

数値予報モデルの力学過程

室井ちあし

1997年10月2日

目次

1	はじめに	3
2	原理	3
3	基本方程式系	3
3.1	プリミティブ方程式	3
3.2	非静力モデル	5
4	座標系変換	6
4.1	GSM	7
4.2	RSM	8
5	鉛直座標系	9
6	数値計算法の基礎	12
6.1	有限差分近似の基礎概念	12
6.1.1	適合性	13
6.1.2	正確度	13
6.1.3	収束性	14
6.1.4	安定性	14
6.2	安定性の判定法	15
7	ガラーキンの法	16
7.1	スペクトル法	17
7.2	有限要素法	18
8	鉛直差分	19
8.1	フルレベルとハーフレベル	19
8.2	保存スキーム	19
8.3	CP グリッド	20

9	時間積分法	20
9.1	様々な時間積分法	21
9.1.1	時間レベルをいくつ使うか	21
9.1.2	時間レベルの使い方	21
9.2	リーブフロッグ法とタイムフィルター	22
9.3	セミ・インプリシット法	23
9.4	セミ・ラグランジアン法	23
10	境界条件の問題	24
10.1	ネスティング	24
10.2	側面境界	24
10.3	上部境界	26
11	水平拡散	26
12	イニシャリゼーション	26
13	おわりに	26

1 はじめに

数値予報課の数値予報モデル(とりあえず GSM と RSM)の力学過程の根幹が「理解」できるようになる、できれば書き換えられるようになる、さらにできれば自分でモデルが作成できるようになることを目的とする。ただし、現在のモデルの計算手法のみに限定せず、数値予報課の開発課題とも絡めてなるべく簡潔で普遍的な解説を試みる。細部は取り上げないので、残りは参考文献をたよりに各自で努力していただきたい。

2 原理

テンデンシー → 未来の値
運動方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = F$$

を離散化

$$\frac{\phi^{t+1} - \phi^t}{\Delta t} = F$$

$$\phi^{t+1} = \phi^t + F \Delta t$$

つまり、テンデンシーを求め時間間隔を掛けて加える、という操作を繰り返せば、将来の値を好きなだけ求めることができる(はずである)。精度の高い予報のためには、最初の値(初期値)とテンデンシーが共に正確に求められていること、離散化が適切に行なわれていること、が重要である。

3 基本方程式系

3.1 プリミティブ方程式

プリミティブ方程式の基本的な解説は萬納寺(1994) [11]、プリミティブ方程式に至る歴史や分散性は岸保(1978) [4]、増田(1981) [10]を参照。

鉛直に静力学平衡を仮定し、一般流で伝搬する波(ロスビー波)と東西に伝搬する内部重力波を含んでいる¹。音波は除去されている。

¹

$$u, v, h \propto e^{ik(x-ct)}$$

とすれば

$$c \approx U, \quad c \approx \pm \sqrt{g\bar{h} + \frac{f^2}{k^2}}$$

の三つの近似解が得られる。

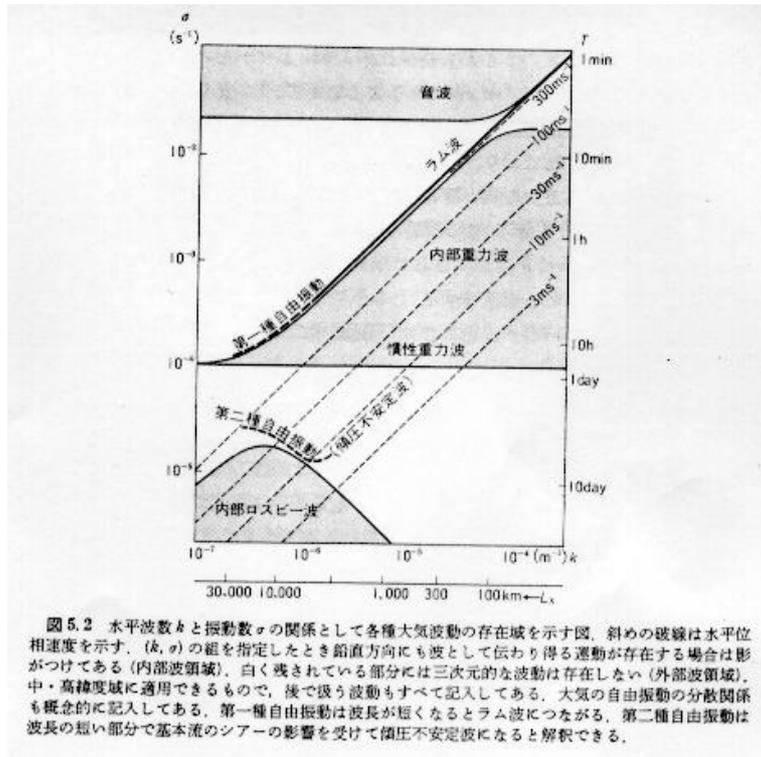


図 1: 大気中に存在する各種波動。松野・島崎 (1981) [12] より

直交直線座標系 (x, y, z) における方程式は

1. 水平方向の運動方程式

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -2\vec{\Omega} \times \vec{u} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{F}_u$$

2. 鉛直方向の運動方程式 (静力学平衡)

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$$

3. 連続の式、質量保存の式

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u}$$

4. 熱力学方程式

$$\frac{d\theta}{dt} = F_\theta$$

場合によって T , T_v やエントロピー S などを使う。

5. 水蒸気

$$\frac{dq}{dt} = F_q$$

6. 状態方程式

$$p = \rho RT$$

ここで

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

である。

水平方向の速度、温度、水蒸気、地上気圧 (または密度) が予報変数で、その他の式は診断的に求めるのに用いられる。

GSM ではスペクトル法で極で連続な物理量を球関数展開するために、運動方程式を渦度 (ζ)・発散 (D) に関する方程式に変換する。例えば、小倉 (1978) [1] 参照。

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

メソスケール・モデルでは、水蒸気の状態をより精密に表現することが必要である。究極的には水蒸気を雲粒、雨滴、氷晶、雪片、あられ、ひょう、、、などと細分し、それぞれの予報方程式 (移流と相変化) をたてて「予報変数化」すること (Micro Physics) が必要になるであろう。もちろん計算量は多くなってしまう。

3.2 非静力モデル

水平方向の波長が鉛直方向よりずっと長い場合は静力学平衡でよい。しかし同程度かそれ以下になると静力学平衡の仮定は使えない。

非静力モデルでは、静力学平衡の式の代わりに、鉛直方向の運動方程式を用いる。

さらに圧縮性流体を考える場合は、連続の式

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

を用いて 3 次元の密度 (または気圧) を未知数として解く必要がある。それに対して、非弾性近似・ブジネスク近似のモデルでは連続の式は $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ を含まないから予測方程式ではなく、境界条件が与えられた診断方程式となる。詳しくは小倉 (1997) [2] 参照。

