamma.$$

ここで Γ は静的安定度.

ブラントバイサラ振動数

N はブラントバイサラ振動数で

$$N \equiv \left(\frac{g}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = g \frac{\partial \ln \theta}{\partial z} \tag{1.10}$$

ブラントバイサラ振動数にはいろんな表現がある. 岩波の地球惑星科学 6 巻では熱力学関係式と静水圧関係式を利用して

$$N = \frac{gT}{c_p} \alpha \left[\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \frac{dT}{dz} + \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T \frac{dp}{dz} \right] = g \alpha \left[\frac{dT}{dz} + \frac{gT}{c_p} \alpha \right]$$

という表式が与えられている. 理想気体ならば $\alpha = 1/T$ なので

$$N^2 = \frac{g}{T} \left(\frac{dT}{dz} + \frac{g}{c_p} \right)$$

大気科学講座 1 の地表に近い大気には

$$N^2 = \frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

という式が載っているが, これは (1.10) とは微妙に異なる量である. (1.10) に $\theta = T \left(\frac{p_s}{p} \right)^\kappa$ を代入すると

$$\begin{aligned} N^2 &= \frac{g}{T \left(\frac{p_s}{p} \right)^\kappa} \frac{\partial}{\partial z} T \left(\frac{p_s}{p} \right)^\kappa = \frac{gp^{\kappa-1}}{T/p} \frac{\partial T}{\partial z} \frac{1}{p} \frac{1}{p^{\kappa-1}} = \frac{gp^{\kappa-1}}{1/(\rho R)} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho R} \frac{1}{p^{\kappa-1}} \\ &= \frac{gp^{\kappa-1}}{1/\rho} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho} \frac{1}{p^{\kappa-1}} = \frac{gp^{\kappa-1}}{1/\rho} \left\{ -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{1}{p^{\kappa-1}} + \frac{1}{\rho} (1-\kappa) p^{-\kappa} \frac{\partial p}{\partial z} \right\} \\ &= -\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{g}{p} (1-\kappa) \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}$$

となる.

リチャードソン数

リチャードソン数 Ri は対流圏で 100 程度の大きさを持つ.

リチャードソン数にも複数の表現が存在する. Haltiner and Williams (1980) では

$$Ri = \frac{\Gamma}{V^2}$$

という式が与えられている.

乱流の運動エネルギーの収支に関する式において浮力によるエネルギー生成を表す項と風の鉛直シアーからの生成項の比をとったものをフラックスリチャードソン数という.

$$R_f = \frac{(g/\bar{\theta})\overline{\theta'w'}}{\overline{u'w' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}} + \overline{v'w' \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}}}$$

1.4 参考文献

松井孝典, 松浦充宏, 林祥介, 寺沢敏夫, 谷本俊郎, 唐戸俊一郎, 1996: 地球惑星科学 第 6 巻「地球連続体力学」, 岩波書店, 319pp.

竹内清秀, 近藤純正, 1981: 大気科学講座 1 「地表に近い大気」, 東京大学出版会, 226pp.

Haltiner, G.J., Williams, R.T., 1980: Numerical prediction and dynamic meteorology, John Wiley & Sons, 477pp.

第2章 熱力学の基礎と大気熱力学

2.1 自然な変数と熱力学関数

2.1.1 熱力学変数

自然界の中からある系を取りだしてそのふるまいを考える。系は微細な粒子の集合体によってなりたっている。経験によれば、系を構成している粒子の力学には依存しない巨視的な量が存在し、それによって系を記述することができる。そのような量を熱力学変数(thermodynamic variables)あるいはまた状態量という。

例：体積 V , 圧力 p , 温度 T

系の巨視的な状態は、熱力学変数の値を与えることによって指定される。

2.1.2 示量変数と示強変数

熱力学変数は、その値が系を構成する粒子の全量に依存する量、示量変数(extensive variable) と、その値が依存しない量、示強変数(intensive variable) とにわけられる。

示量変数：体積 V , 圧力 p

示強変数：温度 T

2.1.3 熱力学的構造と熱力学関数

経験によれば、系のいくつかの熱力学変数の値を規定すれば系の他の熱力学変数の値は定まってしまう。系の状態は、適当な数の熱力学変数の組によって指定される

ことになる。このとき、適当に選んだ変数を独立変数、それ以外の変数を従属変数という。また、熱力学変数の間に存在する関係の総体のことを熱力学的構造という。

熱力学的構造はある解析関数の存在によって体系化されている。適当な熱力学変数の組を独立変数として選べば、その独立変数の解析関数としてあらわされる適当な示量性の熱力学変数が存在する。この関数のことを熱力学関数といい、選ばれた独立変数のことを自然な熱力学変数という。他の熱力学変数は、熱力学関数の自然な変数による偏微分係数として与えられる（‘熱力学関数の全微分’あるいは‘熱力学関数の自然な独立変数による偏微分’を参照されたい）。系の状態は、自然な熱力学変数と熱力学関数とを与えることにより、自然な熱力学変数の定義域全体にわたって完全に決定される。

