

Nakajima et al., 1992 test プログラム

支配方程式、離散化マニュアル

大西将徳(神戸大学大学院理学研究科)

1. はじめに

この文書は、作者(大西)が、放射計算の勉強(放射対流平衡、数値計算、fortran プログラミング)のために作成した、Nakajima et al., 1992 の放射対流平衡計算を再現するテストプログラムの、支配方程式と離散化について解説したものである。大西自身、または放射計算の初学者(大学院生など)が、コードの内容を確認するための最低限の情報をまとめることを目的としている。

2. 鉛直グリッドの与え方

- ・本モデルは鉛直一次元モデルである。
- ・大気の上端から、地表に向かって格子点を配置する。
- ・格子点上に配置された物理量は
 - ・圧力 p 、温度 T 、光学的厚さ τ 、
上向きフラックス FluxUp 、下向きフラックス FluxDown
- ・領域の中心(格子に挟まれた領域)に配置された物理量は
 - ・Flux Convergence
- ・最下端の格子は地表面である。
- ・最上端の格子は、大気上端であるが、ここでの圧力は0ではない。
これは、計算の初めの段階で温度の鉛直構造を下層から決定する際、
最上端の圧力が0であると計算ができないためである。
このため本モデルでは、最上端の圧力が0となっていないので、
格子のインデックスを1からスタートしている。
つまり、最上端の圧力: $p(1)$
- ・ p , T , FluxUp , FluxDown : それぞれ、その鉛直レベルでの
圧力、温度、上向きフラックス、下向きフラックスを表す
- ・ τ : その鉛直レベルよりも上の層の大気的光学的厚さを表す
(ただし、最上端 $\tau(1)$ は、圧力 $p(1) \neq 0$ であるが、 $\tau(1) = 1$ とする)
- ・ Flux Convergence: その領域に入ってくる正味の放射量を表す

- ・本モデルでは圧力の鉛直レベルを、
 1. 圧力 p : 等間隔
 2. $\ln(\text{圧力 } p)$: 等間隔の2通りで与えることができる。
- ・圧力の鉛直レベルの計算
 1. 地表面温度から計算される凝結性気体の分圧と、別に与えられる非凝結性気体の分圧の和として地表面圧力を計算する
 2. 本モデルでは、地表圧力に対する上端での圧力の大きさを与えており、その割合に従って、上端の圧力の大きさを計算する
 3. 地表面と上端の間を、圧力 p 等間隔 or $\ln(\text{圧力 } p)$ 等間隔に切って鉛直レベルを与える

圧力 $p(k)$

温度 $T(k)$

光学的厚さ $\tau(k)$

フラックス $\text{FluxUp}(k)$ or $\text{FluxDown}(k)$

・RungeKutta
・グリッドの間を収束する
まで細かく計算

・台形法
・グリッドの間を収束する
まで細かく計算

・台形法
・グリッドの間を収束する
まで細かく計算(T, τ のサブ
グリッドの値を再計算)