圧縮系非静力モデルには音波も含まれる。非静力モデルの開発では、現在では圧縮系が主流となりつつある。

4 座標系変換

球面上の方程式を導出するために、直交直線座標系 から 一般直交曲線座標系 へ変換することを考える。松村 (1992) [13] は 3 次元の単位ベクトルの変換則から出発している。テンソル解析を用いるとより一般的で厳密である。気象計算では例えば、郷田・栗原 (1991) [5]、吉崎 (1988) [14]。しかし通常は微分演算子の変換則 (Chain Rule) で機械的に置き換えることで十分である。

ここでは、松村 (1992) [13] より一般直交曲線座標系 (モデルの座標系) での公式を列挙する。

単位ベクトルが $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ 、座標系が

$$\vec{x} = \zeta_1 \vec{e}_1 + \zeta_2 \vec{e}_2 + \zeta_3 \vec{e}_3$$

で与えられる時、線分素片は

$$d\vec{s} = ds_1 \vec{e}_1 + ds_2 \vec{e}_2 + ds_3 \vec{e}_3$$

$$ds_1 = g_1 d\zeta_1, \quad ds_2 = g_2 d\zeta_2, \quad ds_3 = g_3 d\zeta_3$$

メトリック係数は、直交直線座標系での座標を (x, y, z) として

$$g_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \zeta_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta_1}\right)^2}$$

$$g_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \zeta_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta_2}\right)^2}$$

$$g_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \zeta_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta_3}\right)^2}$$

直交直線座標の単位ベクトルを

$$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$$

とすると、一般直交曲線座標系 (モデルの座標系) での単位ベクトルは

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{g_1} \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta_1} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \zeta_1} \vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \zeta_1} \vec{e}_z \right)$$

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{g_2} \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta_2} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \zeta_2} \vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \zeta_2} \vec{e}_z \right)$$

$$\vec{e}_3 = \frac{1}{g_3} \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta_3} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \zeta_3} \vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \zeta_3} \vec{e}_z \right)$$

任意のベクトルを

$$\vec{A} = A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3 = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$$

で与えられるとすると、ベクトルの各成分は

$$A_1 = \frac{1}{g_1} \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta_1} A_x + \frac{\partial y}{\partial \zeta_1} A_y + \frac{\partial z}{\partial \zeta_1} A_z \right)$$

$$A_2 = \frac{1}{g_2} \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta_2} A_x + \frac{\partial y}{\partial \zeta_2} A_y + \frac{\partial z}{\partial \zeta_2} A_z \right)$$

$$A_3 = \frac{1}{g_3} \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta_3} A_x + \frac{\partial y}{\partial \zeta_3} A_y + \frac{\partial z}{\partial \zeta_3} A_z \right)$$

主なベクトル演算は

$$\nabla = \left[\frac{1}{g_1} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \right] \vec{e}_1 + \left[\frac{1}{g_2} \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \right] \vec{e}_2 + \left[\frac{1}{g_3} \frac{\partial}{\partial \zeta_3} \right] \vec{e}_3$$

$$\nabla \vec{A} = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta_1} (g_2 g_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial \zeta_2} (g_3 g_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial \zeta_3} (g_1 g_2 A_3) \right\}$$

$$\Delta = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left(\frac{g_2 g_3}{g_1} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \left(\frac{g_3 g_1}{g_2} \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta_3} \left(\frac{g_1 g_2}{g_3} \frac{\partial}{\partial \zeta_3} \right) \right\}$$

連続系のベクトル式を球座標系を用いることによって全球モデルの方程式系を、投影面座標系を用いることによって領域モデルを表現する。

エネルギー論は省略する。

4.1 GSM

球座標表示

$$x = r \sin \phi \cos \lambda$$

$$y = r \sin \phi \sin \lambda$$

$$z = r \cos \phi$$

メトリック係数は

$$g_r = 1, \quad g_\phi = r, \quad g_\lambda = r \sin \phi$$

主なベクトル演算は

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) r \vec{e}_\phi + \left(\frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \vec{e}_\lambda$$

$$\nabla \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\sin \phi A_\phi) + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} (A_\lambda)$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}$$

球座標系での完全な方程式系は例えば NPD/JMA (1997) [24] 参照。ただしこれは後述の鉛直座標の選択も済んでいる。

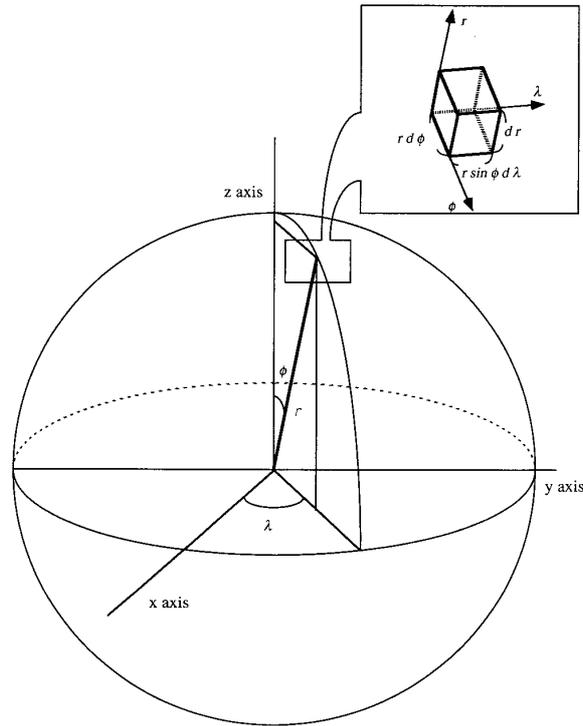


図 2: 球座標表示と線分素片。松村 (1992) [13] より

4.2 RSM

ランベルトはもうちょっとややこしい。とりあえずポーラステレオ座標系の方程式系を導出することだけを考える。map factor を m として

$$m \equiv \frac{2}{1 + \cos \phi} \frac{a}{a + z}$$

とおく²と、

$$\zeta_1 = mx, \quad \zeta_2 = my, \quad \zeta_3 = \frac{1}{\cos \phi} z - a$$

メトリック系数は

$$g_x = \frac{1}{m}, \quad g_y = \frac{1}{m}, \quad g_z = 1$$

これらを用いて、例えば運動方程式の移流項は $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ をあらためて x, y, z とおいて

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \cdot u &= mu \frac{\partial u}{\partial x} + mv \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + m^2 uv \frac{\partial(\frac{1}{m})}{\partial y} + muw \frac{\partial(\frac{1}{m})}{\partial z} - m^2 v^2 \frac{\partial(\frac{1}{m})}{\partial x} \\ &= mu \frac{\partial u}{\partial x} + mv \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - v \left(u \frac{\partial m}{\partial y} - v \frac{\partial m}{\partial x} \right) + \frac{uw}{a+z} \end{aligned}$$