2.1.4 全系の熱力学関数

熱平衡にある一様な系の種々の熱力学関数とその定義、対応する自然な独立変数の組は次のとおりである。

内部エネルギー	: U	S, V, N_i, Ξ_k
エンタルピー	: $H = U + pV$	S, p, N_i, Ξ_k
Helmholtz の自由エネルギー	: $F = U - TS$	T, V, N_i, Ξ_k
Gibbs の自由エネルギー	: $G = U - TS + pV$	T, p, N_i, Ξ_k
	$= H - TS$	
	$= F + pV$	
エントロピー	: S	U, V, N_i, Ξ_k または H, p, N_i, Ξ_k

ただし、 p は圧力、 V は体積、 T は温度、 N_i は系を構成する i 成分の量 (モル数)、 Ξ_k は系の状態を指定するその他の一般座標 (示量性変数、例えば、磁気モーメントなど) である。

2.2 全系の熱力学関数の全微分

熱力学の構造は、自然な独立変数を用いて熱力学関数の全微分が次のようにかけることにある。

$$dU = TdS - pdV + \sum_i \mu_i dN_i + \sum_k F_k d\Xi_k \quad (2.1)$$

$$dH = TdS + Vdp + \sum_i \mu_i dN_i + \sum_k F_k d\Xi_k \quad (2.2)$$

$$dF = -SdT - pdV + \sum_i \mu_i dN_i + \sum_k F_k d\Xi_k \quad (2.3)$$

$$dG = -SdT + Vdp + \sum_i \mu_i dN_i + \sum_k F_k d\Xi_k \quad (2.4)$$

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T}dV - \sum_i \frac{\mu_i}{T}dN_i - \sum_k \frac{F_k}{T}d\Xi_k \quad (2.5)$$

$$= \frac{dH}{T} - \frac{V}{T}dp - \sum_i \frac{\mu_i}{T}dN_i - \sum_k \frac{F_k}{T}d\Xi_k \quad (2.6)$$

ただし、 μ_i は成分 i の化学ポテンシャル、 F_k は一般座標 Ξ_k に対応する一般力 (例えば磁場) である。

2.3 大気の状態方程式

混合気体の各成分を理想気体とみなすことができる場合、成分 i について状態方程式が成り立つ：

$$p_i \alpha_i = R_i T$$

もしくは

$$p_i = \rho_i R_i T \quad (2.7)$$

添字 i は気体成分を表し、 p_i は分圧、 α_i は比容、 T は温度、 R_i は成分 i の気体定数である。

$$R_i = \frac{R}{M_i} \quad (2.8)$$

R は (普遍) 気体定数であり $8.341 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ である。

水蒸気の状態方程式を書き下す。水蒸気の分子量を M_v とすると

$$\frac{R}{M_v} = \frac{R_d}{M_v/M_d} = \frac{R_d}{0.621}$$

となる. これを使うと水蒸気の状態方程式は

$$e_v \alpha_v = \frac{RT}{0.621}$$

空気中の水蒸気量を表すのに混合比

$$r = \frac{\rho_v}{\rho_d} = \frac{0.621 e_v}{p - e_v}, \quad (2.9)$$

比湿

$$q = \frac{\rho_v}{\rho} = \frac{r}{1+r} \quad (2.10)$$

などが使われる.

水蒸気を含んだ湿潤大気の状態方程式は

$$p\alpha = R_d T_v \quad (2.11)$$

と書ける. ここで, T_v は仮温度と呼ばれる量であり次式で定義される.

$$T_v = \frac{T}{1 - 0.397 e_v / p} \quad (2.12)$$

$p = 1000 \text{ hPa}$, $e_v = 10 \text{ hPa}$, $T = 300 \text{ K}$ とすると

$$T_v = \frac{300}{1 - 0.397 \times 0.01} \sim 301.195 \text{ [K]}$$

となる. T_v は T よりも約 1K 高くなる.

2.4 温位

理想気体の場合について, 熱力学第一法則をエントロピーで表す.

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{de}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt}$$

理想気体の場合について考え,

$$e = c_p T$$

及び状態方程式

$$p = \rho RT$$

を使うと

$$\frac{ds}{dt} = c_p \frac{d}{dt}(\ln T) - R \frac{d}{dt}(\ln p)$$

と書ける. この式から

$$s = c_p \ln T - R \ln p + \text{const.}$$

が得られる. ここで,

$$s = c_p \ln \theta + \text{const.} \quad (2.13)$$

と定義すると, 断熱条件は

$$c_p \frac{d}{dt}(\ln \theta) = 0$$

となる. この θ は温位と呼ばれるものであり気象学ではよく用いられる. 多くの場合, 以下のものが使われる.

$$\theta = T \left(\frac{p_{00}}{p} \right)^{R/c_p} \quad (2.14)$$

ここで, p_{00} は標準気圧で, 普通 1000 hPa をとる.

2.5 参考文献

久保亮五 編, 1961: 大学演習 熱学・統計力学. 裳華房, 477pp.