T, τ が収束するまで計算

上空

$P(1)$

$T(1)$

$\tau(1) = 0$

$\text{Flux}(1)$

$P(2)$

$T(2)$

$\tau(2)$

$\text{Flux}(2)$

グリッド

$P(i)$

$T(i)$

$\tau(i)$

$\text{Flux}(i)$

$\text{FluxUp}(i)$

$\text{FluxDown}(i)$

サブグリッド

$P(i+1)$

$T(i+1)$

$\tau(i+1)$

$\text{Flux}(i+1)$

$\text{FluxUp}(i+1)$

$\text{FluxDown}(i+1)$

$P(kmax-1)$

$T(kmax-1)$

$\tau(kmax-1)$

$\text{Flux}(kmax-1)$

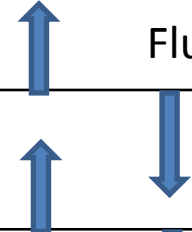
地表

$P(kmax)$

$T(kmax)$

$\tau(kmax)$

$\text{Flux}(kmax)$



3. 支配方程式と離散化

方程式系は、Nakajima et al., 1992 を基本としている。

3.1 飽和蒸気圧曲線

下記の式(Nakajima + : p2258の右コラム)を飽和蒸気圧曲線として用いる

$$p^*(T) = p_0^* \exp\left(-\frac{l}{RT}\right)$$

$p^*(T)$: 飽和蒸気圧, p_0^* : 飽和蒸気圧曲線の係数, T : 温度
 l : 潜熱, R : 気体定数

この式を格子点上で離散化し、

$$p^*(k) = p_0^* \exp(-l/RT(k))$$

を得る。

3.2 光学的厚さ

光学的厚さは下記の式(Nakajima +: eq1)から計算する

$$d\tau = (k_v x_v m_v + k_n x_n m_n) \frac{dp}{\bar{m}g}$$

τ : 光学的厚さ, k : 吸収係数, x , 混合比, m : 分子量

\bar{m} : 平均分子量, g : 重力加速度

サフィックス v, n は、凝結性成分、非凝結性成分を表す

Nakajima et al., 1992では気体の分子量をすべて等しく与えている。

つまり、

$$m_v = m_n = \bar{m} \quad (=18 \times 10^{-3} \text{ [kg mol}^{-1}\text{]})$$

そのため、分子量の計算はNakajima et al.の再現の範囲では必要ない。

ただ本プログラムでは分子量の違いを考慮したプログラムへの拡張を実装している。

この式を離散化し、

$k = i-1$	_____ $p(i-1), \tau(i-1)$	$d_p(i) = p(i) - p(i-1), d_\tau(i) = \tau(i) - \tau(i-1)$
$k = i$	_____ $p(i), \tau(i)$	$d_\tau(i) =$ $(k_v * x_v(i) * m_v(i) + k_n * x_n(i) + m_n(i)) *$ $d_p(i) / \bar{m}g$

3.3 放射伝達方程式

放射伝達方程式は下記の式(Nakajima +: eq2, 3)を変形して用いる

$$F_{\text{IR}}^{\uparrow}(\tau) = \pi B(\tau) - \int_{\tau_b}^{\tau} \frac{d}{d\tau'} (\pi B(\tau')) \times \exp\left(-\frac{3}{2}(\tau' - \tau)\right) d\tau', \quad (2)$$

$$F_{\text{IR}}^{\downarrow}(\tau) = \pi B(\tau) - \int_0^{\tau} \frac{d}{d\tau'} (\pi B(\tau')) \times \exp\left(-\frac{3}{2}(\tau - \tau')\right) d\tau' - \pi B(0) \exp\left(-\frac{3}{2}\tau\right), \quad (3)$$

F_{IR}^{\uparrow} , $F_{\text{IR}}^{\downarrow}$: 上向きフラックス、下向きフラックス, $\pi B = \sigma T^4$
 τ_b : 地表面での光学的厚さ

この式を部分積分して変形し、次のように離散化を行う。
なお、離散化したフラックスの要素を $\text{del}F(\tau', \tau)$ とする。
(: τ' 層から、 τ 層へやってくるフラックスの大きさ)

$$F_{zR}^{\uparrow}(\tau) = \pi B(\tau_0) \cdot \exp\left[-\frac{3}{2}(\tau_0 - \tau)\right] + \frac{3}{2} \int_{\tau}^{\tau_0} \pi B(\tau') \cdot \exp\left[-\frac{3}{2}(\tau' - \tau)\right] d\tau'$$

$\tau(k=i)$ a τ' .

$$F^{\uparrow}(\tau, k=i) = \pi B(\tau_0) \cdot \exp\left[-\frac{3}{2}(\tau_0 - \tau(k=i))\right]$$

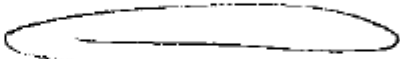

$k = i \uparrow$
 $k = k_{max}$
 $k_{max} - i \downarrow$

τ_0
 τ

$\tau(k_{max})$
 $\tau(k_{max}-1)$
 $\tau(k_{max}-2)$
 \vdots
 $\tau(k=i+1)$
 $\tau(k=i)$

$+$
 $+$
 $+$
 $+$
 $+$

$\int_{\tau(k_{max}-1)}^{\tau(k_{max})}$
 $\int_{\tau(k_{max}-2)}^{\tau(k_{max}-1)}$
 $\int_{\tau(k=i)}^{\tau(k=i+1)}$

$\frac{3}{2} \pi B(\tau') \cdot \exp\left[-\frac{3}{2}(\tau' - \tau)\right] d\tau'$