ランベルト座標系への変換を真面目にやるのは、領域モデルの勉強会に回します。

²通常は鉛直方向の変化は無視する

ランベルトのマップファクターは

$$m = \frac{a}{a+z} \left(\frac{\sin \phi_1}{\sin \phi} \right)^{1-\cos \phi_0} \left(\frac{1+\cos \phi_1}{1+\cos \phi} \right)^{\cos \phi_0}$$

ただし

$$\cos \phi_0 = \frac{\ln(\sin \phi_1) - \ln(\sin \phi_2)}{\ln \left\{ \tan \left(\frac{\phi_1}{2} \right) \right\} - \ln \left\{ \tan \left(\frac{\phi_2}{2} \right) \right\}}$$

RSM の場合

$$\phi_1 = 30, \quad \phi_2 = 60$$

である。また RSM ではマップファクターの高度変化を無視している。

map factor を含んだ完全な方程式系は例えば NPD/JMA (1997) [24] 参照。ただしこれは後述の鉛直座標の選択も済んでいる。

5 鉛直座標系

鉛直座標系を決定する際の重要なポイントは

1. なるべく鉛直内挿を行なわない
2. 地形を正しく取り込む
3. 質量保存、エネルギー保存則を満足する
4. より少ない鉛直レベル数でより正しく表現できればなおよい

ことである。もちろん全てを完全に満たすことは不可能である。Kasahara(1974) [21] はプリミティブ方程式で用いられる様々な鉛直座標についてレビューしている。

- z 座標系はシンプルであるが、 z 座標が使われたモデルというのは聞いたことがない。(非静力モデルでは頻繁に用いられる)
- p 座標を用いると連続の式が p の診断方程式になり、鉛直運動が簡単に求められる。しかし、地形の境界条件を正確に取り込むことができない。
- σ 座標は p 座標を変形して、地形を座標の下端となるように設定したものである。地形は正しく取り込まれるが、運動方程式中の気圧傾度力と重力をバランスさせることが難しい。
- そこで、下層は σ 座標、上層は p 座標という η 座標系が考えられた (Simmons and Burridge, 1981 [25])。これにより下層では地形をより正しく取り込み、上層では地形の険しいところでも気圧傾度のエラーを少なくすることに成功した。

η 座標を一般的に記述すると

$$\eta = \eta(p, p_s)$$

ここで

$$\eta(0, p_s) = 0, \quad \eta(p_s, p_s) = 1$$

直交直線座標系 (x, y, z) におけるプリミティブ方程式は

1. 水平方向の運動方程式

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -2\vec{\Omega} \times \vec{u} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{F}_u \quad (1)$$

2. 鉛直方向の運動方程式 (静力学平衡)

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (2)$$

3. 連続の式、質量保存の式

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \quad (3)$$

η 座標系での方程式を導出する。 x, y, t は固定であって、 z から η への単調変換を考える。 u, v, w の定義は不変で直交している。スカラー量 A に対して

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_\eta = \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_z + \frac{\partial A}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_\eta$$

ここで

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial A}{\partial \eta}$$

なる関係を用いれば

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_\eta = \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_z + \frac{\partial \eta}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_\eta \frac{\partial A}{\partial \eta}$$

x, y に対しても同様に

$$\nabla_\eta A = \nabla_z A + \frac{\partial \eta}{\partial z} \nabla_\eta z \left(\frac{\partial A}{\partial \eta} \right) \quad (4)$$

となる。したがって z 系方程式中の全微分は

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_\eta + V_H \cdot \nabla_\eta + \left[w - \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_\eta - V \cdot \nabla_\eta z \right] \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (5)$$

と書きかわる。 η 座標系での全微分をあらためて

$$\frac{d}{dt} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_\eta + V_H \cdot \nabla_\eta + \dot{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (6)$$

と定義する、ここで

$$\dot{\eta} = \frac{d\eta}{dt}$$

である。上の式 (5) と (6) を見比べると

$$\dot{\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial z} \left[w - \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{\eta} - V \cdot \nabla_{\eta} z \right] \quad (7)$$

となる。

水平方向の運動方程式 (1) は (4) を用いることにより

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -2\vec{\Omega} \times \vec{u} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla}_{\eta} p + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \nabla_{\eta} z \frac{\partial p}{\partial \eta} + \vec{F}_u \quad (8)$$

ここで静力学平衡の式 (2) を用いると結局

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -2\vec{\Omega} \times \vec{u} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla}_{\eta} p - g \nabla_{\eta} z + \vec{F}_u$$

となる。

次に連続方程式 (3) の変換を考える。(7) より

$$w = \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{\eta} + V \cdot \nabla_{\eta} z + \dot{\eta} \frac{\partial z}{\partial \eta}$$

だから

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial V}{\partial \eta} \cdot \nabla_{\eta} z$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial z} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial V}{\partial \eta} \cdot \nabla_{\eta} z \right] + \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \eta} \end{aligned}$$

また (4) より

$$\nabla_z \cdot V = \nabla_{\eta} \cdot V - \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \nabla_{\eta} z \frac{\partial V}{\partial \eta}$$

であるから、上の 2 式を用いると連続方程式は

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) \right]_{\eta} + \nabla_{\eta} \cdot \left(\rho V \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho \dot{\eta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) = 0$$

ここで静力学平衡の関係を η 面で表現すると

$$\rho \frac{\partial z}{\partial \eta} = -\frac{1}{g} \frac{\partial p}{\partial \eta}$$

となるから結局連続方程式は

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_\eta + \nabla_\eta \cdot \left(V \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\dot{\eta} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) = 0$$

となる。連続方程式を鉛直に積分して、モデルの上端・下端で $\dot{\eta} = 0$ という境界条件を用いることにより、

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = - \int_0^1 \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{v} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) d\eta$$

$$\dot{\eta} \frac{\partial p}{\partial \eta} = - \frac{\partial p}{\partial t} - \int_0^\eta \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{v} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) d\eta$$

と決まる。静力学モデルで上昇流が「診断的に求められる」というのは、直接テンデンスーを計算して求められるのではなく、他の値を先に決めといてそれに合うように求めるからである。