プリゴジーン, デフェイ (妹尾 学 訳), 1966: 化学熱力学 1. みすず書房, 288pp. (I. Prigogine et R. Defay, 1944: *Thermodynamique Chimique*)

第3章 成層流体の基本特性

3.1 静水力学

3.1.1 重力場中の静止流体

一様な重力場の静止流体について考える。重力場中の運動方程式

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g} + \nu\nabla^2\mathbf{v}$$

において、 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ とすると

$$\nabla p = \rho\mathbf{g} \quad (3.1)$$

が得られる。これは力学的平衡を表す式である。「静水圧平衡の式」と呼ぶこともある。

地球大気や地球海洋の場合、流れがある場合でもおおむね静水圧平衡が成り立っている。現象の水平スケールが、鉛直スケールに比べてずっと大きい時、Navier-Stokes 方程式の z 成分の式は

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g = 0 \quad (3.2)$$

で近似できる。

重力無しの場合、簡単に

$$\nabla p = 0$$

となる。よって、 $p = \text{const.}$ となり、圧力は場所によらない。

3.1.2 静水圧平衡にある流体では p, ρ, T は高度のみの関数となる

(3.1) が成り立つ場合、 p, ρ, T は高度のみの関数となる。その理由は以下の通りである。

まず, 座標を導入する. z 軸を鉛直上方にとる. 重力加速度ベクトルは

$$\mathbf{g} = (0, 0, -g)$$

$\nabla p = \rho \mathbf{g}$ を成分表示すると

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

最初に, 流体が重力場中で平衡ならば p は z のみの関数である (でないと, 運動が起きてしまう). p が z のみの関数である時, 静水圧平衡式

$$\rho = -\frac{1}{g} \frac{dp}{dz}$$

より ρ も z のみに依存する. 更に, T は p, ρ の関数であるので, T も z のみに依存することがわかる.

3.1.3 静水圧平衡式の積分

1. 大気の質量

静水圧の式を鉛直方向に積分すると

$$M = \frac{p_s}{g} \quad (3.3)$$

が得られる. ただし, $M \equiv \int_0^{z_{top}} \rho dz$ は単位面積の気柱の質量である.

2. 非圧縮, 密度一定の場合

静水圧平衡式の z 成分

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

を積分すると以下が得られる.

$$p = -\rho g z + C$$

ここで C は積分定数.

境界条件として, 表面 $z = h$ で $p = p_0$ (一定) という条件を考える. この境界条件を使って, C を決める. 境界条件を適用すると

$$\begin{aligned} p_0 &= -\rho g h + C, \\ C &= p_0 + \rho g h. \end{aligned}$$

以上より, $p(z)$ が以下のように決定される.

$$p = p_0 + \rho g(h - z) \quad (3.4)$$

例: 海面から深さ z での水圧

水面での圧力を p_0 とすると, 深さ z での水圧は

$$p = p_0 + \rho g z$$

となる. 海水の密度 $\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, 重力加速度 $g = 9.8 \text{ m sec}^{-2}$, $p_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$ を使って, 水深 10 m における水圧を求めてみよ.

3. 理想気体の場合: スケールハイト

スケールハイトは成層の度合を表す尺度である. 密度スケールハイトは次式で定義される.

$$H_\rho \equiv \frac{\rho}{\left| \frac{\partial \rho}{\partial z} \right|} \quad (3.5)$$

圧力スケールハイトは次式で定義される.

$$H_p \equiv \frac{p}{\left| \frac{\partial p}{\partial z} \right|} \quad (3.6)$$

静水圧平衡にある理想気体の場合は,

$$H_p = \frac{RT}{g} \quad (3.7)$$

となる.

更に, 等温大気の場合は H_p は定数となる. このとき

$$H_p = \frac{p}{\left| \frac{\partial p}{\partial z} \right|}$$

は積分することができる. $z = 0$ から $z = z$ まで積分を実行すると

$$p(z) = p_s e^{-\frac{z}{H_p}} \quad (3.8)$$

が得られる. よって, 高度の増加とともに p は指数関数的に減少することが示される. 等温大気の場合, 密度の高度変化は以下のようなになる.

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{p_s}{RT} e^{-\frac{g}{RT} z} = \rho_s e^{-\frac{g}{RT} z} \quad (3.9)$$

3.2 成層に関する基本概念

3.2.1 乾燥断熱減率

乾燥空気を断熱的かつ準静的に変化させることを考える。乾燥空気は外から加えた仕事に応じて圧縮されるかまたは膨張し温度が変化する。

断熱変化の場合の T と p の変化関係は

$$\frac{ds}{dt} = 0 \quad (3.10)$$

から決められる。

熱力学第一法則に断熱条件 (3.10) を適用する。そのために熱力学第一法則をエントロピーで表す。

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{de}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt}$$

理想気体の場合について考えると

$$\frac{dT}{dp} = \frac{RT}{c_p p} = \frac{\alpha}{c_p} \quad (3.11)$$

が得られる。

ここで、乾燥した空気粒子を断熱的に鉛直方向に動かすことを考える。粒子の周囲の空気 (気圧 \bar{p} , 比容 $\bar{\alpha}$) が静止しているとする、そこでは静水圧平衡が成り立っている。よって