\Rightarrow $k=i, k'=j: i \uparrow (\sim k_{max} \downarrow \tau_0)$

del flux $(\tau'(k'=j), \tau(k=i))$

$$= \int_{\tau(k=i)}^{\tau(k=j)} \frac{3}{2} \pi B(\tau') \exp\left[-\frac{3}{2}(\tau' - \tau)\right] d\tau'$$

$$F_{ZF}^{\downarrow}(\tau) = \frac{3}{2} \int_0^{\tau} \alpha \beta(\tau') \cdot \exp\left[-\frac{3}{2}(\tau - \tau')\right] d\tau'$$

$\int_0^{\tau} \alpha \beta(\tau')$

$$k=i, \tau = \tau(k=i) \quad \tau \in \mathbb{R}$$

$$F_{ZF}^{\downarrow}(\tau(k=i)) = \int_{\tau(i-1)}^{\tau(k=i)} \alpha \beta(\tau') \cdot \exp\left[-\frac{3}{2}(\tau - \tau')\right] d\tau' + \int_{\tau(i-1)}^{\tau(i-1)} \alpha \beta(\tau') \cdot \exp\left[-\frac{3}{2}(\tau - \tau')\right] d\tau' + \int_{\tau(i-2)}^{\tau(i-2)} \alpha \beta(\tau') \cdot \exp\left[-\frac{3}{2}(\tau - \tau')\right] d\tau' + \int_{\tau(i-2)}^{\tau(i-2)} \alpha \beta(\tau') \cdot \exp\left[-\frac{3}{2}(\tau - \tau')\right] d\tau' + \int_{\tau(i-3)}^{\tau(i-3)} \alpha \beta(\tau') \cdot \exp\left[-\frac{3}{2}(\tau - \tau')\right] d\tau' + \int_{\tau(i-3)}^{\tau(i-3)} \alpha \beta(\tau') \cdot \exp\left[-\frac{3}{2}(\tau - \tau')\right] d\tau' + \int_{\tau(i-2)}^{\tau(i=2)} \alpha \beta(\tau') \cdot \exp\left[-\frac{3}{2}(\tau - \tau')\right] d\tau' + \int_{\tau(i=2)}^{\tau(i=2)} \alpha \beta(\tau') \cdot \exp\left[-\frac{3}{2}(\tau - \tau')\right] d\tau'$$

$$j=1 \sim i-1 \text{ etc. } \tau \in \mathbb{R}$$

del Flux. $(\tau'(k'=j), \tau(k=i))$

$$= \int_{\tau(j)}^{\tau(j+1)} \frac{3}{2} \alpha \beta(\tau') \cdot \exp\left[-\frac{3}{2}(\tau(i) - \tau')\right] d\tau'$$

Flux Σ_k .

delt Flux (τ', τ)

delt Flux ($\tau' (k=j'), \tau (k=i)$)

下向き
→

$$i) \int_{\tau(j')}^{\tau(j'+1)} \tau(j') \frac{3}{2} \pi B(\tau') \cdot \exp \left[-\frac{3}{2} (\tau(i) - \tau') \right] d\tau'$$

(k.c. $j' = 1 \sim i-1$).

上向き
↑
1層下

$$ii) = \pi B(\tau(i)) \cdot \exp \left[-\frac{3}{2} (\tau(i) - \tau(i)) \right]$$

(k.c. $j' = i$).

上向き
↑
9層上

$$iii) = \int_{\tau(j'-1)}^{\tau(j')} \frac{3}{2} \pi B(\tau') \cdot \exp \left[-\frac{3}{2} (\tau' - \tau(i)) \right] d\tau'$$

(k.c. $j' = i+1 \sim k_{max}$).

3.4 湿潤擬断熱減率

湿潤擬断熱減率は下記の式(Nakajima +: eq4)を用いる

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{\text{moist pseudoadiabat}} = \frac{\frac{RT}{p c_{pn}} + \frac{x_v^* l}{x_n p c_{pn}}}{x_n + x_v^* \frac{c_{pv}}{c_{pn}} + \frac{x_v^* l^2}{x_n R T^2 c_{pn}}} \quad (4)$$

c_p は定圧モル比熱

この式を離散化し、

$$dT(k) = \frac{\frac{RT(k)}{P(k) c_{pm}} + \frac{x_{v^*}(k) l}{x_m(k) P(k) c_{pm}}}{x_m(k) + x_v(k) \frac{c_{pv}}{c_{pm}} + \frac{x_v^*(k) l^2}{x_m(k) R T^2(k) c_{pm}}} dp(k)$$