6 数値計算法の基礎

数値予報モデルの数値計算手法における一般的な概念について、Mesinger and Arakawa (1976) [22] を基に解説する。

6.1 有限差分近似の基礎概念

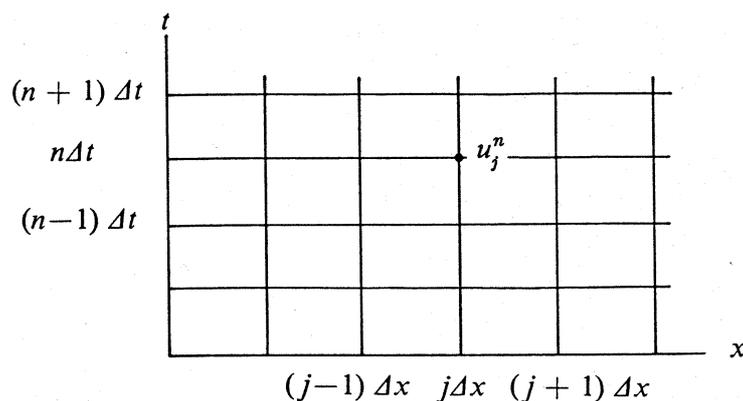


図 3: 有限差分格子。Mesinger and Arakawa(1976) [22] より

η は下向きが正、したがって $\dot{\eta}$ も下向きが正、つまり上昇流 (鉛直 P 速度) は下向き (下降している) が正である。

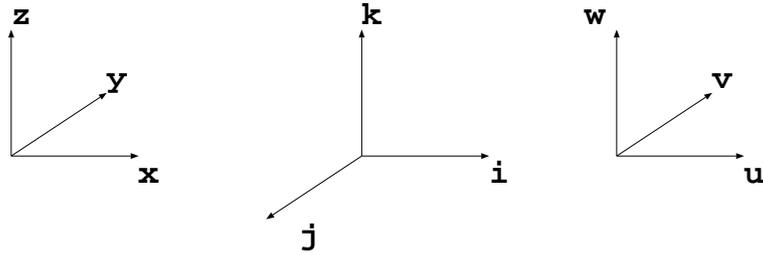


図 4: 数値予報課流の座標軸、添字、速度ベクトルの向き

これ以降、空間の添字を下付、時間の添字を上付に書くことにする。

6.1.1 適合性

差分間隔を小さくすると、近似された導関数が真の導関数に収束する性質

6.1.2 正確度

どの程度適合性があるのかを示す度合
有限差分近似した際の誤差 ϵ が

$$\epsilon = O((\Delta x)^n)$$

となる時、このスキームを Δx について n 次のスキームという。

$\frac{du}{dx}$ の例。

- 1 次の精度

$$\frac{du}{dx} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}$$

とする。右辺を Taylor 展開すると

$$\frac{du}{dx} = \frac{u_i + \frac{du}{dx}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx^2}(\Delta x)^2 + \dots}{\Delta x}$$

よって

$$\epsilon = \frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx^2}\Delta x = O(\Delta x)$$

- 2 次の精度

$$\frac{du}{dx} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}$$

- 4 次の精度

$$\frac{du}{dx} = \frac{4}{3}\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{1}{3}\frac{u_{i+2} - u_{i-2}}{4\Delta x}$$

当然のことながら、正確度の高いスキームほど誤差は小さくなる。したがって原理的にはできるだけ正確度の高いスキームを使った方がよい。しかし実際は境界条件や計算量などの問題があり、4次より高次のスキームは通常用いられることはない。

6.1.3 収束性

差分間隔を小さくすると、数値解が真の解に収束する性質

適合性があるからといって、解が収束するとは限らない。収束するためには、数値解を求めようとしている点の特性曲線がその点の依存領域内部にあることである (図 5 参照)。その結果、差分間隔と時間積分間隔との間に条件が生じる。

$$c\Delta t \leq \Delta x$$

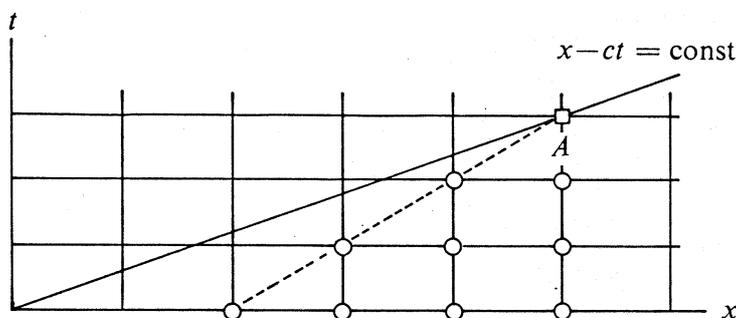


図 5: 特性曲線と依存領域の位置関係。Mesinger and Arakawa(1976) [22] より

特性曲線上では u の値は等しい。本来ならば点 A における u の値は原点のみで決まる。しかし数値解は白丸をつけた点を使って計算されるので、原点と全く異なる値をとるかもしれない。このまま格子間隔を小さくしても誤差が小さくなるという保証はない。

6.1.4 安定性

数値解が発散しない性質

任意の初期条件に対し安定な数値解を与える場合、そのスキームは安定であるという。

真の解が有界とわかっていて、差分間隔一定の条件のもとでタイムステップを増加させた時、真の解と数値解の誤差が有界ならば、その数値解は安定である。

いわゆる“CFL 条件”とは、この数値解が安定であるための条件である。

水平格子間隔を半分にすると、計算量は空間について 4 倍、時間間隔も半分にしなればならないから時間について 2 倍、合計 8 倍かかることになる。

収束性、安定性の定義には複数のものがある。しかしながら厳密な定義や議論には実用的な意味はあまりない。なぜなら数値解の特性は非線形効果などの他の要因により影響を

受けるからである。とりあえずここでは「情報が伝達する筋道」が重要であることを指摘しておく。

6.2 安定性の判定法

ここでは最もよく用いられる von Neumann 法を取り上げる。

解をフーリエ級数に分解し、全ての成分が安定でならばそのスキームは安定であるということになる。方程式は線形化する必要がある。解として

$$u_j^n = \text{Re}[U^n e^{ikj\Delta x}]$$

という形を考える。そしてタイムステップが増加した場合どうなるかを解析するために、増幅係数 λ を導入する。

$$U^{n+1} \equiv \lambda U^n$$

この時数値解の λ の値により

安定	$ \lambda < 1$
中立	$ \lambda = 1$
不安定	$ \lambda > 1$

と分類できる。

例えば 1 次元移流方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

ただし $u = u(x, t)$, $c =$ 正の定数 である。これを差分化した式

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

を書き換えると

$$u_i^{n+1} = \left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) u_i^n + \frac{c\Delta t}{\Delta x} u_{i-1}^n$$

この解として

$$u_j^n = \text{Re}[U^n e^{ikj\Delta x}]$$

という形を考え、増幅係数 λ を導入すると

$$\lambda = 1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x} + \frac{c\Delta t}{\Delta x} e^{-ik\Delta x}$$

となる。これより

$$|\lambda|^2 = 1 - 2 \frac{c\Delta t}{\Delta x} \left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) (1 - \cos k\Delta x)$$

が得られる。よって安定性の条件 $|\lambda| \leq 1$ は結局

$$\Delta x \geq c\Delta t$$

となる。

7 ガラーキン法

区間 $[a \leq x \leq b]$ で定義される関数 $u(x, t)$ を考える。非線形項と線形項を含む支配方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - c \frac{\partial u}{\partial x}$$

を解くことを考える。そして $u(x)$ を直交基底関数 $\phi(x)$ を用いて

$$u(x) = \sum_{j=1}^N u_j \phi_j(x)$$

と展開する。 u_j は j 番目の基底関数の係数である。これを支配方程式に代入する (ただし非線形項は除く。理由はあとで) と

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^N u_j \phi_j(x) + u \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial}{\partial x} \sum_{j=1}^N u_j \phi_j(x) = 0$$