$$\frac{d\bar{p}}{dz} = -\bar{\rho}g$$

ここで、粒子の気圧 p は常に \bar{p} に等しくなると仮定すると、空気粒子について

$$\frac{dp}{dz} = -\bar{\rho}g$$

更に、 $\alpha \sim \bar{\alpha}$ と近似できるとすると

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

これを、理想気体の温度勾配の式 (3.11) と組み合わせると

$$\frac{dT}{dz} = -\rho g \frac{\alpha}{c_p} = -\frac{g}{c_p}$$

が得られる。この式から、断熱で上昇する乾燥空気粒子の温度は $\frac{g}{c_p}$ の割合で下がることがわかる。この変化率

$$\Gamma_d = \frac{g}{c_p} \tag{3.12}$$

を乾燥断熱減率という。地球大気の場合、

$$\Gamma_d = \frac{g}{c_p} = 0.98[\text{K}]/100[\text{m}]$$

3.2.2 重力振動

横軸に T 、縦軸下向きに $\ln p$ をとって考える。この図において空気粒子を鉛直方向に動かすことを考える。

図中の点 P にある空気粒子を考える。 P 点では空気粒子は周囲の空気と同じ状態にあるとする。この空気粒子を断熱的に Q 点まで持ち上げる。もしも周囲が等温位大気(等エントロピー)であれば空気粒子と周囲の状態は同じであるから、粒子は Q 点にとどまる。しかし、周囲の状態が図の線 a のようになっていると、 Q 点では粒子の温度は周囲より高くなり、浮力のために上昇しようとする。周囲の状態が線 b で表されている時には、粒子は周囲より重くなり、もとの位置に戻ろうとする。結局、この場合には、粒子は P 点を中心に断熱線に沿って振動することになる。

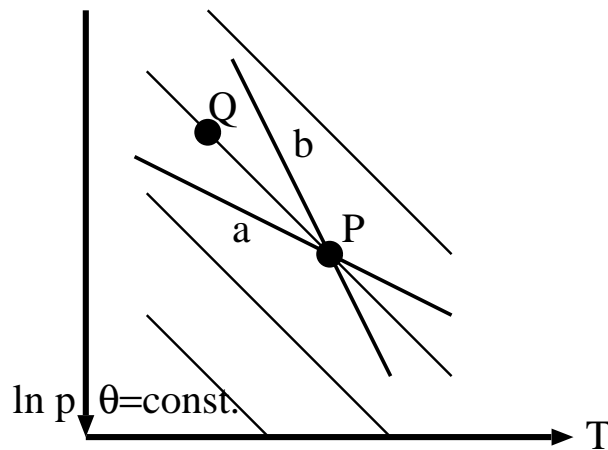


図 3.1: 空気粒子の断熱的な移動。 a, b は周囲の大気の状態を表す。 a は安定な場合、 b は不安定な場合。

以下、この振動の周期を調べる。

P 点に相当する高度を高さの基準にとり, そこからの粒子の変位を z とする. 粒子には重力と気圧傾度力が外力として働くから

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g - T \frac{R}{p} \frac{\partial p}{\partial z}$$

が成り立つ. 周囲の静止大気については,

$$0 = -g - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -g - \bar{T} \frac{R}{\bar{p}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z}$$

が成り立つ. 乾燥断熱減率を導出するときと同様に $p = \bar{p}$ と仮定すると, 上の2式から

$$\begin{aligned} \frac{d^2z}{dt^2} &= \bar{T} \frac{R}{\bar{p}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - T \frac{R}{\bar{p}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = R \frac{\bar{T} - T}{\bar{p}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = R \frac{\bar{T} - T}{\bar{p}} (-\bar{\rho}g) = R \frac{T - \bar{T}}{\bar{p}} \bar{\rho}g \\ &= \frac{T - \bar{T}}{\bar{T}} g \end{aligned} \quad (3.13)$$

空気粒子の気温減率は乾燥断熱 Γ_d である. 周囲の大気の温度減率 $-\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}$ を Γ で表すことにする. すると

$$\begin{aligned} T(z) &= T(0) - \Gamma_d z, \\ \bar{T}(z) &= \bar{T}(0) - \Gamma z \end{aligned}$$

となる. ここで, $\bar{T}(0) = T(0)$ と仮定して, これらを (3.13) に代入すると

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g \frac{\Gamma_d - \Gamma}{\bar{T}} z$$

となる. ここで

$$N^2 \equiv g \frac{\Gamma_d - \Gamma}{\bar{T}} \quad (3.14)$$

とおくと

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -N^2 z \quad (3.15)$$

となる. N はブラントバイサラ振動数と呼ばれる.¹

大気の成層状態は N^2 で分類できる.

¹ N^2 の一般的な定義は

$$N^2 = g \frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z}$$

である. 上の問題の場合

$$\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} = \frac{\partial \ln \bar{T}}{\partial z} - \frac{R}{c_p} \frac{\partial \ln \bar{p}}{\partial z} = \frac{1}{\bar{T}} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} + \frac{g}{c_p} \right) = \frac{\Gamma_d - \Gamma}{\bar{T}}$$

である.

$$\begin{aligned}
 N^2 > 0 \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} > 0, \Gamma_d > \Gamma \right) & : \text{安定} \\
 N^2 = 0 \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = 0, \Gamma_d = \Gamma \right) & : \text{中立} \\
 N^2 < 0 \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} < 0, \Gamma_d < \Gamma \right) & : \text{不安定}
 \end{aligned}$$

図の線 a, b はそれぞれ不安定成層, 安定成層を示す. 不安定成層のときに空気粒子に微小変位を与えると, 粒子は初期の高度から離れ続けてもとに戻ることがない.

安定成層の場合 ($N^2 > 0$), 空気粒子は鉛直方向に振動する. このような振動は重力振動と呼ばれる. 重力振動の周期は $\frac{2\pi}{N}$ である. その値は気温減率で決まる. 地球大気の場合, 対流圏内 (高さ 11 km 程度まで) では $\Gamma \sim 0.65 \text{ K/100m}$ である. $\bar{T} = 270 \text{ K}$ とおくと,

$$N = \sqrt{g \frac{\Gamma_d - \Gamma}{\bar{T}}} = \sqrt{9.8 \frac{0.0098 - 0.0065}{270}} \sim 1.09 \times 10^{-2} [\text{m}^{-1}] \quad (3.16)$$

となり, 振動周期は約 10 分となる.

3.3 参考文献

栗原宣夫, 1979: 大気力学入門. 岩波書店, 244pp.

第 4 章 回転系の流体力学方程式

4.1 回転系における基礎方程式

以下の 2 つの座標系を考える.

- K 系: 静止座標系 (x, y, z)
- K' 系: 一様な角速度 Ω で回転している系 (x', y', z')

2 つの座標系の位置ベクトルの関係は以下ようになる.

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= x(t)\mathbf{e}_i + y(t)\mathbf{e}_j + z(t)\mathbf{e}_k \\ &= x'\mathbf{e}'_i + y'\mathbf{e}'_j + z'\mathbf{e}'_k = \mathbf{r}'\end{aligned}$$

\mathbf{r}' は回転系における位置ベクトルである.

ベクトルの時間微分の変換則は

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{d}{dt}\right)' + \Omega \times \quad (4.1)$$

である (図を書けばわかる).

K 系 (静止系) で見た速度は

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}' + \Omega \times \mathbf{r} \quad (4.2)$$

となる. ¹ただし, \mathbf{v}' は回転系における速度ベクトルである.

¹ \mathbf{r} の時間微分を計算してみると以下ようになる.

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (x'\mathbf{e}'_i + y'\mathbf{e}'_j + z'\mathbf{e}'_k) \\ &= \frac{dx'}{dt}\mathbf{e}'_i + \frac{dy'}{dt}\mathbf{e}'_j + \frac{dz'}{dt}\mathbf{e}'_k + x'\frac{d\mathbf{e}'_i}{dt} + y'\frac{d\mathbf{e}'_j}{dt} + z'\frac{d\mathbf{e}'_k}{dt}\end{aligned}$$

最初の 3 項は回転系における速度ベクトル, 後の 3 項は回転系における固定点の速度 ($\Omega \times \mathbf{r}$).

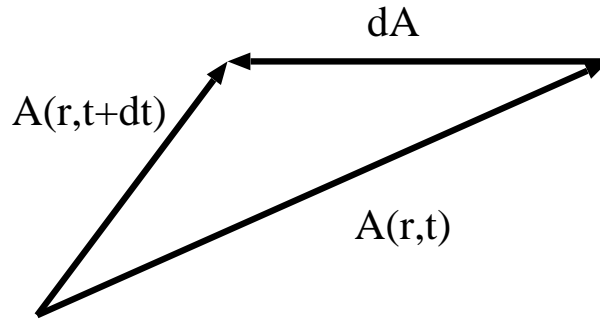


図 4.1: 慣性系におけるベクトル \mathbf{A} の変化. 時刻 t における \mathbf{A} と時刻 $t + dt$ における \mathbf{A} の差を $d\mathbf{A}$ と表した.

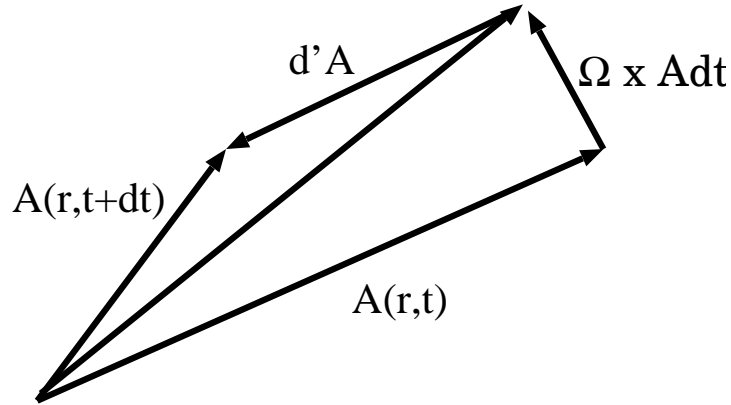


図 4.2: 回転系におけるベクトル \mathbf{A} の変化. 回転系においては, $d'\mathbf{A}$ が \mathbf{A} の変化として見える.

速度の 2 階微分の変換則は

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \left\{ \left(\frac{d}{dt} \right)' + \boldsymbol{\Omega} \times \right\} \left\{ \left(\frac{d}{dt} \right)' + \boldsymbol{\Omega} \times \right\} \mathbf{r} \\ &= \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right)' + 2\boldsymbol{\Omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)' + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

となる.