ガラーキン法とは、この左辺 (基底関数で展開した残差) と基底関数が直交している u が方程式の解であること³を用いた方法である。すなわち

$$\int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^N u_j \phi_j(x) + c \frac{\partial}{\partial x} \sum_{j=1}^N u_j \phi_j(x) + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \phi_i(x) dx = 0, \quad (i = 1, \dots, N)$$

が成立するような u を求める。

u_j は x の関数ではないからこの式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^N u_j \int_a^b \phi_j(x) \phi_i(x) dx + c \sum_{j=1}^N u_j \int_a^b \frac{\partial \phi_j(x)}{\partial x} \phi_i(x) dx = - \int_a^b u \frac{\partial u}{\partial x} \phi_i(x) dx$$

と書き換えられる。 $\phi(x)$ として直交関数を選んでいるから適当にスケールして

$$\int_a^b \phi_j(x) \phi_i(x) dx = \delta_{ij}$$

を用いれば左辺第一項の積分が求まる。

³ちゃんと証明するには、変分学の基本補題が必要。

7.1 スペクトル法

基底関数として「グローバルな」関数を選ぶことをスペクトル法という。全球モデルでは球面調和関数（東西方向には三角関数、南北方向にはルジャンドルの陪関数）、領域モデルでは三角関数が選ばれている。係数のことを波数、その世界のことを波数空間などという。

さらにスペクトル法では適当な関数を選ぶと

$$\int_a^b \frac{\partial \phi_j(x)}{\partial x} \phi_i(x) dx = a \delta_{ij}$$

とすることができる。これらを代入して

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i + a c u_i = - \int_a^b u \frac{\partial u}{\partial x} \phi_i(x) dx, \quad (i = 1, \dots, N)$$

となり、線形項の空間微分がなくなって左辺は直交基底の係数だけの計算となる。時間微分については普通は適当な有限差分で近似する。

右辺の非線形項については、基底関数を代入して展開してしまうと計算量が膨大になるので、代入せずに計算した値に基底関数をかけて積分するという手法を用いている。これを変換法という。スペクトル法について基本的な解説は、および全球モデルについては金光ほか (1982) [3]、領域モデルについては巽 (1986) [7] がよい。

スペクトル法の最大の利点は、やはり空間微分を含まないことであろう。空間差分による誤差や非線形不安定のようなものもない。

欠点としては、境界条件に対して柔軟でないことがあげられる。このため気象庁の領域スペクトルモデルでは、境界条件を満たすための「準基底」が導入されている。基底と準基底を併せて「拡張基底」と呼んでいる。NCEP の領域スペクトルモデルでは、全球モデルとの差だけを予報するという手法で境界条件の問題を回避している (Jung and Kanamitsu, 1994 [20])。

スペクトル法の Δt の決め方について触れておく。

線形移流方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -U \frac{\partial u}{\partial x}$$

をスペクトル展開すると、波数毎の方程式

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} = -i k_m U u_m$$

が得られる。これを

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\Delta t} = -i k_m U u_m^n$$

と差分化する。von Neumann 法を用いると、増幅率を λ として

$$\lambda^2 + 2iq\lambda - 1 = 0$$

ここで $q = \Delta t k_m U$ である。よって

$$\lambda = -qi \pm \sqrt{1 - q^2}$$

つまり $q \leq 1$ ならば $|\lambda|^2 = 1$ となって中立であるから、安定条件

$$\Delta t \leq \frac{1}{k_m U}$$

が得られる。これが各波数成分について成立するので、結局スペクトル法の CFL 条件は、最大波数を k_{max} として

$$\Delta t \leq \frac{1}{k_{max} U}$$

である。

格子点法の CFL 条件と比較すると格子間隔 Δx に対応するのが

$$\Delta x = \frac{1}{k_{max}}$$

であることがわかる。

7.2 有限要素法

基底関数として「ローカルな」関数を選ぶことを有限要素法という。

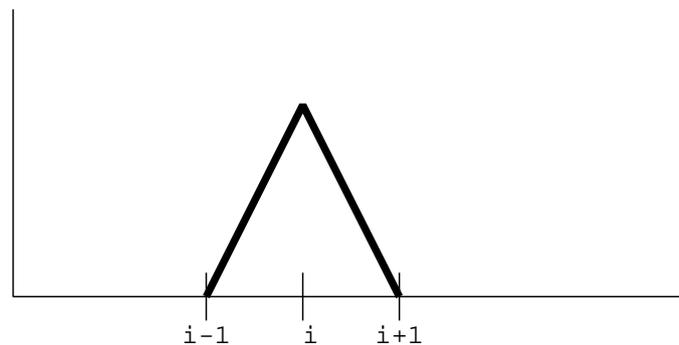


図 6: 「ローカルな」基底関数

このように関数を選ぶと線形項は

$$\int_a^b \frac{\partial \phi_j(x)}{\partial x} \phi_i(x) dx = \pm a \delta_{i\pm 1, j}$$

となって、有限差分と同様の形となる。非線形項も係数を用いて計算することができる⁴。

CMC (カナダ) のオペレーショナルな領域モデルは有限要素法を用いている (Mailhot et al., 1997 [23])。工学の分野では広く用いられるほか、海洋モデルでも使われているようである。

⁴区分積分して計算されることが多い。通常は基底として 1 次関数を用いられるので Simpson 則を用いれば積分は容易に求まる。

8 鉛直差分

8.1 フルレベルとハーフレベル

ハイブリッド座標系 η , ただし $0 \leq \eta \leq 1$ で大気上端を $\eta = 0$, 下端を $\eta = 1$ とする。 p と η の関係式は

$$p = A(\eta) + B(\eta)p_s$$

である。

大気上端 ($\eta = 0$) を $k = \text{KMAX} + \frac{1}{2}$, 下端 ($\eta = 1$) を $k = \frac{1}{2}$ とラベル付けし、 $k = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots, \text{KMAX}, \text{KMAX} + \frac{1}{2}$ の η 面を考える。 k が整数のレベルをフルレベル、半整数のレベルをハーフレベルと呼ぶ。

また予報変数 (風速・温度・比湿) はフルレベルで定義され、鉛直フラックスなどはハーフレベルで定義される (Lorenz Grid)。

8.2 保存スキーム

レベルの定義は、ハーフレベルの $A(\eta), B(\eta)$ を与え、フルレベルを求めている。しかしフルレベルはハーフレベルの「中間」ではない。またハーフレベルの変数の値が必要になる場合があるが、フルレベルの値を足して 2 で割ればいいわけではない。数値発散を防ぐなどのために離散系でのエネルギーと各運動量の保存性を考慮すると、離散化のための拘束条件が生じる (Simmons and Burridge, 1981 [25])。

ここでは結果だけ記述する。

エネルギー保存を考慮して変数 F の鉛直移流項は

$$\left(\dot{\eta} \frac{\partial F}{\partial \eta} \right)_k = \frac{1}{2\Delta p_k} \left[\left(\dot{\eta} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right)_{k+\frac{1}{2}} (F_{k+1} - F_k) + \left(\dot{\eta} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right)_{k-\frac{1}{2}} (F_k - F_{k-1}) \right]$$

ここで

$$\Delta p_k = p_{k+\frac{1}{2}} - p_{k-\frac{1}{2}}$$

である⁵。

気圧傾度項の精度を考慮して、静力学平衡の式は

$$\begin{aligned} \phi_{k+\frac{1}{2}} - \phi_{k-\frac{1}{2}} &= -RT_k \ln \frac{p_{k+\frac{1}{2}}}{p_{k-\frac{1}{2}}} \\ \phi_k - \phi_{k-\frac{1}{2}} &= -RT_k \left(1 - \frac{p_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta p_k} \ln \frac{p_{k+\frac{1}{2}}}{p_{k-\frac{1}{2}}} \right) \end{aligned}$$

とすると、気圧傾度力は

$$\left(\frac{RT}{p} \nabla p \right)_k = RT_k \nabla \left[\frac{1}{\Delta p_k} \left(p_{k+\frac{1}{2}} \ln p_{k+\frac{1}{2}} - p_{k-\frac{1}{2}} \ln p_{k-\frac{1}{2}} \right) \right]$$

と書ける。フルレベルの p の値 ($k < \text{KMAX}$) はハーフレベルの値を用いて

⁵ ドキュメントにより正負が異なるものもあるので注意

$$p_k = \exp \left[\frac{1}{\Delta p_k} \left(p_{k+\frac{1}{2}} \ln p_{k+\frac{1}{2}} - p_{k-\frac{1}{2}} \ln p_{k-\frac{1}{2}} \right) - 1 \right]$$

と求められる⁶。

8.3 CP グリッド

数値予報課の数値予報モデルでは、風速・温度を全てフルレベルに設定している。Lorenz が最初に用いたことから Lorenz Grid と呼ばれる。これは保存則を満足させることが考えやすいというメリットがあるが、高度と温度の間で自由度が異なる (温度の方が 1 つ多い) ことから計算モード (computational mode)⁷が発生しやすいという欠点がある。これに対して Charney and Phillips が考えた CP Grid は θ を u, v の間に設定した。Arakawa and Konor (1996) [15] は保存則を満足させる鉛直座標を提案している。

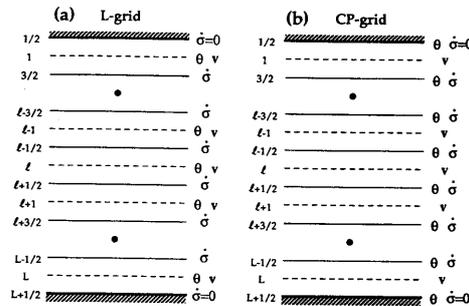


FIG. 1. An illustration of (a) the Lorenz grid and (b) the Charney-Phillips grid for a σ coordinate.

図 7: Lorenz grid と Charney-Phillips grid. Arakawa and Konor(1996) [15] より

現在のデータ同化システムにおいても予報の前処理・後処理で温度と高度の変換が必要となっており、不安定モードが生じている。また変分法を用いた解析においても Lorenz grid ではノイズが生じてしまう (露木, 1997) [9]。

9 時間積分法

u^n, u^{n-1}, \dots がわかっていた時どうやって u^{n+1} を求めるかが問題なのである。その方法はたくさんある。

⁶この式はアルゴリズムによって、すなわち倍精度か単精度か、どのようなベクトル命令が生成されているか、組み込み関数をどう使っているかによって、結果が大きくことなる。また計算時間もかかるので要注意である。

⁷数値計算上発生するにせのモード。真のモードを物理モード (physical mode) という。

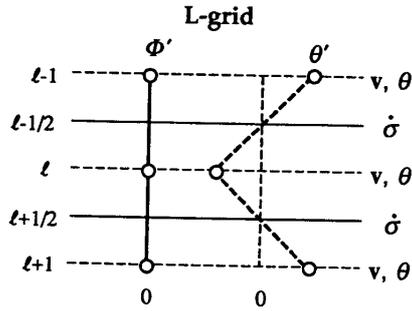


FIG. 2. An illustration of the computational mode on a portion of the L grid.

図 8: Lorenz grid で生じる computational mode。Arakawa and Konor(1996) [15] より

9.1 様々な時間積分法

9.1.1 時間レベルをいくつ使うか

- two time level スキーム : n と $n+1$ の 2 つ用いる
- three time level スキーム : $n-1$ と n と $n+1$ の 3 つ用いる

9.1.2 時間レベルの使い方

例として振動型の方程式

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -i\omega F$$

の左辺を

$$\frac{F^{n+1} - F^n}{\Delta t}$$

で近似すると考える。

- イクスプリシット・スキーム

テンデンシーを求めるのに n ステップ目までの値のみ、すなわち既に求まっているものだけを使うもの。

$$F^{n+1} = (1 - i\omega\Delta t)F^n$$

となり、不安定である。

- インプリシット・スキーム

テンデンシーを求めるのに $n+1$ ステップ目の値、すなわちこれから求めるものを用いるスキーム

$$F^{n+1} = \frac{1}{1 + i\omega\Delta t} F^n$$

となって安定である。

インプリシット・スキームは連立方程式に帰着し、解くのは大変になるが、安定になる (CFL と無関係になる) というメリットがある。

スペクトル法では前述の通り水平空間微分を計算することが容易なため、セミインプリシットの式が簡単に解けてしまうというメリットがある。

9.2 リーフロッグ法とタイムフィルター

予報方程式

$$\frac{\partial F}{\partial t} = i\omega F(x)$$

を時間に関して

$$\frac{F(t+1) - F(t-1)}{2} = i\omega F(x, t)$$

と差分化することをリーフロッグ法という。

リーフロッグ法で生じる高周波モードを押えるために、Asselin (1972) [16] のタイムフィルターが使われる。

$$\overline{F(t)} = F(t) + 0.5\nu \left[\overline{F(t-1)} - 2F(t) + F(t+1) \right]$$

ここで $\overline{F(t)}$ は $F(t)$ にフィルターがかかった値を示す。 ν はフィルターパラメータである。リーフロッグ・スキームで ν によらず同じ周波数帯を表現するためには、 ν を大きくするほど Δt を小さくしなければならないことに注意。

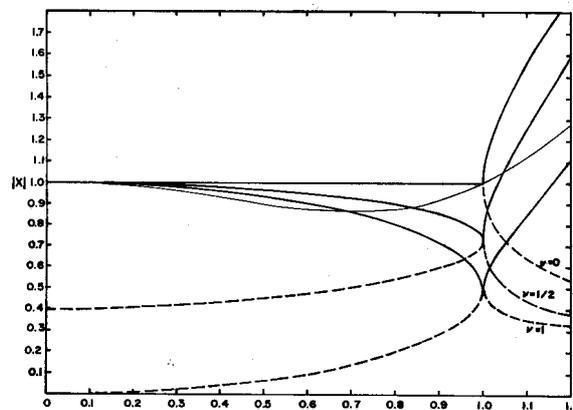


図 9: 周波数に対する振幅。Asselin (1972) [16] より

振動型方程式に leap-frog, asselin filter を適用して von Neumann 法により振幅を調べた図 (太実線)。filter 係数 ν を大きくするほど Δt を小さくし、安定して表現できる周波数帯を確保している。

第一ステップの時間積分にはオイラー・スキームを採用する。はじめの数ステップの時間積分は次のように進めている。(全球モデルの場合。領域モデルは定かではない。)

ステップ	時間間隔	スキーム	タイムフィルター
1	$\Delta t/4$	オイラー	なし
2	$\Delta t/4$	リーブフロッグ	なし
3	$\Delta t/2$	リーブフロッグ	なし
4	Δt	リーブフロッグ	あり
..