よって, 回転系の Navier-Stokes 方程式は

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g} \quad (4.4)$$

となる. ここで回転系を表す ダッシュ (') は外した. ただし, 外力として重力を考えた. \mathbf{g} は重力加速度ベクトルである. $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$ はコリオリ力と呼ばれる. $-\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$

は惑星自転による遠心力である。コリオリ力はいつも \mathbf{v} に直角に働く。このため転向力とも言われる。コリオリ力は仕事をしない。 \mathbf{v} が球面に沿っている場合、これに働くコリオリ力の球面沿いの成分によって、 \mathbf{v} は北半球では右に南半球では左に向きを変えようとする。

4.2 遠心力の取扱い

回転系の運動方程式の中の

$$\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$$

は遠心力の項である。 \mathbf{r} の $\boldsymbol{\Omega}$ に直行する成分を \mathbf{r}_n とすると

$$\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = -|\boldsymbol{\Omega}|^2 \mathbf{r}_n$$

更に、この項はポテンシャル

$$\phi_c \equiv -\frac{1}{2} |\boldsymbol{\Omega}|^2 |\mathbf{r}_n|^2$$

を用いて

$$\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = \nabla \phi_c$$

と書ける。

ϕ_c の勾配を計算してみると

$$\begin{aligned} \nabla \phi_c &= \nabla \left(-\frac{1}{2} |\boldsymbol{\Omega}|^2 |\mathbf{r}_n|^2 \right) = -\frac{1}{2} \Omega_j^2 \partial_i r_{nk}^2 = -\Omega_j^2 r_{nk} \partial_i r_{nk} = -\Omega_j^2 r_{nk} \delta_{ik} \\ &= -\Omega_j^2 r_{ni} \end{aligned}$$

となる。

\mathbf{r} を $\boldsymbol{\Omega}$ に垂直な成分と平行な成分に分けて考える。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_t + \mathbf{r}_n) &= \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_n = \epsilon_{ijk} \Omega_j (\epsilon_{klm} \Omega_l r_m) = \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} \Omega_j \Omega_l r_m \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \Omega_j \Omega_l r_m = \delta_{il} \delta_{jm} \Omega_j \Omega_l r_m - \delta_{im} \delta_{jl} \Omega_j \Omega_l r_m \\ &= \Omega_j \Omega_i r_j - \Omega_j \Omega_j r_i = \Omega_i \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_n - \Omega_j \Omega_j r_i \\ &= -\Omega_j^2 r_i \end{aligned}$$

重力項もポテンシャルに書くことにすると

$$\mathbf{g} = -\nabla \phi_g$$

よって、2つのポテンシャルを足して扱って良いことがわかる。改めて

$$\Phi = \phi_c + \phi_g$$

と書けば、運動方程式は以下ようになる。

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{F} - \nabla \Phi, \tag{4.5}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{4.6}$$

4.3 局所座標の導入と近似

全球的なスケールの運動を考慮する場合は、球座標系を使う必要がある。比較的狭い領域に限られている運動を考える場合は、局所座標系を使っても良い。

局所直交座標系を使う場合は、図に示すような座標系をとる。すると、 $\boldsymbol{\Omega}$ の「水平成分」と「鉛直成分」はそれぞれ $\Omega \cos \phi$, $\Omega \sin \phi$ となる。

$$\boldsymbol{\Omega} = (0, \Omega \cos \phi, \Omega \sin \phi) \tag{4.7}$$

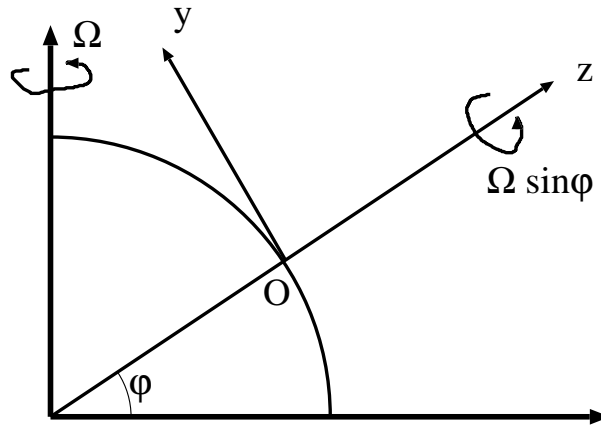


図 4.3: 局所直交直線座標系.

よって、運動方程式を成分別に書くと以下ようになる。

$$\frac{du}{dt} = -2(\Omega \cos \phi w - \Omega \sin \phi v) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + F_x,$$

$$\frac{dv}{dt} = -2\Omega \sin \phi u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + F_y,$$

$$\frac{dw}{dt} = 2\Omega \cos \phi u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + F_z - g.$$

運動方程式の z 成分では, 浮力項に比べてコリオリ力の項はたいてい小さいので落す. この近似に対して, エネルギー方程式での辻褃があうように運動方程式の x 成分で $-2\Omega \cos \phi w$ の項を落す. すると結局, 以下の式が得られる.

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= 2\Omega \sin \phi v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + F_x, \\ \frac{dv}{dt} &= -2\Omega \sin \phi u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + F_y, \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + F_z - g\end{aligned}$$

ここで, 以下のコリオリパラメータを導入する.

$$f \equiv 2\Omega \sin \phi \quad (4.8)$$

これにより, 以下の方程式が得られる.

$$\frac{du}{dt} = fv - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + F_x, \quad (4.9)$$

$$\frac{dv}{dt} = -fu - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + F_y, \quad (4.10)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + F_z - g \quad (4.11)$$

4.4 球座標における方程式

普通の球座標 (ϕ, θ, r) を考える (北極が $\theta = 0$).

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi, \\ y &= r \sin \theta \sin \phi, \\ z &= r \cos \theta.\end{aligned}$$

ここで地球大気の場合について考える. Navier-Stokes 方程式の中で $\nabla\Phi$ の項は遠心力と重力の和だから, 実際には地球の中心を向かない. が, $\nabla\Phi$ は地球の中心方向を向くと仮定する. よってこの項は r 成分の式にしか現れない.

地球の回転軸は $\theta = 0$ の方向 (z 軸の向き) だとすると, $\boldsymbol{\Omega}$ は以下のようなになる.

$$\begin{aligned}\Omega_r &= \Omega \cos \theta, \\ \Omega_\theta &= -\Omega \sin \theta, \\ \Omega_\phi &= 0.\end{aligned}$$

以上の, 地球大気の事情を考慮して回転球座標における Navier-Stokes 方程式を書くこととなる. r 成分は

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \\
 &= v_\phi \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\
 &+ \nu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r v_r) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2 \cot \theta}{r^2} v_\theta \right\} \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

θ 成分は

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} \\
 &= -v_\phi \cos \theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\
 &+ \nu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r v_\theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \phi^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right\} \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

ϕ 成分は

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\phi}{r} + \frac{v_\theta v_\phi \cot \theta}{r} \\
 &= v_r \sin \theta - v_\theta \cos \theta - \frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} \\
 &+ \nu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r v_\phi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \right\} \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

また, 連続の式は

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{2v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} = 0 \quad (4.15)$$