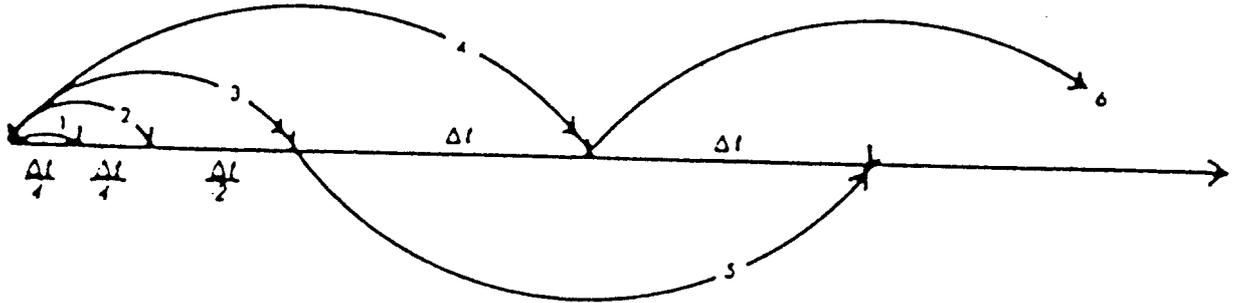


図 10: 時間積分の進め方

9.3 セミ・インプリシット法

高周波の内部重力波に関する項をインプリシットに取り扱い、それ以外をイクスプリシットに取り扱う。これにより CFL 条件を決めるのは移流だけになり、時間間隔を伸ばすことができる。

$$\frac{F(t+1) - F(t-1)}{2} = iw_{slow}F(t) + iw_{fast}\frac{F(t+1) + F(t-1)}{2}$$

非線形項をインプリシット化するためには線形化して変数分離することが必要である。Simmons and Hoskins (1978) [26] はインプリシットの線形化において実際より (物理的に) 安定な温度プロファイル (Reference Temperature) を用いれば、計算が安定化しているとしている。

さらに全球モデルでは zonal wind の平均値についてインプリシットにし、計算時間を短縮している。

9.4 セミ・ラグランジアン法

セミ・ラグランジアン法とは、運動方程式中の移流項をラグランジ的に求める方法である。セミ・ラグランジアン法とセミ・インプリシット法を組み合わせることにより移流項も含めた全ての安定性の制限から生じる時間積分間隔の制限を逃れることができ、経済的に予報を実行することができるようになる。粒子のセットを毎時間ステップ規則正しい格子に取り直すことから、「セミ」・ラグと言う。

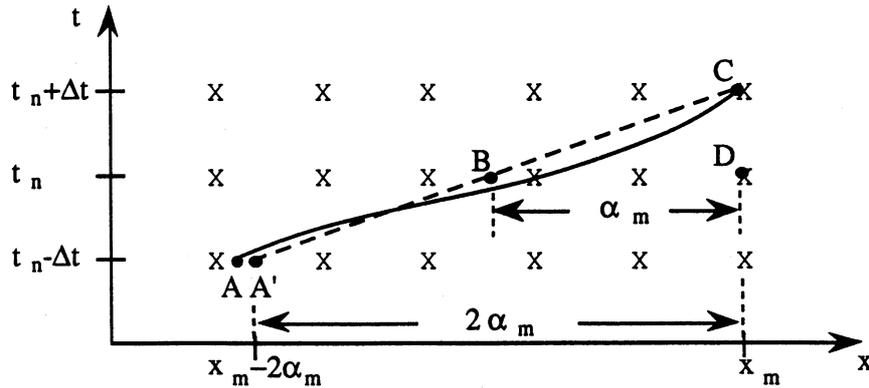


図 11: 1次元の場合のセミ・ラグランジュ法。Staniforth and Cote (1991) [27] より時刻 $t_n + \Delta t$ に C にたどりつく粒子が実線の経路をたどるとき、これを破線で近似し、変位 α_m を B での速度から求める。

水蒸気をセミ・ラグ化すれば、負の値を持つことを防ぐことができる。スペクトル法の場合はさらに、波数を計算するために必要な格子の数を大幅に減らすことができ、物理過程の計算の節約にもつながる。

しかし保存性が悪くなる、地形の影響や極の扱いをどうするか、という問題もある。

Staniforth and Cote (1991) [27] によるレビューは大いに参考になる。Ritchie (1995) [28] が ECMWF のセミ・ラグについて述べている。

10 境界条件の問題

10.1 ネスティング

あるモデルから別のモデルへ予報値を提供することを「ネスティング」という。データの流れが一方通行のタイプを 1 way nesting、お互いやりとりするものを 2 way nesting と呼ぶ。数値予報課のように全球モデルから領域モデルへデータを提供しているのは 1 way nesting である。台風やメソ現象のシミュレーションで 2 way nesting をしている研究は数多い。

10.2 側面境界

領域モデルでは全球モデルの予報値を側面境界値として与えている。境界でにせの反射が生じないように、境界の情報が正しく内部に反映されるように、境界スキームを用いる必要がある。日本語の解説では巽 (1986) [8] が詳しい。

一般に領域モデルでは次の 4 種類の側面境界条件が用いられる (Davis, 1983 [18])。

1. Diffusive damping scheme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nabla(\nu(x)\nabla u)$$

ただし $\nu(x)$ は境界付近でのみ適当な値をもつようにする。

2. Tendency modification scheme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu(x) \frac{\partial(u - \bar{u})}{\partial t}$$

\bar{u} が外部から与えられる。

3. Flow relaxation scheme (Davis, 1976 [17])

現在の RSM で用いている方法の基本である。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu(x)(u - \bar{u})$$

4. Radiation boundary scheme

内部の値は変形せず、流入する場合は境界値がそのまま用いられ、流出する場合は移流速度が変形されて内部に影響が少ないようにする。シミュレーションでは多用される。

スペクトル法ではさらに様々なバリエーションがある。Haugen and Machenhauer (1993) [19] は予報領域の外に拡張領域を設定し、周期的に場がなるように flow relaxation をかけている。