4.5 参考文献

Lindzen, R.S., 1990 : Dynamics in Atmospheric physics

第 5 章 回転流体の基本特性

5.1 地衡流平衡

5.1.1 地衡流平衡の式

運動方程式において、時間微分項と外力項を無視すると、 x 成分の式と y 成分の式は

$$0 = fv - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (5.1)$$

$$0 = -fu - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (5.2)$$

となる。このバランスが成り立つ状態を地衡流平衡という。地球大気の場合、大規模スケールでは地衡流平衡が大雑把に成り立つ。

地衡流平衡の式は、天気図を見る際に言われる「等圧線の間隔が狭ければ風も強い」ということを表すものである。

5.1.2 例題

図 5.1 の天気図から地衡流の大きさを計算してみよ。

東経 130 度と東経 140 度の間で考える。緯度は 45 度としよう。大気の密度の値として

$$\rho = 1[\text{kg m}^{-3}]$$

を用いて、地衡流の式から風速を見積もってみよ。

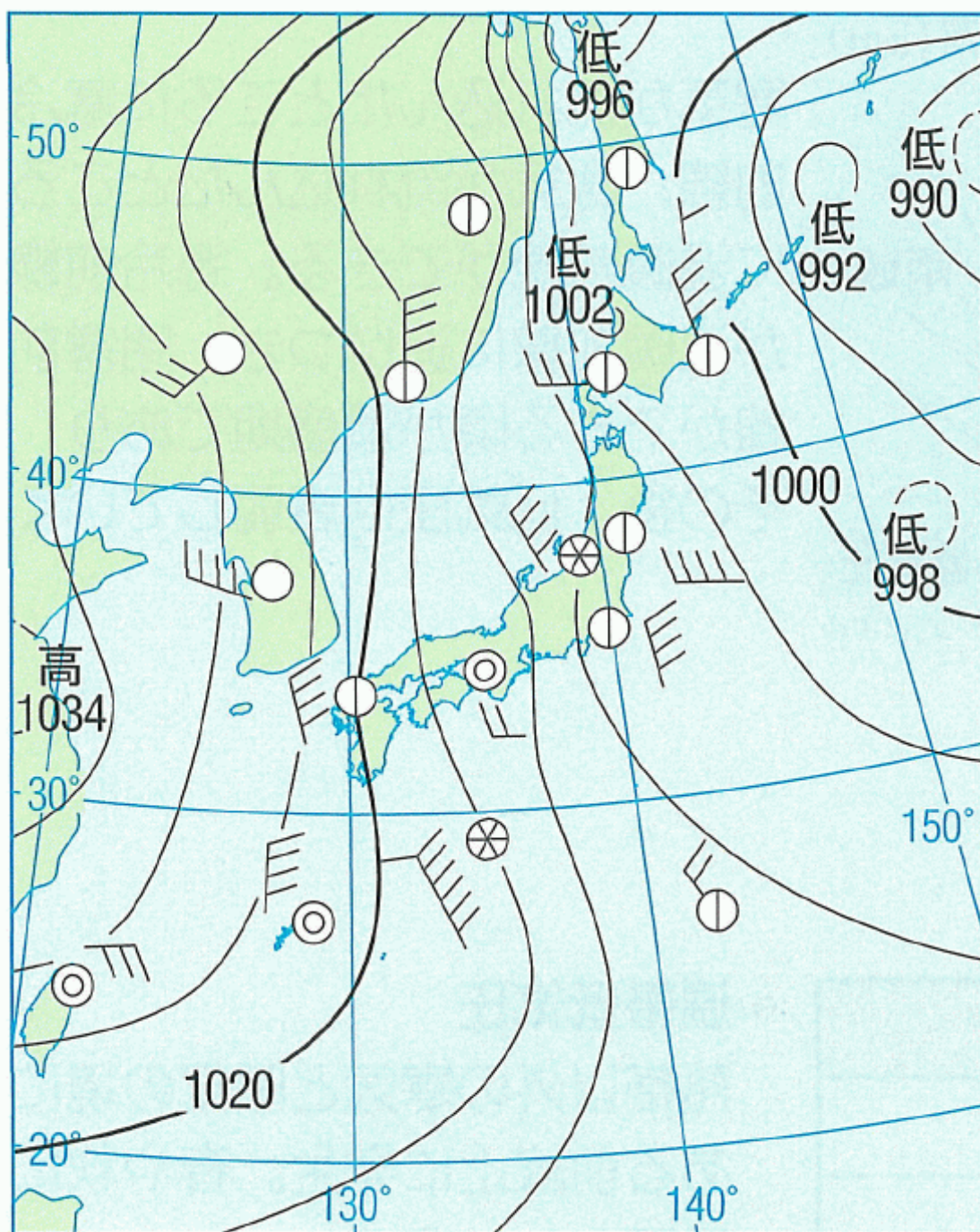


図 5.1: 日本の冬における天気図の典型例. ニューステージ地学図表 (浜島書店) より転載.

5.2 温度風平衡

5.2.1 温度風平衡の式

地衡風平衡の式

$$0 = fv - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$0 = -fu - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

を z について微分する. まず, y 成分の式を z で微分すると

$$\begin{aligned} f \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial y} \\ &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (-\rho g) = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \\ &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial y} \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial y} &= \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_z = \frac{\partial(p, z)}{\partial(y, z)} = \frac{\partial(p, z)}{\partial(y, z)} \frac{\partial(y, z)}{\partial(p, y)} \frac{\partial(p, y)}{\partial(y, z)} = -\frac{\partial(p, z)}{\partial(p, y)} \frac{\partial(p, y)}{\partial(z, y)} \\ &= -\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_y \end{aligned}$$

を使うと

$$\begin{aligned} f \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_p \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial y} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial z} \left[\frac{\partial \rho}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_p + \frac{\partial \rho}{\partial y} \right] \\ &= -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial z} \left[\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_p \right] = -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial z} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_p \\ &= \frac{g}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_p. \end{aligned}$$

理想気体の場合, $p = \rho RT$ を使うと

$$\frac{g}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_p = \frac{g}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{p}{RT} \right)_p = \frac{gp}{R\rho} \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{T} \right)_p = -\frac{gp}{R\rho T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_p = -\frac{g}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_p$$

となるので

$$f \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{pg}{RT} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_p \left(\frac{RT}{p} \right) = -\frac{g}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_p$$

が得られる. x 成分の式についても同様の計算ができて, 2 式をまとめて書くと

$$f \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{g}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_p, \quad (5.3)$$

$$f \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{g}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_p \quad (5.4)$$

これを温度風の式と言う. 回転系では, 水平に温度差があると鉛直方向に流れのシアが存在しなければならないことを示している.

5.2.2 例題

地球流体電脳倶楽部の dcchart プロジェクトの図を見つめる. <http://dennou-k.gfd-dennou.org/arch/dcchart/>

5.3 テーラープラウドマンの定理

地衡流平衡, かつ静水圧平衡が成立している状況を考える.

$$0 = fv - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$0 = -fu - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

ここで密度が定数だと近似できる場合,

$$0 = fv - \frac{\partial p}{\partial x \rho},$$

$$0 = -fu - \frac{\partial p}{\partial y \rho},$$

$$\frac{\partial p}{\partial z \rho} = -g$$

地衡流平衡の式を z で微分すると

$$0 = f \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial z \rho},$$

$$0 = -f \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial z \rho}$$

ここで静水圧の式を使うと、両式とも右辺第二項は消える。よって、

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= 0\end{aligned}$$

これは、回転軸方向に水平速度が変化しないことを意味している。これを Taylor-Proudman の定理と呼ぶ。

5.4 慣性振動

5.4.1 基礎方程式

運動方程式において、圧力勾配項、外力項(粘性項とポテンシャル力項)を無視すると、運動方程式の x 成分, y 成分はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= fv, \\ \frac{dv}{dt} &= -fu\end{aligned}$$

f が定数の場合を考える。

5.4.2 慣性振動の解

この方程式の一般解は

$$\begin{aligned}u(t) &= u_0 \cos ft + v_0 \sin ft, \\ v(t) &= -u_0 \sin ft + v_0 \cos ft\end{aligned}$$

である。 u, v それぞれ 1 回積分すると軌跡が求められる。

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{u_0}{f} \sin ft - \frac{v_0}{f} \cos ft + x_0, \\ y(t) &= \frac{u_0}{f} \cos ft - \frac{v_0}{f} \sin ft + y_0\end{aligned}$$

周期 f で、半径 $\frac{u_0}{f}$ の円を描くことがわかる。その半径を慣性半径と呼ぶ。