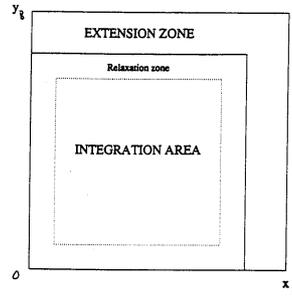


図 12: Machenhauer の予報領域と拡張領域。Haugen and Machenhauer (1993) [19] より

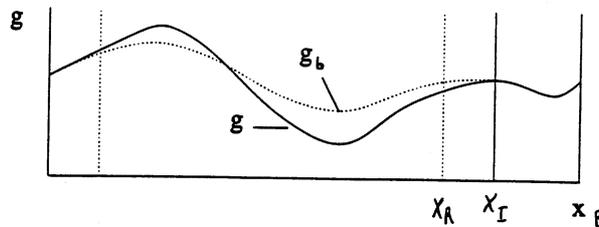


図 13: 境界値 g_b を用いて周期的な g を作る。Haugen and Machenhauer (1993) [19] より

10.3 上部境界

上部境界におけるにせの重力波の反射を抑えるために、damping がかけられる場合がある。

11 水平拡散

モデルの最小スケールにエネルギーがたまること(スペクトラル・ブロッキング)を防ぐため、予報方程式に4次の水平発散が加えられる。ただし温度と比湿の水平発散を等 η 面で加えると鉛直成層の影響が大きいので、等 p 面上の拡散に近付けるための補正がなされている(領域モデルは基底関数の都合により温度のみ)。ただし地形が急峻だとそれでも不適當な場合がある(郷田, 1996 [6])。

$$D_F = -K_D \nabla^4 F$$
$$D_T = -K_D \nabla^4 \left[T - \frac{\partial T}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial p_s} \right)_\eta p_s \right]$$

物理過程のパラメタリゼーションとしての水平拡散は必要ないか？

12 イニシャルリゼーション

そのうちお勉強しましょう。

13 おわりに

本稿は、数値予報課をはじめ有志により1997年度に行なわれた勉強会資料をもとに取りまとめたものである。数式・記号の説明が不十分であったり、記述にムラがあって統一性がとれていないのは全て筆者の力不足によるものである。最初に述べた目的が達成されているかどうか甚だ疑問である。しかしながら数値予報課が今後も世界中の中のモデリング・センターであり続けるために、特に若い人々にきっかけをつかんでもらうために、あえて本稿を公開する。誤りやコメントがあれば歓迎する。

勉強会は限られた時間ではあったが、活発に議論していただいた有志の皆様、特に勉強会の幹事をしていただいた野村竜一氏に謝意を表す。

参考文献

- [1] 小倉 義光, 1978 : 気象力学通論, 東京大学出版会.
- [2] 小倉 義光, 1997 : メソ気象の基礎知識, 東京大学出版会.
- [3] 金光ほか, 1982, スペクトル法による数値予報, 電子計算室報告・別冊第 28 号, 気象庁予報部.
- [4] 岸保 勘三郎, 1978 : 数値予報の歴史的展望, 気象研究ノート 数値予報 (上), 第 134 号, 日本気象学会.
- [5] 郷田 治稔、栗原 和夫, 1991 : 非静力モデルの開発, 数値予報課報告・別冊第 37 号, 気象庁予報部, 67-82.
- [6] 郷田, 1996 : RSM の変更について, 平成 8 年度数値予報研修テキスト, 気象庁予報部.
- [7] 巽, 1986 : 局地スペクトルモデル, 数値予報課報告・別冊第 32 号, 気象庁予報部.
- [8] 巽, 1986 : 側面境界条件について, 数値予報課報告・別冊第 32 号, 気象庁予報部.
- [9] 露木, 1997 : 変分法によるデータ同化, 数値予報課報告・別冊第 43 号, 気象庁予報部.
- [10] 増田 善信, 1981 : 数値予報 -その理論と実際-, 東京堂出版.
- [11] 萬納寺 信崇, 1994 : 平成 6 年度数値予報研修テキスト 数値予報の実際, 気象庁予報部.
- [12] 松野 太郎・島崎 達夫, 1981 : 大気科学講座 3, 成層圏と中間圏の大気, 東京大学出版会.
- [13] 松村 崇行, 1992 : 領域モデル解説資料, 数値予報課アプリケーション班.
- [14] 吉崎 正憲, 1988 : ORI-UT 対流モデルの解説 (I).
- [15] Arakawa and Konor, 1996 : Vertical Differencing of the Primitive Equations Based on the Charney – Phillips Grid in Hybrid $\sigma - p$ Vertical Coordinates, *M. W. R.*, **124**, 511 - 528.
- [16] Asselin, 1972 : Frequency Filter for Time Integrations, *M. W. R.*, **100**, 487 - 490.
- [17] Davis, 1976 : A lateral boundary formulation for multi-level prediction models, *Q. J. R. M. S.*, **102**, 405-418.
- [18] Davis, 1983 : Limitations of Some Common Lateral Boundary Schemes used in Regional NWP Models, *M. W. R.*, **111**, 1002 - 1012.
- [19] Haugen and Machenhauer, 1993 : A Spectral limited-Area Model Formulation with Time-dependent Boundary Conditions Applied to the Shallow-Water Equations, *M. W. R.*, **121**, 2618 - 2630.

- [20] Jung and Kanamitsu, 1994 : The NMC Nested Regional Spectral Model, *M.W.R.*, **122**, 3-26.
- [21] Kasahara, 1974 : Various Vertical Coordinate Systems Used for Numerical Weather Prediction, *Monthly Weather Review*, **102**, 509 – 522.
- [22] Mesinger F. and Arakawa A., 1976 : Numerical Methods used in Atmospheric Models, GARP Publications Series No. 17, WMO-ICSU Joint Organizing Committee.
- [23] Mailhot, Sarrazin, Biliodeau, Brunet and Pellerin, 1997 : Development of the 35-km Version of the Canadian Regional Forecast System, *Atmosphere-Ocean*, **35**, 1-27.
- [24] NPD/JMA, 1997 : Outline of the Operational Numerical Weather Prediction at the Japan Meteorological Agency, Appendix to Progress Report on Numerical Weather Prediction.
- [25] Simmons and Burridge, 1981 : An Energy and Angular-Momentum Conserving Vertical Finite-Difference Scheme and Hybrid Vertical Coordinate, *M.W.R.*, **109**, 758 - 766.
- [26] Simmons and Hoskins, 1978 : Stability of the Semi-Implicit Method of Time Integration, *M.W.R.*, **106**, 405 - 412.
- [27] Staniforth and Cote, 1991 : Semi-Lagrangian Integration Schemes for Atmospheric Models – A Review, *M.W.R.*, **119**, 2206 - 2223.
- [28] Ritchie, 1995 : Implementation of the Semi-Lagrangian Method in a High-Resolution Version of the ECMWF Forecast Model, *M.W.R.*, **123**, 489 - 514.